Эконометрика

Лекция

Повторение теории вероятностей и математической статистики

Демидова О.А.
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru

2019

Теория вероятностей. Случайные величины

Опр. Случайными величинами называют числовые функции, определенные на множестве элементарных событий:

$$X : \Omega \to R$$

Теория вероятностей. Дискретные случайные величины

Опр. Если случайная величина принимает конечное или счетное множество значений, то она называется дискретной.

Дискретные случайные величины удобно задавать с помощью таблицы,
в первой строке которой перечислены значения, которые принимает случайная величина, а во второй – соответствующие вероятности:

X	X_1	…	X_n
P	P_1	…	P_n

Пример дискретной случайной величины

Случайная величина X – количество очков на верхней грани брошенной кости

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Функция распределения случайной величины

Опр. Функцией распределения $F_X(x)$ случайной величины X называется $F_X(x) = P(X \le x)$.

Свойства функции распределения:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

3) **F(x) – неубывающая функция**

4) **F(x) является непрерывной справа**

Непрерывная случайная величина

Опр. Случайная величина называется непрерывной, если существует кусочно непрерывная функция f(x) такая, что F’(x) = f(x).

f(x) называется функцией плотности распределения.

Свойства функции плотности

1) $f\ (\ x\ )\ \geq\ 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f\ (\ x\ )\,dx\ \ =\ 1$

3) $P\ (\ a\ \leq\ X\ \leq\ b\ )\ =\ \int_{a}^{b} f\ (\ x\ )\,dx$

Математическое ожидание случайной величины

Существует две основных числовых характеристики случайных величин: математическое ожидание и дисперсия.

Опр. Математическое ожидание случайной величины:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i p_i$$ **,если X – дискретная случайная величина,**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$ **,если X – непрерывная случайная величина.**

Дисперсия случайной величины

Опр. Дисперсией (обычно обозначаемой σ^2) случайной величины называется:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X - E(X))^2 .$$

Опр. Стандартным отклонением называется корень из дисперсии.

Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин X и Y

Опр. Ковариацией случайных величин X и Y называется

Cov(X,Y) = E(X – E(X))(Y – E(Y))

Опр. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется:

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Свойства коэффициента корреляции:

1) $|r_{XY}| \le 1$

2) Если $r_{XY} = 0$, то не существует линейной связи между X и Y

3) Если $|r_{XY}| = 1$, то между случайными величинами X и Y существует точная линейная связь: Y = aX + b

Свойства математического ожидания, дисперсии и ковариации

1) $E(C) = C$

2) $E(CX) = CE(X)$

3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

4) $Var(C) = 0$

5) $Var(CX) = C^2Var(X)$

6) $Var(X + Y) = Var(X) + 2\,Cov(X,Y) + Var(Y)$

7) $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$

8) $Cov(CX, Y) = CCov(X, Y)$

9) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

10) $Cov(X, X) = Var(X)$,

11) $Cov(X, C) = 0$

где C - константа, X,Y, Z – случайные величины .

Совместное распределение двух случайных величин

Пусть X, Y - случайные величины с совместным законом распределения.

Это может быть таблица, если X, Y принимают конечное или счетное множество значений. Закон совместного распределения непрерывных случайных величин может быть задан с помощью совместной функции плотности f(x,y).

Маргинальные распределения

Если задан совместный закон распределения случайных величин X и Y, то маргинальное распределение случайной величины X имеет вид:

$P(X = X_i) = \sum_j P(X = X_i, Y = Y_j)$, $i = 1,\ldots,n$ для дискретного случая,

$f_x(x) = \int f(x,y)dy$ – функция плотности для непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия случайных величин X, Y определяются как обычно.

Условные распределения

Условная плотность распределения определяется следующим образом:

$P(Y = Y_j|X = X_i) = P(X = X_i, Y = Y_j)/P(X = X_i)$ в дискретном случае,

$f(y|x) = f(x,y)/f_x(x)$ в непрерывном случае.

