

### 8.3. Кр 1, демо

**Вопрос 1 ♣** Если  $\mathbb{E}(X) = -3$ ,  $\mathbb{E}(Y) = 2$ ,  $\text{Var}(X) = 6$ ,  $\text{Var}(Y) = 7$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = -1$ , то  $\text{Var}(5X + 2Y - 1)$  равна

☐ A 178

☒ 158

☐ G Нет верного ответа.

☐ B 198

☐ E 169

☐ C 148

☐ F 168

**Вопрос 2 ♣** При добавлении нового наблюдения

☐ A  $TSS$  не увеличится;  $R^2$  не уменьшится

☐ B  $TSS$  может измениться произвольно;  $R^2$  не уменьшится

☐ C  $TSS$  может измениться произвольно;  $R^2$  может измениться произвольно

☐ D  $TSS$  может измениться произвольно;  $R^2$  не увеличится

☒  $TSS$  не уменьшится;  $R^2$  может и вырасти, и упасть

**Вопрос 3 ♣** Если в модели парной регрессии  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  все  $X_i$  равны константе 2016, то оценка  $\hat{\beta}_2$  равна

☐ A 1/2016

☐ C -2016

☐ E 2016

☒ не существует

☐ D -1/2016

☐ F 0

**Вопрос 4 ♣** Если в модели парной регрессии  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  все  $Y_i$  равны константе 2016, то оценка  $\hat{\beta}_2$  равна

☐ A -2016

☐ C 1/2016

☐ E 2016

☐ B -1/2016

☐ D не существует

☒ 0

**Вопрос 5 ♣** Квартальные данные о ВВП России за 10 лет являются

- ☐ А случайной выборкой ☐ Д панельными данными  
☐ В сходящимся рядом ☒ Е временным рядом  
☐ С перекрестной выборкой ☐ F Нет верного ответа.

**Вопрос 6 ♣** Предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены, случайные ошибки нормально распределены. Регрессия по 25 наблюдениям имеет вид  $\hat{Y}_i = -1 + \frac{4}{(2)} X_i$ . В скобках указаны стандартные ошибки. На уровне значимости 0.05

- ☒ А значим только коэффициент наклона ☐ Д оба коэффициента значимы  
☐ В оба коэффициента незначимы ☐ Е значим только свободный член  
☐ С недостаточно информации для

**Вопрос 7 ♣** Если  $P$ -значение  $t$ -статистики при проверке значимости коэффициента регрессии равно 0.04, то этот коэффициент не значим при уровне значимости

- ☒ А 0.01 ☐ С 0.95 ☐ Е 0.05  
☐ В 0.9 ☐ Д 0.1 ☐ F Нет верного ответа.

**Вопрос 8 ♣** Регрессия по 25 наблюдениям имеет вид  $\hat{Y}_i = -1 - \frac{1.5}{(2)} X_i$ . В скобках указаны стандартные ошибки. При проверке гипотезы о равенстве коэффициента наклона  $(-1)$  расчётное значение  $t$ -статистики равно

- ☐ А -0.5 ☐ С 0.5 ☒ Е -1  
☐ В 2 ☐ Д -2 ☐ F Нет верного ответа.

**Вопрос 9 ♣** В регрессии с константой, оценённой с помощью МНК, сумма остатков

- ☒ А равна 0 ☐ Е может принимать любое положительное значение  
☐ В равна 1 ☐ F может принимать любое значение  
☐ С не существует ☐ Д может принимать любое неположительное из  $\mathbb{R}$

**Вопрос 10 ♣** Необходимым условием теоремы Гаусса-Маркова является

- ☒ А постоянство дисперсии случайной ошибки ☐ С постоянство дисперсии остатков  
☐ В наличие в матрице  $X$  единичного столбца ☐ Д нормальность  $Y_i$   
☐ Е нормальность остатков ☐ F Нет верного ответа.

