Эконометрика, 2019-2020, 1 модуль
Семинар 2
09.09.19 для
Группы Э_Б2017_Э_3

Семинарист О.А.Демидова

Элементы линейной алгебры

Определение 1 *Отличный от нулевого вектор и называется собственным вектором матрицы A, если существует такое число λ, что* $Au = \lambda u$. *Число λ называется собственным значением (числом) матрицы A.*
Определение 2 *Для матрицы A размером* $n \times n$ *многочлен* $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, *где E – единичная матрица, называется характеристическим.*
Утверждение 1 *Если λ - собственное значение матрицы A, то множество векторов* $\{u : Au = \lambda u\}$ *является линейным подпространством размерности, не превышающей кратности λ. Это подпространство называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ*
Утверждение 2 *Все собственные числа матрицы A являются корнями характеристического многочлена матрицы A (являющегося многочленом степени n по λ). Для нахождения собственных векторов матрицы A необходимо решить систему линейных уравнений* $(A - \lambda E)u = 0$ *для каждого корня характеристического уравнения. Линейно независимые решения системы при заданном λ образуют базис собственного подпространства, отвечающего собственному значению λ.*
Определение 3 *Матрица, не изменяющаяся при транспонировании, называется симметричной.*
Утверждение 3 *Симметричная матрица размера n имеет n действительных собственных чисел (с учетом кратности).*
Утверждение 4 *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*
Утверждение 5 *У симметричной матрицы размера n существует n линейно независимых собственных векторов.*
Определение 4 *Если вектор - столбцы матрицы C ортогональны, а их длина равна 1, то матрица C называется ортогональной.*
Утверждение 6 *Для ортогональной матрицы обратная и транспонированная матрицы совпадают.*
Утверждение 7 *Определитель ортогональной матрицы равен единице.*
Утверждение 8 *Симметричную матрицу A можно представить в виде:*
$A = C\Lambda C'$, *где Λ - матрица, у которой на диагонали – собственные числа матрицы A, а остальные элементы равны 0, а C – ортогональная матрица.*
Определение 5 *След квадратной матрицы A – сумма ее диагональных элементов, т.е.*
$tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Свойства следа матрицы:
1) $tr[A + B] = trA + trB$
2) $trA' = trA$
3) $tr[AB] = tr[BA]$, *если соответствующие произведения матриц существуют*

4) След симметричной матрицы равен сумме ее собственных чисел (с учетом кратностей).
Определение 6 *Ранг матрицы A – число линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы.*
Утверждение 9 *Ранг матрицы равен порядку наибольшего отличного от 0 минора.*
Свойства ранга матрицы:

1) $rang[AB] \le rang[A], rang[B]$
2) $rang[A'] = rang[A]$
3) $rang[A'A] = rang[A]$
4) *Ранг симметричной матрицы равен количеству ее отличных от 0 собственных чисел (с учетом кратностей).*

Определение *7 Если A – симметричная матрица размера (n×n), то ей можно поставить в соответствие квадратичную форму* $X'AX$ *, где* $X \in R^n$.
Определение 8 *Если для любого ненулевого вектора* $X \in R^n$ *имеет место неравенство* $X'AX > 0\ (\ge 0)$*, то соответствующая квадратичная форма называется положительно определенной (полуопределенной).*
Определение 9 *Если для любого ненулевого вектора* $X \in R^n$ *имеет место неравенство* $X'AX < 0\ (\le 0)$*, то соответствующая квадратичная форма называется отрицательно определенной (полуопределенной).*
Утверждение 10 *Если все собственные числа симметричной матрицы A положительны (неотрицательны), то соответствующая квадратичная форма положительно определена (полуопределена), а если отрицательны (неположительны), то отрицательно определена (полуопределена).*
Критерий Сильвестра: *Если все главные миноры матрицы A положительны (неотрицательны), то соответствующая ей квадратичная форма положительно определена (полуопределена). Если же знаки главных миноров матрицы A чередуются, начиная с отрицательного, то соответствующая квадратичная форма отрицательно определена.*
Определение 10 *Матрица A называется идемпотентной, если* $A^2 = A$.
Определение 11 *Симметричная идемпотентная матрица называется проекционной.*

1. Даны вектор-столбцы $a = (3, -4, 12)^T$, $b = (7, 4, 3)^T$.
   Найти а) $2a$, б) $a + b$, в) $2a - 3b$, г) скалярное произведение векторов a и b, д) длину вектора a.

2. Даны матрицы
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
   Найти а) 3A, б) 3A + 5B, в) AC, г) CA.

3. Даны матрицы
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
   Найти а) det A, б) det B, в) A^{-1} , г) B^{-1}, д) след матрицы B.

4. Дана матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ X_1 & . & . & . & X_n \end{pmatrix}^T$. Найти $X^T X$.

5. Доказать, что симметричными являются матрицы
   а) $X^T X$, б) $P(X) = X(X^T X)^{-1} X^T$, в) $\pi = II^T / I^T I$, где I –единичный вектор – столбец размерности n.
6. Найти ранг матрицы
   а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, б) π (см. задачу 5 в).
7. Доказать, что собственные значения идемпотентной матрицы равны 0 или 1.
8. Доказать, что для проекционной матрицы след и ранг совпадают.
9. Доказать, что если матрица P идемпотентна, то матрица M = E – P, (где E – единичная матрица), тоже идемпотентна.
10. Доказать, что матрицы P(X) и π из задачи 5 являются идемпотентными.
11. Найти след матриц P(X) и π.
12. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы
    а) $A = \begin{pmatrix} 1{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.