Независимость случайных величин

Если

$P(Y = Y_j|X = X_i) = P(Y = Y_j)$ для всех i в дискретном случае,

или $f(y|x) = f(y)$ в непрерывном случае, то случайные величины X,Y

называются независимыми.

В случае независимости случайных величин X, Y

$P(X = X_i, Y = Y_j) = P(X = X_i)\ P(Y = Y_j)$ в дискретном случае,

$f(x,y) = f_x(x)\ f_Y(y)$ в непрерывном случае.

Условное математическое ожидание

Условное математическое ожидание

$E(Y|X = X_i) = \sum_j Y_j \, P(Y = Y_j|X = X_i)$ **в дискретном случае,**

$E(Y|X) = \int yf(y|x)dy$ **в непрерывном случае.**

Нормальное распределение

Опр. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 (сокращенно это обозначается $X \sim N(a, \sigma^2)$**),**

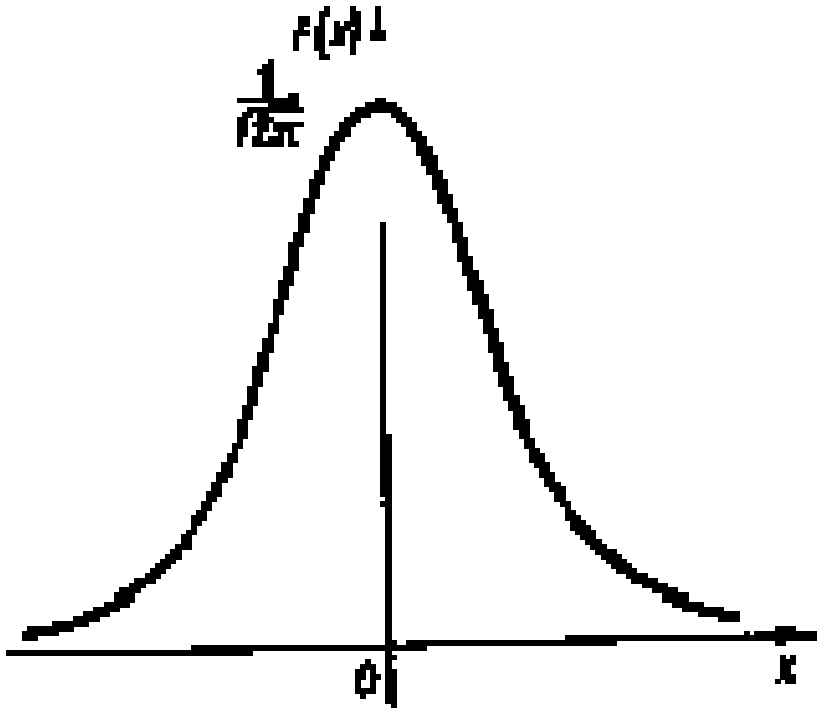
если функция плотности этой случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Нормальное распределение

Опр. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение, если $X \sim N(0,1)$