1. Эконометресса Ефросинья исследует, как зависит надой молока,  $mil k_i$ , (в литрах) от возраста коровы,  $age_i$ , (в годах):

$$mil k_i = \beta_1 + \beta_2 age_i + u_i$$

Показатель	Значение
$RSS$	B1
$ESS$	B2
$TSS$	1240
$R^2$	B3
Стандартная ошибка регрессии	1.45
Количество наблюдений	340

Коэффициент	Оценка	$se(\hat{\beta})$	t-статистика	P-значение	Левая (95%)	Правая (95%)
Константа	4.565	0.207	B4	B9	B5	B6
$age$	B7	B8	3.670	0.000	0.036	0.119

Найдите пропущенные числа B1--B9.

Ответ округляйте до 2-х знаков после запятой. Кратко поясняйте формулой, как были получены результаты.

2. Гарри Поттер и Рон Уизли активно готовятся к чемпионату мира по квиддичу. В течение 30 дней они сначала посещают Хогсмид и выпивают некоторое количество сливочного пива в пинтах,  $beer_t$ , после забивают определённое количество квотфлов в штуках,  $quaf fle_t$ . Гермиона Грейнджер оценила следующую регрессию:

$$\widehat{quaf fle_t} = \underset{(2.83)}{80} - \underset{(1)}{3} beer_t$$

В скобках приведены стандартные ошибки. Оценка дисперсии ошибок равна  $\hat{s}^2 = 238$ .

Сегодня Гарри и Рон выпили 4 пинты сливочного пива.

- Проверьте гипотезы о значимости каждого коэффициента на уровне значимости 5%.
  - Постройте точечный прогноз количества квотфлов, забитых сегодня Гарри Поттером и Роном Уизли
  - Постройте 90%-ый доверительный интервал для коэффициента наклона регрессии
3. Для модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  выполнены все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова.
- Докажите, что МНК-оценка коэффициента  $\beta_2$  является случайной величиной
  - Докажите, что эта оценка является несмещённой
  - Найдите дисперсию этой оценки
4. Для модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  выполнены все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова. Для МНК-оценок коэффициентов найдите  $\widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ .
5. Дайте определения следующих понятий
- Несмещённая оценка
  - Эффективная оценка
  - Состоятельная последовательность оценок

#### 8.4. Кр 1, демо, решения

1.

$$B1 = 1.45^2 \cdot (340 - 2)$$

$$B2 = ESS = TSS - RSS$$

$$B3 = R^2 = ESS/TSS$$

$$B4 = t_c = 4.565/0.207 = 22$$

По таблицам ( $t$ -распределение с 338 степенями свободы или примерно нормальное)  
 $t_{crit} = 1.96$

$$B5 = CI_{left} = 4.565 - 1.96 \cdot 0.207$$

$$B6 = CI_{right} = 4.565 + 1.96 \cdot 0.207$$

$$B7 = \hat{\beta}_{milk} = (0.036 + 0.119)/2 = 0.0775$$

$$B8 = se(\hat{\beta}_{milk}) = \hat{\beta}_{milk}/t_{milk} = 0.0775/3.670$$

$$B9 = P - value(22) \approx 0.000$$

2. а) Находим  $t$ -статистики:  $t_c = 80/2.83 = 28.3$ ,  $t_{beer} = -3/1 = -3$ . Если предположить нормальность ошибок, то  $t_{crit} = 2.05$ . Следовательно, в обоих случаях  $H_0: \beta = 0$  отвергается и оба коэффициента значимо отличны от нуля.

б)

$$\hat{Y}_i = 80 - 3 \cdot 4 = 80 - 12 = 68$$

- в) Для уровня доверия 90% получаем критическое значение  $t_{crit} = 1.7$ . Отсюда доверительный интервал равен

$$[-3 - 1 \cdot 1.7; -3 + 1 \cdot 1.7]$$

3. Решение изложено в лекциях

4. Решение изложено в лекциях

5. а) Несмещённая оценка

Оценка  $\hat{\theta}$  называется несмещённой, если  $E(\hat{\theta}) = \theta$

б) Эффективная оценка

Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной среди множества оценок  $\Theta$ , если для любой оценки  $\hat{\theta}'$  из множества  $\Theta$  выполнено неравенство  $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\hat{\theta}')$

в) Состоятельная последовательность оценок

Последовательность оценок  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots$ , называется состоятельной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

для любого числа  $\varepsilon > 0$ .



