NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Лекция по эконометрике №2, 3 модуль

Метод максимального правдоподобия

Демидова Ольга Анатольевна

https://www.hse.ru/staff/demidova_olga

E-mail:demidova@hse.ru

21.01.2020

Метод максимального правдоподобия

Основное предположение:

Известен закон распределения случайных величин, зависящий от набора параметров.

Оценки этих параметров подбираются таким образом, чтобы вероятность получить имеющийся набор данных была максимальной.

$$L(\theta) = L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid \theta) \to \max$$

Метод максимального правдоподобия

Пример 1. Найти оценку максимального правдоподобия параметра пуассоновского распределения по выборке

Решение:

$$L(\lambda) = L(x_1,...,x_n \mid \lambda) = P(X_1 = x_1 \mid \lambda)\cdot\ldots\cdot P(X_n = x_n \mid \lambda) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot\ldots\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{x_1!\ldots x_n!}$$

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\lambda - \ln(x_1!\ldots x_n!)$$

Метод максимального правдоподобия

Необходимое условие первого порядка:

$$l'_\lambda(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

Достаточное условие:

$$l''_\lambda(\lambda) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0$$

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \overline{X}$$

Пример 2. Найти оценку максимального правдоподобия математического ожидания μ и дисперсии σ^2 по выборке $x_1,\dots,x_n$

Решение:

$$L(\mu,\sigma^2)=L(x_1,\dots,x_n\,|\,\mu,\sigma^2)=f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n\,|\,\mu,\sigma^2)=f_{X_1}(x_1\,|\,\mu,\sigma^2)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n\,|\,\mu,\sigma^2)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$l(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Пример 2. Необходимое условие первого порядка:

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_{ML} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$$

Достаточные условия:

$$H(\hat{\mu}_{ML}, \hat{\sigma}^2_{ML}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{\hat{\sigma}^2_{ML}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n}{2(\hat{\sigma}^2_{ML})^2} \end{pmatrix}$$

Метод максимального правдоподобия для регрессионных моделей

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n)$$

$$L(\beta, \sigma^2) = f(\varepsilon \mid \beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\varepsilon'\varepsilon\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\sigma^2\right)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta)\right\}$$

$$l(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$l(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta)$$

Метод максимального правдоподобия для регрессионных моделей

Необходимые условия первого порядка:

$$\frac{\partial l(\beta,\sigma^2)}{\partial \beta'} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'Y + 2X'X\beta) = 0$$

$$\frac{\partial l(\beta,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n}, \qquad e = Y - X\hat{\beta}$$

Достаточные условия:

(см. Магнус и др., 2007, 10.5)

$\hat{\theta}_{МП}$

Общие свойства оценок МП

1) Инвариантность.

Если $\hat{\theta}_{МП}$ - оценка максимального правдоподобия параметра θ и $g(.)$ - непрерывная функция, то $g(\hat{\theta})$ является оценкой максимального правдоподобия параметра $g(\theta)$.

2) Состоятельность (определение состоятельной оценки дано в разделе 2.3.1).

3) Асимптотическая нормальность.

При $n \to \infty$ оценка вектора параметров имеет нормальное распределение

$$\hat{\theta}_{МП} \overset{a}{\sim} N(\theta, I^{-1}(\theta)),$$

Где $I(\theta)$ - информационная матрица Фишера, вычисляемая по формуле

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\theta'}\right],$$ l – функция правдоподобия, $\frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\theta'}$ - матрица Гессе.

4) Асимптотическая эффективность.

Оценка ММП дисперсии каждого параметра (один из диагональных элементов ковариационной матрицы $I^{-1}(\theta)$) является нижней границей для всех состоятельных асимптотически нормальных оценок этого параметра.

Проверка линейных гипотез с помощью теста Вальда

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$$

$$H_0 : R\theta = q, \quad rankR = r,$$

$$Wald \quad test:$$

$$(\hat{\theta} - \theta) \to N(0, V) \Rightarrow$$

$$(R\hat{\theta} - R\theta) \to N(0, RVR')$$

$$W = (R\hat{\theta} - q)'[R\hat{V}R']^{-1}(R\hat{\theta} - q) \sim \chi^2(r)$$

Проверка гипотез с помощью теста отношения правдоподобия

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$$

$$H_0 : R\theta = q, \quad rank R = r,$$

The likelihood ratio test:

$\hat{\theta}$ *is the unrestricted ML estimator,*

$\tilde{\theta}$ *is the constrained ML estimator.*

$$LR = 2[\ln L(\hat{\theta}) - \ln L(\tilde{\theta})] \sim \chi^2(r)$$

Проверка гипотез с помощью теста множителей Лагранжа

Lagrange multiplier test (score test).

$$s_1 = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \ldots, s_k = \frac{\partial L}{\partial \theta_k},$$

$$\tilde{L}(\theta, \lambda) = \ln L(\theta) - \lambda(R\theta - q) \to \max,$$

$$\frac{\partial \tilde{L}(\theta, \lambda)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial l\,n\, L(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial(\lambda R\theta)}{\partial \theta_i} = 0,$$

$$i = 1, \ldots, k, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$$

Проверка гипотез с помощью теста множителей Лагранжа

$$H_0 \Rightarrow \lambda_i \approx 0, \quad i = 1, \ldots, J, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_J)'.$$

$$LM \;\square\; \lambda ' W^{-1} \lambda \;\square\; \chi^2 (J),$$

$$or \quad \frac{\partial \ln L(\hat{\theta}_R)}{\partial \hat{\theta}_R} \approx 0,$$

$$LM = \left(\frac{\partial \ln L(\hat{\theta}_R)}{\partial \hat{\theta}_R} \right)' [I(\hat{\theta}_R)]^{-1} \left(\frac{\partial \ln L(\hat{\theta}_R)}{\partial \hat{\theta}_R} \right)$$

Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931
www.hse.ru