Функция плотности нормально распределенной случайной величины



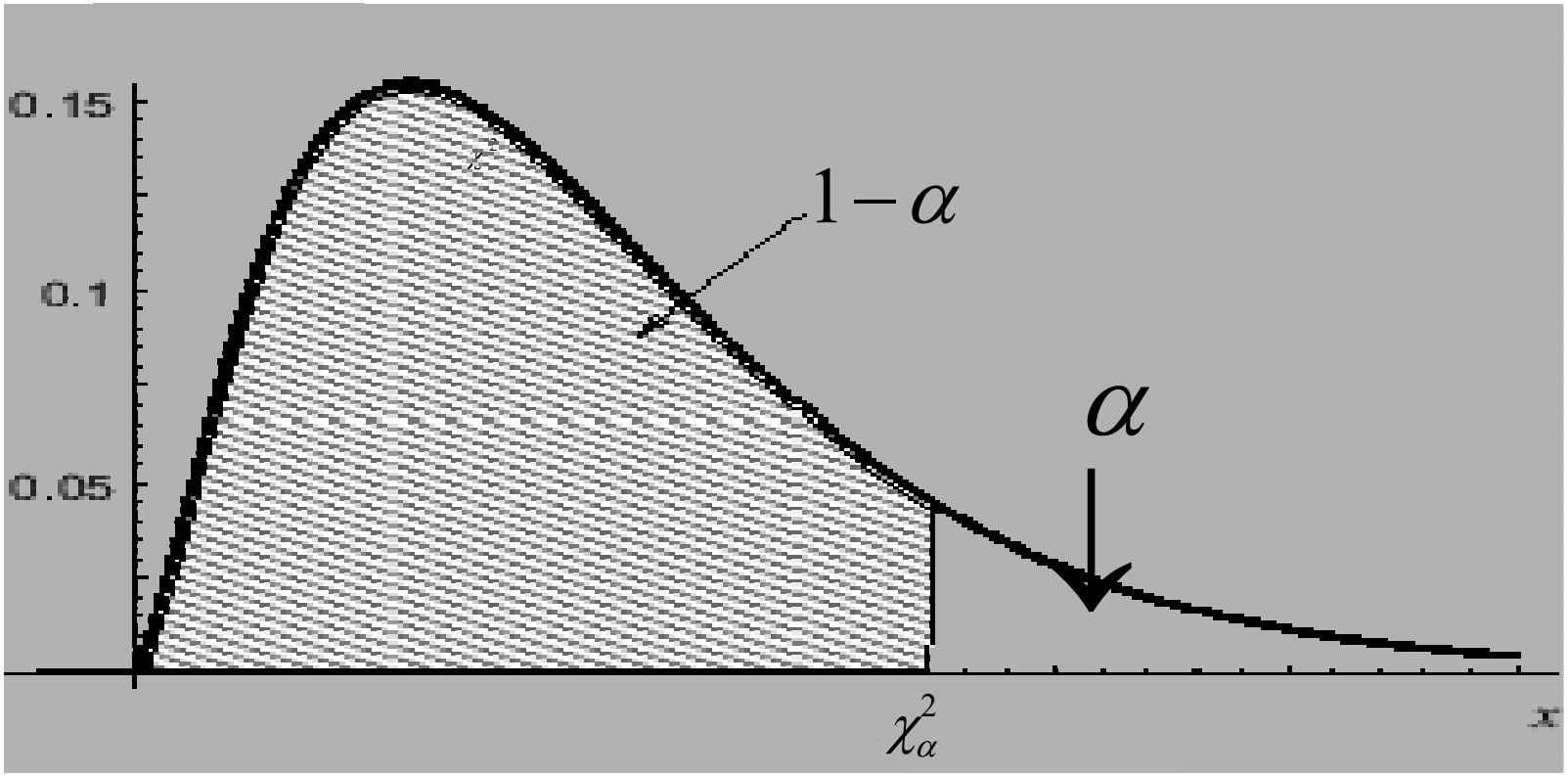
“Хи - квадрат” распределение

Опр. Случайная величина Y имеет “Хи – квадрат” распределение с k степенями свободы (сокращенно $Y \sim \chi^2(k)$ **),**

если $Y = X_1^2 + \ldots + X_k^2$ **,**

где случайные величины X_i – независимые нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Функция плотности распределения “Хи – квадрат”



Таблицы для “Хи – квадрат” распределения

χ^2 (хи-квадрат) распределение:

Критические значения χ^2

Уровень значимости	5%	1%	0.1%
Число степеней свободы			
1	**3.841**	**6.635**	**10.828**
2	**5.991**	**9.210**	**13.816**
3	**7.815**	**11.345**	**16.266**
4	**9.488**	**13.277**	**18.467**
5	**1.070**	**15.086**	**20.515**
6	**12.592**	**16.812**	**22.458**
7	**4.067**	**18.475**	**24.322**
8	**15.507**	**20.090**	**26.124**
9	**16.919**	**21.666**	**27.877**
10	**18.307**	**23.209**	**29.588**

t - распределение

Опр. Случайная величина Z имеет t – распределение с k степенями свободы (сокращенно Z ~ t(k)),

