Материалы для доказательства ТГМ

Утв. 1. $var(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$; $var(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon^2 \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} = \sigma_\varepsilon^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{X}^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}\right)$

$cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\dfrac{\bar{X}\cdot\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$.

$\triangle$ Обозначим $\omega_i = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^n x_j^2}$, тогда $\hat{\beta}_1 = \sum\limits_{i=1}^n \omega_i y_i$

св-ва ω_i:

1) $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i = 0$; 2) $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i x_i = 1$; 3) $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i^2 = \dfrac{1}{\sum\limits_i x_i^2}$ (до-во св-в было на лекции)

$$var(\hat{\beta}_1) = var\left(\sum_{i=1}^n \omega_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 var(y_i) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n \omega_i(Y_i - \bar{Y})\cdot\bar{X} = \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n} - \omega_i\bar{X}\right)Y_i + \bar{X}\bar{Y}\underbrace{\sum_{i=1}^n \omega_i}_{0}$$

$$= \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n} - \omega_i\bar{X}\right)\cdot Y_i \Rightarrow$$

$$var(\hat{\beta}_0) = \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n^2} - 2\cdot\frac{1}{n}\omega_i\bar{X} + \omega_i^2\bar{X}^2\right)\cdot\sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\cdot\bar{X}\underbrace{\sum_{i=1}^n \omega_i}_{0} + \bar{X}^2\underbrace{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}_{=\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}\right) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{X}^2}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} = \sigma_\varepsilon^2\frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2}{n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} = \sigma_\varepsilon^2\frac{\sum X_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$$

$cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ - ?

$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{X}$; $var(\bar{Y}) = \frac{1}{n}\sigma_\varepsilon^2$

$$var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{X}) = var(\hat{\beta}_0) + 2\bar{X}cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) + \bar{X}^2 var(\hat{\beta}_1)$$

$$\frac{1}{n}\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}\right) + 2\bar{X}cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) + \bar{X}^2\cdot\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} \Rightarrow$$

$$cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\bar{X}\cdot\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$$

Утв. 2 При выполнении условий ТГМ оценки $\hat{\beta}_0^{МНК}$ и $\hat{\beta}_1^{МНК}$ являются BEST, т.е. имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

▷ Пусть $\tilde{\beta}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i Y_i$ — другая несмещенная оценка, т.е. $E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 \Rightarrow E(\tilde{\beta}_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i E(Y_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i X_i \equiv \beta_1 \Rightarrow$$

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i = 0$; (2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i X_i = 1$, т.е. необходимо решить задачу:

$$Var(\tilde{\beta}_1) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i^2 \to \min$$

при ограничениях (1) и (2).

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_i - \omega_i + \omega_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_i - \omega_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_i - \omega_i)\omega_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_i - \omega_i)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i \omega_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} - \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i X_i}_{=1} - \bar{X} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i}_{=0} \Big) - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_i - \omega_i)^2 + \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i^2$ достигает минимума при $\tilde{\omega}_i = \omega_i$, т.е. для оценок МНК. □

Для $\hat{\beta}_0$ д-во аналогично.