### 8.5. Кр 1, 24.10.2016

**Вопрос 1 ♣** Если  $E(X) = 4$ ,  $E(Y) = 3$ ,  $\text{Var}(X) = 6$ ,  $\text{Var}(Y) = 7$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = -1$ , то  $\text{Cov}(1 - X + 2Y, 1X)$  равна

- ☐ A -7                      ☐ D 8                      ☐ G Нет верного ответа.  
☐ B -4                      ☐ E 4  
☐ C -9                      ☒ -8

**Вопрос 2 ♣** Предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены, случайные ошибки нормально распределены, уровень доверия равен 80%, критическое значение  $t$ -статистики равно 1.53, всего  $n$  наблюдений. Регрессия имеет вид  $\hat{Y}_i = -4 + \frac{5}{(3)} X_i$ , в скобках указаны стандартные ошибки. Доверительный интервал для  $\beta_2$  равен

- ☒ [4.69; 5.31]                      ☐ C [1.94; 8.06]                      ☐ E [3.47; 6.53]  
☐ B [4.25; 5.75]                      ☐ D [4.88; 5.12]                      ☐ F Нет верного ответа.

**Вопрос 3 ♣** Имеются данные по доходу жены, мужа и продолжительности брака. Доход семьи складывается из дохода жены и мужа. Вася оценил зависимость дохода семьи от продолжительности брака и получил регрессию  $\hat{Y}_i = 20 + 3X_i$ , Петя оценил зависимость дохода мужа от продолжительности брака и получил регрессию  $\hat{Y}_i = 10 + 2X_i$ . Маша оценивает зависимость дохода жены от продолжительности брака. Она получит регрессию:

- ☐ A  $\hat{Y}_i = 20 + 3X_i$                       ☐ E  $\hat{Y}_i = 10 - X_i$   
☐ B  $\hat{Y}_i = 30 + 5X_i$                       ☐ F  $\hat{Y}_i = 15 + 2.5X_i$   
☒  $\hat{Y}_i = 10 + X_i$                       ☐ G Нет верного ответа.  
☐ D недостаточно данных для ответа

**Вопрос 4 ♣** В парной регрессии на уровне значимости 5%-ов гипотеза  $H_0: \beta_2 = 2016$  не отвергается. Из этого можно сделать вывод, что на соответствующем уровне значимости

- ☐ A  $H_0: \beta_2 = 0$  не отвергается                      ☐ D доверительный интервал для  $\beta_2$  не содержит ноль  
☐ B  $H_a: \beta_2 \neq 0$  отвергается                      ☐ E  $H_a: \beta_2 \neq 0$  не отвергается  
☐ C  $H_0: \beta_2 = 0$  отвергается                      ☒ F Нет верного ответа.

**Вопрос 5 ♣** В парной регрессии величина  $\bar{Y} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}$

- ☐ A равна 1                      значение  
☐ B равна (-1)                      ☒ равна 0  
☐ C может принимать любое положительное значение                      ☐ F не существует  
☐ D может принимать любое неотрицательное значение                      ☐ G Нет верного ответа.