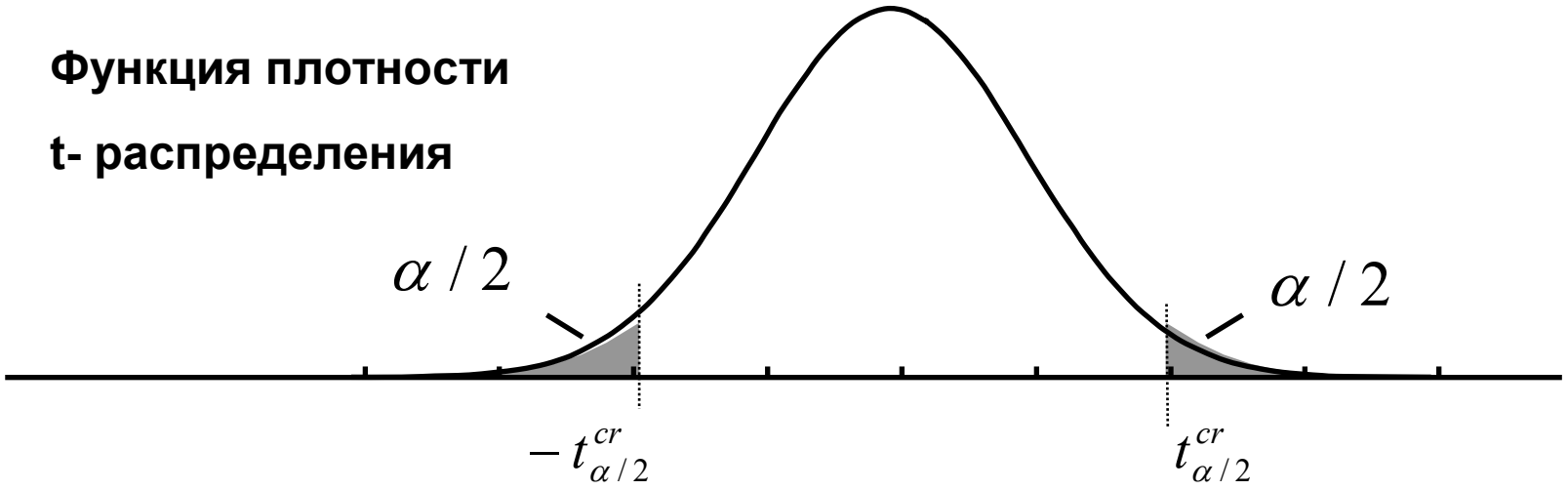
если $$Z = \frac{X}{\sqrt{Y / k}},$$

где X ~ N(0,1), Y имеет “хи – квадрат” распределение с k степенями свободы, X и Y независимы.

