Математический анализ 2019/2020

Группы БПМ191–195

Промежуточный экзамен, модули 1–2

На устном экзамене студент получает два теоретических вопроса и две задачи

Теоретические вопросы оцениваются из 3 баллов, задачи – из 2 баллов

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Расскажите о числах: натуральных, целых, рациональных и иррациональных. Расскажите о модуле и его свойствах. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.

2. Докажите, что любой интервал содержит как рациональные так и иррациональные числа.

3. Расскажите о методе математической индукции. Докажите неравенство Бернулли. Расскажите о биноме Ньютона.

4. Расскажите о понятии множества и отображения. Что такое инъекция, сюръекция и биекция? Что такое обратное отображение? Расскажите о числовых функциях на множествах $D \subset \mathbb{R}$. Приведите примеры.

5. Расскажите об ограниченных множествах вещественных чисел. Дайте два определения верхней и нижней грани множества $D \subset \mathbb{R}$. Сформулируйте теорему о существовании и единственности верхней (нижней) грани. Приведите примеры.

6. Дайте определения функции $y = f(x)$ ограниченной сверху (снизу), ограниченной функции, монотонной функции, суперпозиции функций. Расскажите об обратной функции. Дайте определение графика функции. Приведите примеры.

7. Дайте определение числовой последовательности. Что такое монотонная последовательность? Что такое ограниченная сверху (снизу) последовательность? Что такое ограниченная последовательность? Приведите примеры. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательность $a_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.

8. Дайте определение пределов $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, -\infty, \infty$. Приведите примеры. Докажите теорему о единственности конечного предела последовательности. Сформулируйте (с частичным доказательством) критерий Коши сходимости последовательности.

9. Докажите, что всякая последовательность, имеющая конечный предел, ограничена. Покажите на примере, что обратное неверно. Докажите теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.

10. Определите бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, приведите примеры. Расскажите о связях между такими последовательностями. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность.

11. Докажите, что сумма бесконечно малых последовательностей и произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность. Докажите теорему об арифметических свойствах предела последовательностей.

12. Докажите теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для последовательностей.

13. Докажите существование конечного предела $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

14. Определите окрестности $O(\omega)$ и проколотые окрестности $\dot{O}(\omega)$ для символа $\omega = x_0, +\infty, -\infty, \infty$. Дайте общее определение предела $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \omega_1$ на языке окрестностей. Приведите поясняющие графики для случаев $\omega = \{x_0, +\infty\}$, $\omega_1 = \{a, -\infty\}$.

15. Дайте определение $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \omega_1$ на языке неравенств для случаев $\omega = \{x_0, -\infty\}$, $\omega_1 = \{a, +\infty\}$. Приведите (аналитически) примеры соответствующих функций. Докажите единственность предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

16. Определите односторонние пределы функции в точке. Покажите, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = a$. Приведите примеры.

17. Определите бесконечно малые и бесконечно большие функции, установите связь между ними. Покажите, что произведение финально ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая. Покажите, что сумма и произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая. Что можно сказать про сумму и произведение бесконечно больших функций? Приведите примеры.

18. Докажите, что функция, имеющая конечный предел финально ограничена.

Верно ли обратное? Покажите, что $\lim_{x\to\omega} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to \omega$, где $\omega = \{x_0, \pm\infty\}$.

19. Докажите теорему об арифметических свойствах конечных пределов функций.

20. Докажите, что если $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, то $f(x)>0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Докажите теорему о предельном переходе в неравенствах и сформулируйте теорему "о двух милиционерах" для функций.

21. Сформулируйте теорему о замене переменных при вычислении пределов. Покажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Запишите второй замечательный предел.

22. Дайте определение эквивалентных функций (при $x\to x_0,+\infty,-\infty$). Докажите, что если $a(x)\sim b(x)$ и $c(x)\sim d(x)$, то $a(x)c(x)\sim b(x)d(x)$ и $a(x)/c(x)\sim b(x)/d(x)$. Верно ли, что $a(x)+c(x)\sim b(x)+d(x)$?

23. Дайте определение соотношения $f(x)=o(g(x))$, $x\to\omega$. Покажите, что соотношения $f(x)\sim g(x)$, $x\to\omega$, и $f(x)=g(x)+o(g(x))$, $x\to\omega$, означают одно и тоже. Дайте определение соотношения $f(x)=O(g(x))$, $x\to\omega$. Приведите примеры.

24. Дайте определение функции, непрерывной в точке и на промежутке. Изложите классификацию точек разрыва. Приведите примеры. Дайте определение односторонней непрерывности. Приведите примеры.

25. Докажите теорему о непрерывности суперпозиции (двух) непрерывных функций. Сформулируй теоремы об арифметических свойствах непрерывных функций и о непрерывности обратной функции.

