

**Эконометрика, 2019-2020, 1 модуль**  
**Семинар 3**  
**16.09.19 для**  
**Группы Э\_Б2017\_Э\_3**

**Семинарист О.А.Демидова**

**Задача 1.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.86, № 3.1)

Докажите, что

$$\hat{\beta}_1^{\text{МНК}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad \hat{\beta}_0^{\text{МНК}} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1^{\text{МНК}} \bar{X},$$

Является решением системы нормальных уравнений.

**Задача 2.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.86, № 3.2)

Докажите, что оценка МНК коэффициента наклона в уравнении парной регрессии может быть преобразована к виду:

$$\hat{\beta}_1^{\text{МНК}} = \frac{\widehat{\text{cov}}(X, Y)}{\widehat{\text{var}}(X)}.$$

**Задача 3.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.87, № 3.3)

Найдите оценку МНК коэффициента регрессии без свободного члена (т.е. проходящей через начало координат):  $Y_i = \beta_1 X_i + u_i, i = 1, \dots, n$

**Задача 4.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.3)

Найдите оценку МНК коэффициента  $\beta_0$  регрессии на константу:

$$Y_i = \beta_0 + u_i, i = 1, \dots, n.$$

**Задача 5.**

(Автор задачи – К.Дугерти, Введение в эконометрику, издание 2, с.66, задача 2.7)

Британский исследователь оценил зависимость веса индивида от его роста:

$$\widehat{\text{Вес}}_{\text{фунты}} = -210 + 5.39 \text{Рост}_{\text{дюймы}}$$

Российский исследователь оценил ту же зависимость, но при переведенных в метрическую систему единицах: 1 дюйм = 2,54 см, 1 фунт = 0,454 кг. Изменятся ли коэффициенты регрессии при таком изменении масштаба исходных данных?

**Задача 6.** (Автор задачи – К.Дугерти, Введение в эконометрику, издание 2, с.66, задача 2.8)

Исследователь изучает зависимость между совокупным спросом на услуги  $Y$  и совокупным располагаемым личным доходом  $X$  по данным американской экономики (обе величины измерены в миллиардах долларов в постоянных ценах), используя ежегодные данные временных рядов и модель парной регрессии.

Исследователь вначале оценил уравнение регрессии с помощью обычного метода наименьших квадратов. Предполагая, что обе величины  $Y$  и  $X$  могут быть существенно занижены из-за стремления людей к уклонению от уплаты налогов, исследователь принимает два альтернативных метода уточнения заниженных оценок:

- (1) добавляя в каждом году 90 млрд. долл. к показателю  $Y$  и 200 млрд. долл. к показателю  $X$ ;
- (2) увеличивая значения как для  $X$ , так и для  $Y$  на 10% за каждый год.

Оцените влияние каждой из этих корректировок на результаты оценивания регрессии.

**Задача 7.** (Авторы задачи . Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 6-7, задача 1.2)

При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра  $\theta$  в следующих моделях:

1.  $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$ ;
2.  $y_i = \theta - \theta x_i + \varepsilon_i$ ;
3.  $\ln y_i = \theta + \ln x_i + \varepsilon_i$ ;
4.  $y_i = \theta + x_i + \varepsilon_i$ ;
5.  $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$ ;
6.  $y_i = \theta/x_i + \varepsilon_i$ ;
7.  $y_i = \theta x_i + (1 - \theta)x_{i2} + \varepsilon_i$ .

**Задача 8.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.1)

Для оцениваемой по 20 наблюдениям регрессии

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, \quad i = 1, \dots, 20,$$

известны суммы  $\sum_{i=1}^{20} X_i = -30$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 60$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = -25$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Y_i = 5$

составьте систему нормальных уравнений для оценок коэффициентов регрессии  $\beta_0, \beta_1$  и найдите эти оценки.

**Задача 9.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.2)

Сумма оцененных с помощью МНК остатков регрессии с константой может быть равна

- 1) только отрицательному числу    2) только положительному числу    3) только 0  
4) любому числу?

**Задача 10.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.4)

Докажите, что  $R^2 = \hat{r}_{XY}^2$ , где  $\hat{r}_{XY}$  - выборочный коэффициент корреляции X и Y.

**Задача 11.** (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.5)

Докажите, что для регрессий

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X, \quad \hat{X} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Y,$$

оцененных по одной и той же выборке  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ , коэффициенты множественной детерминации  $R^2$  совпадают, а оценки коэффициентов наклона связаны соотношением  $\hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_1 = R^2$ .

**Задача 12.** (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 13, задача 1.17)

Какие из указанных моделей можно представить в линейном виде?

1.  $y_i = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x_i} + \varepsilon_i$ ;
2.  $y_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)$ ;
3.  $y_i = 1 + \frac{1}{\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$ ;
4.  $y_i = \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$ ;
5.  $y_i = x_i^{\beta_2} e^{\beta_1 + \varepsilon_i}$ ;
6.  $y_i = \beta_1 \exp(\beta_2 x_i + \varepsilon_i)$ .

**Задача 13.** (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 19, задача 2.4)

Пусть  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$  и  $i = 1, \dots, 5$  – классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные:  $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 3$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 12$ ,  $\sum_{i=1}^5 y_i = 15$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i = 3$ .

1. Найдите  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\beta}_2$ ,  $\text{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ .
2. Найдите  $TSS$ ,  $ESS$ ,  $RSS$ ,  $R^2$ ,  $\sigma^2$ .