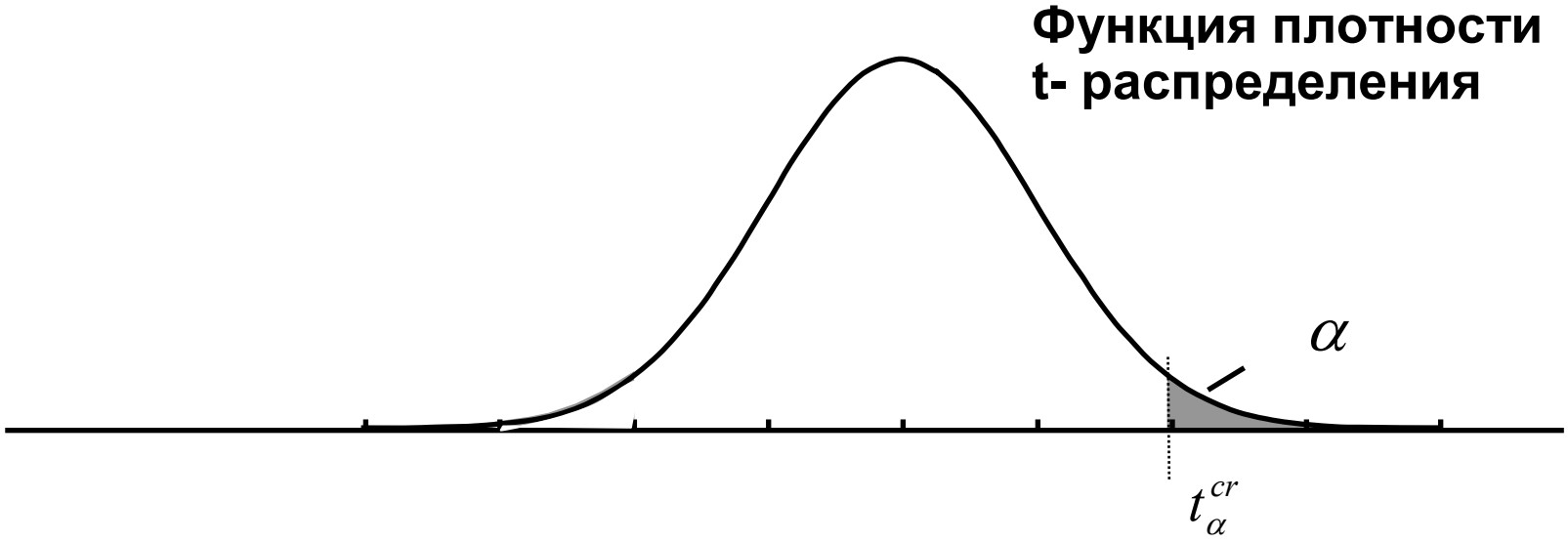
t - распределение: Критические значения *t*

Число степеней свободы	Двусторонний тест	10%	5%	2%	1%	0.2%	0.1%
	Односторонний тест	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%	0.05%
1		6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2		2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.598
3		2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4		2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5		2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	
18		1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19		1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20		1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
…	…	…	…	…	…	…	
…	…	…	…	…	…	…	
120		1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
		1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Функция плотности t - распределения. Двусторонний тест



Функция плотности t - распределения. Односторонний тест



F - распределение

Опр. Случайная величина Z имеет F - распределение со степенями свободы m и n (сокращенно Z ~ F(m, n)),

если $Z = \dfrac{X / m}{Y / n}$ **,**

где случайная величина X имеет распределение “хи– квадрат” с m степенями свободы, случайная величина Y имеет распределение “хи–квадрат” с n степенями свободы, X и Y независимы.

F - распределение

F -распределение: Критические значения F (5% уровень значимости)

v^2 \ v^1	25	30	35	40	50	60	75	100	150	200
1	249.26	250.10	250.69	251.14	251.77	252.20	252.62	253.04	253.46	253.68
2	19.46	19.46	19.47	19.47	19.48	19.48	19.48	19.49	19.49	19.49
3	8.63	8.62	8.60	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.54	8.54
4	5.77	5.75	5.73	5.72	5.70	5.69	5.68	5.66	5.65	5.65
5	4.52	4.50	4.48	4.46	4.44	4.43	4.42	4.41	4.39	4.39
6	3.83	3.81	3.79	3.77	3.75	3.74	3.73	3.71	3.70	3.69
7	3.40	3.38	3.36	3.34	3.32	3.30	3.29	3.27	3.26	3.25
8	3.11	3.08	3.06	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95
9	2.89	2.86	2.84	2.83	2.80	2.79	2.77	2.76	2.74	2.73
10	2.73	2.70	2.68	2.66	2.64	2.62	2.60	2.59	2.57	2.56
11	2.60	2.57	2.55	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46	2.44	2.43
12	2.50	2.47	2.44	2.43	2.40	2.38	2.37	2.35	2.33	2.32

Математическая статистика

Совокупность всех возможных значений случайной величины называется генеральной совокупностью. Подмножество генеральной совокупности называется выборкой.