26. Докажите непрерывность функции $y=\cos x$. Покажите, что $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, запишите первый замечательный предел.

27. Определите элементарные функции и установите непрерывность основных элементарных функций (для $y=e^x$ – без доказательства). Выведите отсюда теорему о непрерывности элементарных функций.

28. Выведите из первого и второго замечательных пределов соотношения:

$$\operatorname{tg}x\sim x,\quad 1-\cos x\sim x^2/2,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\ \alpha\in\mathbb{R},$$

при $x\to 0$.

29. Приведите полную таблицу эквивалентностей (с учётом возможной замены переменной). Запишите эти эквивалентности в виде равенств.

30. Расскажите о шкале бесконечностей при $x\to+\infty$. Объясните, как нарисовать набросок графика функции, выделяя главные части в особых точках и на бесконечности. Постройте эскиз графика функции $y=\ln|x+1|+\ln|x+2|+1/x-1/(x+1)^2$.

31. Докажите лемму о вложенных отрезках.

32. Докажите теорему Коши о промежуточном значении. Покажите на примере, что условие этой теоремы является существенным.

33. Изложите метод решения уравнений $f(x)=0$ методом деления отрезка пополам. Приведите оценки точности.

34. Дайте определение подпоследовательности. Докажите лемму Больцано–Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности).

35. Докажите 1-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Покажите на примерах, что все условия этой теоремы являются существенными.

36. Дайте определение верхней (нижней) грани функции на промежутке. Докажите 2-ю теорему Вейерштрасса о максимальном (минимальном) значении непрерывной функции на отрезке. Покажите на примерах, что все условия этой теоремы являются существенными.

37. Дайте определение функции равномерно непрерывной на промежутке. Как связаны непрерывность и равномерная непрерывность? Рассмотрите функцию $1/x$ на $(0,1]$. Сформулируйте теорему Кантора.

38. Исследуйте на равномерную непрерывность функции $y=kx+b\,(x\in\mathbb{R})$ и $y=\sqrt{x}\,(x\in[0,+\infty))$.

39. Дайте определение производной и односторонней производной. Вычислите по определению производные функций: $y=c,\ y=x,\ y=\sin x,\ y=\cos x$.

40. Расскажите о физическом и геометрическом смысле производной функции. Дайте определение касательной к графику функции и выведите её уравнение. Выведите формулу для угла между кривыми. Выведите уравнение нормали.

41. Выведите асимптотическую и приближённую формулу линеаризации. Что такое дифференциал функции? Покажите, что дифференцируемость функции влечёт непрерывность. Верно ли обратное? Приведите пример.

42. Приведите таблицу производных. Выведите формулы для производных функций $y=x^{\alpha},\ y=a^{x},\ y=\log_a x$.

43. Докажите теорему об арифметических свойствах производной. Приведите примеры. Найдите $(\operatorname{tg}x)'$, $(\operatorname{ctg}x)'$.

44. Докажите теорему о производной суперпозиции функций. Приведите примеры. Что такое логарифмическая производная?

45. Докажите теорему о производной обратной функции. Вычислите

$$(\arcsin x)',\quad (\arccos x)',\quad (\operatorname{arc\,tg}x)',\quad (\operatorname{arc\,ctg}x)'.$$

46. Расскажите о старших производных. Приведите формулу Лейбница. Расскажите о

функциях заданных параметрически, выведите формулу для их дифференцирования. Приведите примеры (окружность, гипербола).

47. Дайте определение точки локального экстремума. Докажите теорему Ферма. Дайте определение критической точки. Приведите примеры. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке? Решите эту задачу для функции $y = x^3 - 3x + 2$ на $[-2, 2]$.

48. Докажите теорему Ролля. Объясните ее геометрический смысл. Приведите примеры. Выведите формулу Лагранжа. Объясните ее геометрический смысл.

49. Получите критерий постоянства дифференцируемой функции. Докажите теорему Коши для пары функций.

50. Выведите необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке в терминах её первой производной. Как меняются эти утверждения в случае строгой монотонности?

51. Выведите достаточное условие локального экстремума по первой производной. Выведите достаточное условие локального экстремума по второй производной.

52. Сформулируйте правила Лопиталя, докажите это правило в случае $x \to x_0$ и неопределённости вида $0/0$. Вычислите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

53. Перечислите возможные типы неопределённостей при вычислении пределов. Как они сводятся к неопределённости $0/0$? Расскажите о шкале бесконечностей при $x \to +\infty$, получите соответствующие соотношения с помощью правила Лопиталя.

54. Дайте определение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 и выведите его характеристическое свойство. Получите отсюда формулу бинома Ньютона.

55. Докажите формулу Тейлора–Лагранжа. Выведите из неё формулу Тейлора–Пеано.

