Материалы для доказательства теоремы Гаусса-Маркова

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon;$

$\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}; \quad x_i = X_i - \bar{X}, \quad y_i = Y_i - \bar{Y}$

$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i$, где $\omega_i = \dfrac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$

Свойства ω_i

1) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$; 2) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i = 1$; 3) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Доказательство.

1) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{X}\right) = 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = 1$

3) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \dfrac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$