Основная задача математической статистики – оценивание характеристик генеральной совокупности по выборке.

Обо всей генеральной совокупности мы, как правило, ничего не знаем точно и можем строить лишь догадки - гипотезы. Для проверки своих гипотез мы исследуем независимую выборку из генеральной совокупности и строим на основании выборки выборочные оценки неизвестных теоретических параметров.

Различают точечные и интервальные оценки.

Точечные оценки

Предположим, что мы имеем выборку $X_1,\ldots,X_n$ из распределения, зависящего от параметра θ.

Опр. Точечной оценкой (статистикой) называется любая числовая функция от выборки $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ **.**

Несмещенность, эффективность, состоятельность оценок

Точечные оценки считаются «хорошими», если они обладают определенными свойствами:

- несмещенностью (в этом случае математическое ожидание оценки совпадает с оцениваемым теоретическим параметром);
- состоятельностью (это означает, что для больших выборок вероятность значимых отклонений величины оценки от значения оцениваемого теоретического параметра равна нулю);
- эффективностью (чем меньше дисперсия оценки, тем она считается эффективнее).

Несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии

Предположим, $X_1,\ldots,X_n$ - выборка из генеральной совокупности,

$E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1,\ldots,n$.

Несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии (выборочное среднее и выборочная дисперсия) :

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Несмещенная оценка для ковариации

Для двух выборок $X_1,\ldots,X_n$ и $Y_1,\ldots,Y_n$ несмещенная оценка для ковариации случайных величин X и Y имеет вид:

$$\hat{\mathrm{cov}}(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

Интервальные оценки

При интервальном оценивании конструируются две функции от выборки: $\hat{\theta}_1(X_1,...,X_n)$ *и* $\hat{\theta}_2(X_1,...,X_n)$

такие, что $1-\alpha = P(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$

Этот интервал называется (1 – α)100% доверительным интервалом для параметра θ.

Проверка гипотез

Предположим, что мы имеем выборку $X_1,\ldots,X_n$ из распределения, зависящего от параметра θ.

Относительно параметра θ выдвигаются две гипотезы, основная H_0 и альтернативная H_1, например:

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \neq \theta_0$

Проверка гипотез

Статистическим тестом (или просто тестом) называется процедура, основанная на наблюдениях $X_1,\ldots,X_n$, результатом которой является одно из двух возможных решений:

1) Не отвергать основную гипотезу H_0,
2) Отвергнуть нулевую гипотезу H_0 в пользу альтернативной гипотезы H_1.

При этом можно совершить две ошибки:

1) Ошибка первого рода – отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна,
2) Ошибка второго рода – не отвергнуть нулевую гипотезу, когда она не верна.

Проверка гипотез

Вероятность ошибки первого рода обозначается α и называется уровнем значимости теста,

Вероятность ошибки второго рода обозначается β.

1 – β называется мощностью теста.

Проверка гипотез

На практике для построения тестов часто используют следующий подход. Находят такую статистику $t_n(X_1,\ldots,X_n)$, что если гипотеза H_0 верна, то распределение случайной величины t_n известно. Тогда для заданного уровня значимости α можно найти такую область $К_α$, что $P(t_n Є К_α) = 1 – α$.

Тогда тест проводится следующим образом:

1) На основании наблюдений $X_1,\ldots,X_n$ вычисляется значение статистики t_n.

2) Для заданного уровня значимости α находится область $К_α$.

3) Если $t_n Є К_α$, то нулевая гипотеза не отвергается.

4) В противном случае нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативной.

Проверка гипотез

Статистику t_n называют критической статистикой, а область $К_\alpha$ – критической областью.

На практике критические статистики часто имеют распределение N(0,1), t, «хи – квадрат», F.

В этих случаях для критической статистики легко рассчитать p-value (p-значение) – минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается.