



NATIONAL RESEARCH  
UNIVERSITY

# Лекция по эконометрике №1, 3 модуль

## Обобщенный метод наименьших квадратов

Демидова

Ольга Анатольевна

[https://www.hse.ru/staff/demidova\\_olga](https://www.hse.ru/staff/demidova_olga)

E-mail: [demidova@hse.ru](mailto:demidova@hse.ru)

14.01.2020



## План лекции

- 1) **Обобщенный МНК при известной ковариационной матрице ошибок регрессии**
- 2) **Достижимый обобщенный МНК**
- 3) **Гетероскедастичность – частный случай, когда можно применить ОМНК**
- 4) **Взвешенный МНК**
- 5) **Стандартные ошибки в форме Уайта**
- 6) **Пример**

$$Y = X\beta + \varepsilon, \text{var}[\varepsilon] = \Omega \neq \sigma_\varepsilon^2 I,$$

$$1) \hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

$E(\hat{\beta}_{OLS}) = \beta \Rightarrow \hat{\beta}_{OLS}$  – несмещенные оценки.

$$2) \text{var}(\hat{\beta}_{OLS}) = \text{var}[(X'X)^{-1} X'Y] =$$

$$= (X'X)^{-1} X' \text{var}(Y) X (X'X)^{-1} =$$

$$= (X'X)^{-1} X' \Omega X (X'X)^{-1} \neq \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t, F$  вычислены некорректно.

$$Y = X\beta + \varepsilon, \text{var}[\varepsilon] = \Omega \neq \sigma_\varepsilon^2 I, \Omega$$

$$\Omega' = \Omega \Rightarrow \Omega = U\Lambda U',$$

$$\Omega^{-1/2} = U\Lambda^{-1/2}U'.$$

If  $\Omega$  известна,

$$Y^* = \Omega^{-1/2}Y, \quad X^* = \Omega^{-1/2}X,$$

$$Y^* = X^*\beta^* + \varepsilon^*, \quad \varepsilon^* = \Omega^{-1/2}\varepsilon,$$

$$\text{var}[\varepsilon^*] = \text{var}[\Omega^{-1/2}\varepsilon] = \Omega^{-1/2} \text{var}[\varepsilon]\Omega^{-1/2} = I.$$

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon, \text{ var}[\varepsilon] = \Omega \neq \sigma_\varepsilon^2 I, \Omega \\ Y^* &= X^* \beta^* + \varepsilon^*, \varepsilon^* = \Omega^{-1/2} \varepsilon, \\ \hat{\beta}^* &= (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^* = \\ &= (X' \Omega^{-1/2} \Omega^{-1/2} X)^{-1} X' \Omega^{-1/2} \Omega^{-1/2} Y = \\ &= (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y, \\ \hat{\beta}_{GLS} &= (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y. \end{aligned}$$

Оценки обобщенного МНК (GLS) являются эффективными.

Но обычно  $\Omega$  неизвестна.

На практике чаще применяют достижимый ОМНК (feasible GLS), когда вместо параметров используются их оценки.

$$\hat{\beta}_{FGLS} = (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} Y.$$

Гетероскедастичность – частный случай, когда можно применить ОМНК.

$\Omega$  является диагональной матрицей.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Y_i^* = \frac{Y_i}{\sigma_i}, 1_i^* = \frac{1}{\sigma_i}, X_{2i}^* = \frac{X_{2i}}{\sigma_i}, \dots, X_{ki}^* = \frac{X_{ki}}{\sigma_i}, i = 1, \dots, n.$$

$$Y_i^* = \beta_1^* 1_i^* + \beta_2^* X_{2i}^* + \dots + \beta_k^* X_{ki}^* + \varepsilon_i^*,$$

$$\text{var}(\varepsilon_i^*) = 1$$

$$\sigma_i = \lambda Z_i$$

На практике обычно мы не знаем  $\sigma_i$  для каждого наблюдения. Однако иногда бывает известно, что они пропорциональны некоторому регрессору,  $Z_i$ .

$$\frac{Y_i}{Z_i} = \beta_1 \frac{1}{Z_i} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{Z_i} + \dots + \beta_k \frac{X_{ki}}{Z_i} + \frac{\varepsilon_i}{Z_i}$$

$$\text{variance of } \left\{ \frac{\varepsilon_i}{Z_i} \right\} = \frac{1}{Z_i^2} \sigma_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 / \lambda^2} = \lambda^2$$

Тогда корректировка данных позволяет избавиться от гетероскедастичности.



**Тесты, с помощью которых выявляется гетероскедастичность (были рассказаны на предыдущей лекции):**

- **Goldfeld–Quandt test**
- **Glejser test**
- **White test**
- **Breusch-Pagan test**

**Часто используют оценки параметров  $\sigma_i$ , полученных из тестов Глейзера или Уайта.**

Если имеет место гетероскедастичность,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{GLS} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y =$$

$$= \left( X' \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix} X \right)^{-1} \cdot \left( X' \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix} Y \right) =$$
$$= \hat{\beta}_{WLS}$$

**Это оценка взвешенного метода наименьших квадратов.**

## Оценки стандартных ошибок в форме Уайта

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\beta}_{OLS}) &= \text{var}[(X'X)^{-1}X'Y] = \\ &= (X'X)^{-1}X'\text{var}(Y)X(X'X)^{-1} = \\ &= (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1},\end{aligned}$$

$\Omega$  – диагональная матрица,

$$X'\Omega X = \sum_{s=1}^n \sigma_s^2 x_s x_s',$$

$x_s'$   $i$  –  $s$  – ая строка матрицы  $X$ .

*White, 1980 :*

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{OLS}) = n(X'X)^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e_s^2 x_s x_s' \right) (X'X)^{-1},$$

*is a consistent estimator .*

*White standard errors .*

*Newey, West, 1987*

$$\Omega = (\omega_{ij}), \omega_{ij} = 0, |i - j| > L.$$

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{OLS}) = n(X'X)^{-1} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e_s^2 x_s x_s' + \\ + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L \sum_{t=j+1}^n \omega_j e_t e_{t-s} (x_t x_{t-s}' + x_{t-j} x_t') \end{array} \right) (X'X)^{-1},$$

*is a consistent estimator.*

*Newey–West standard errors.*



# Пример удачного применения теоретических знаний о гетероскедастичности

**История, произошедшая на Нью-Йорской фондовой бирже**

**Securities and Exchange Commission vs Antitrust division of the US Department of Justice**

**Биржевой комитет: Комиссионные брокерам не являются объектом соглашения между брокерами и клиентами, а устанавливаются биржевым комитетом**

**Подразделение министерства юстиции: Цены комиссионных д.б. либерализованы**

## Пример удачного применения теоретических знаний о гетероскедастичности

История, произошедшая на Нью-Йорской фондовой бирже

Биржевой комитет:

$$\hat{Y}_{t=\text{отношение}} = 476000 + 31.348X - 1.083 \times 10^{-6} X^2$$

(2.98)                      (40.39)                      (-6.54)

где  $Y$  – доход брокерских компаний,  $X$  – количество акций в сделке.

Вывод: естественная монополия, не надо либерализовывать цены.



## Пример удачного применения теоретических знаний о гетероскедастичности

Подразделение министерства юстиции :

Дисперсия ошибок зависит от объема сделки. Надо поделить все переменные на  $\sqrt{X}$  . Новое оцененное уравнение:

$$\hat{Y}_{t=\text{отношение}} = 342000 + 25.77X + 4.34 \times 10^{-6} X^2$$

(32.3)                      (7.07)                      (0.503)

**Вывод:** это не естественная монополия, надо либерализовать цены.



NATIONAL RESEARCH  
UNIVERSITY

# Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000  
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931  
[www.hse.ru](http://www.hse.ru)