**Вопрос 6 ♣** Условием теоремы Гаусса-Маркова, необходимым для несмещённости оценок коэффициентов регрессии в модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  является

- |                                                                  |                                                                 |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> А гомоскедастичность случайных ошибок   | <input type="checkbox"/> Д некоррелированность случайных ошибок |
| <input type="checkbox"/> В нормальность случайных ошибок         | <input checked="" type="checkbox"/> Е $E(u_i) = 0$              |
| <input type="checkbox"/> С гетероскедастичность случайных ошибок | <input type="checkbox"/> F $E(u_i) \neq 0$                      |
|                                                                  | <input type="checkbox"/> G Нет верного ответа.                  |

**Вопрос 7 ♣** В модели парной регрессии  $R^2 = 0.8$ ,  $TSS = 200$  и 12 наблюдений. Несмещённая оценка дисперсии случайной ошибки равна

- |                                         |                                |                                                |
|-----------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> А 3.8          | <input type="checkbox"/> Д 3.9 | <input type="checkbox"/> G Нет верного ответа. |
| <input checked="" type="checkbox"/> В 4 | <input type="checkbox"/> Е 4.2 |                                                |
| <input type="checkbox"/> С 4.1          | <input type="checkbox"/> F 4.3 |                                                |

**Вопрос 8 ♣** Если все  $Y_i$  в линейной регрессии увеличить в два раза, то оценка  $\hat{\beta}_2$

- |                                                                                     |                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> А изменится в произвольную сторону, в зависимости от $X_i$ | <input type="checkbox"/> Д поделится на 4             |
| <input type="checkbox"/> В не изменится                                             | <input checked="" type="checkbox"/> Е помножится на 2 |
| <input type="checkbox"/> С помножится на 4                                          | <input type="checkbox"/> F поделится на 2             |
|                                                                                     | <input type="checkbox"/> G Нет верного ответа.        |

**Вопрос 9 ♣** Если  $\alpha = 0.1$  и  $P$ -значение равно 0.09, то

- |                                                         |                                                 |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> А $H_0$ принимается            | ответа                                          |
| <input type="checkbox"/> В $H_a$ отвергается            | <input type="checkbox"/> Е $H_a$ не отвергается |
| <input checked="" type="checkbox"/> С $H_0$ отвергается | <input type="checkbox"/> F $H_a$ принимается    |
| <input type="checkbox"/> Д недостаточно информации для  | <input type="checkbox"/> G Нет верного ответа.  |

**Вопрос 10 ♣** Свободно распространяемым программным обеспечением является

- |                                         |                                   |                                                |
|-----------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> А Matlab       | <input type="checkbox"/> Д Excel  | <input type="checkbox"/> G Нет верного ответа. |
| <input type="checkbox"/> В Stata        | <input type="checkbox"/> Е SPSS   |                                                |
| <input checked="" type="checkbox"/> С R | <input type="checkbox"/> F Eviews |                                                |

- В течение 10 дней Василий записывал количество пойманных им покемонов,  $Y_i$ , и количество решённых задач по эконометрике,  $X_i$ . Оказалось, что  $\sum X_i^2 = 44$ ,  $\sum Y_i^2 = 197$ ,  $\sum X_i = 15$ ,  $\sum Y_i = 15$  и  $\sum X_i Y_i = 44$ . Василий предполагает корректность линейной модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ .
  - Найдите МНК-оценки коэффициентов регрессии
  - Найдите  $RSS$ ,  $ESS$ ,  $TSS$  и  $R^2$
- Для модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  выполнены все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, а случайные ошибки нормально распределены. Известны все значения  $Y_i$ , все значения  $\hat{Y}_i$  и часть значений  $X_i$

$X_i$	5	3	.	.
$Y_i$	4	7	7	2
$\hat{Y}_i$	5	7	4	4

- а) Найдите МНК-оценки коэффициентов регрессии
  - б) Найдите стандартную ошибку коэффициента  $\hat{\beta}_2$
  - в) Постройте 95%-ый доверительный интервал для коэффициента  $\hat{\beta}_2$
  - г) Проверьте гипотезу о незначимости коэффициента  $\beta_2$  на уровне значимости 5%
3. Для модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  выполнены все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова. Докажите несмещённость МНК-оценки коэффициента  $\beta_1$ .
  4. Для модели  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  выполнены все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова. Выведите формулу для дисперсии МНК-оценки,  $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ .
  5. Рассмотрим модель  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$  с неслучайным регрессором. Аккуратно сформулируйте теорему Гаусса-Маркова, пояснив смысл используемых понятий