56. Охарактеризуйте (с обоснованием) поведение погрешности $r_n(x; x_0)$ формулы Тейлора при $x \to x_0$ и при $n \to \infty$. Вычислите число e с точностью 10^{-3}.

57. Выведите частную формулу Тейлора–Пеано для функций:

$$y = e^x, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x \quad (x_0 = 0).$$

58. Выведите частную формулу Тейлора–Пеано для функций:

$$y = \ln(1 + x), \quad y = (1 + x)^\alpha \quad (x_0 = 0).$$

59. Определите при малых значениях $x \neq 0$ знак функции $f(x) = \ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x - x^2)$.

60. Когда говорят, что функция выпукла вверх (вниз) на интервале? Выведите необходимые и достаточные условия выпуклости вверх (вниз). Приведите примеры.

61. Что такое точка перегиба графика функции? Приведите примеры. Выведите необходимое условие перегиба, покажите на примере, что оно не является достаточным. Выведите достаточное условие перегиба.

62. Дайте определения вертикальной и наклонной асимптот функции. Выведите алгоритм нахождения наклонной асимптоты. Приведите примеры.

63. Расскажите о методе Ньютона решения уравнений $f(x)=0$.

Важные определения и понятия

незнание которых может существенно снизить оценку за экзамен

1. Определения: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, +\infty, -\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a, +\infty, -\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a, +\infty, -\infty$.
2. Непрерывность функции $y = f(x)$.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними.
   Сравнение функций: $f(x) \sim g(x)$ и $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0, \pm\infty$.
4. Таблица эквивалентностей.
5. Производная функции $y = f(x)$. Таблица производных.
6. Определение точки локального экстремума.
7. Формула Тейлора–Лагранжа и Тейлора–Пеано.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1) Исследуйте на монотонность, ограниченность и сходимость **одну** из последовательностей:

$$a_n = \frac{7-2n}{5n+2}, \qquad a_n = 12n - n^2.$$

2) Найдите односторонние пределы и постройте эскиз графика вблизи точки разрыва **для одной** из функций:

$$y = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x}{2x+1}}, \quad y = \operatorname{arcctg}\frac{3x-4}{x+2}, \quad y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2x-7}{3x+1}.$$

3) **Пользуясь формулами эквивалентности**, найдите **один** из пределов:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3^x-9)(3^x-1)}{3\ln(2x-3)}. \quad \lim_{x\to -2}\frac{(\sin x+\sin 2)\operatorname{tg}2x}{\sqrt[4]{x+18}-2}. \quad \lim_{x\to 0}\frac{3+\sqrt[5]{5x-27}}{\cos 2x(\cos x-\cos 5x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+\sqrt[3]{4x-8}}{(3-\cos 2x)\ln(1-3x)}, \quad \lim_{x\to\infty} x^4 \ln\frac{1+2x}{2x}\operatorname{tg}\frac{2}{x}(\cos\frac{3}{x}-1).$$

4) Выделяя главные слагаемые, найдите пределы (**решите одну из задач**):

$$\lim_{x\to 0;\infty}\frac{\ln(2x^4+3x^2)}{\ln(3x^6+x^4)}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(3^{2x}+2^{3x})}{\sqrt{3x^2+\ln|x|}},$$

$$\lim_{x\to 0;\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\ln|x|}{x+\ln(x^2+\sqrt[3]{x})}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3^x+4^x}{2^{2x+1}+e^x}.$$

5) Выделяя главные члены асимптотики, постройте эскиз графика функции вблизи точек разрыва и на бесконечности:

$$f(x)=\ln|x+1|+\ln|x+2|+\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}\ .$$

6) Найдите вторую производную для функции $y=(\ln x)^{\operatorname{tg}2x}$.

7) Найдите (пользуясь любыми методами) **один** из пределов:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right), \quad \lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg}x-1}{\cos 2x\cdot\sin^2 2x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-1)(x\cos x-\sin x)}{(\cos 3x-1)\operatorname{tg}2x}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x^2-x^3)}{3x^2-10\sqrt[5]{x^3}+7}.$$

8) Напишите разложение Тейлора–Пеано **для одной** из функций:

$$xe^x-\ln(1+2x) \ \text{ до } x^3; \qquad \ln^2 x \ \text{ до } (x-1)^3; \qquad \ln\frac{1+x}{1-2x} \ \text{ до } x^3;$$

$$x\cos x-\sin x \ \text{ до } x^3; \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x}} \ \text{ до } x^3.$$

9) Исследуйте по двум первым производным и постройте график **одной** из функций:

$$y=\frac{1}{4}(x^4-6x^2+5), \qquad y=x^2+\frac{2}{x}, \qquad y=2\sqrt{x}-3\ln x.$$