Метод максимального правдоподобия

Задачник Борзых Д. И Демешева Б.

Метод максимального правдоподобия

Пусть

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — реализация данной случайной выборки

$f_{X_i}(x_i, \theta)$ — плотность распределения случайной величины X_i, $i = 1, \ldots, n$

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta)$ — функция правдоподобия

$\ell(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия

Пусть требуется протестировать систему (нелинейных) ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0 : \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \ldots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i-ое ограничение на вектор параметров θ, $i = 1, \ldots, r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial \theta' \\ \partial g_2/\partial \theta' \\ \vdots \\ \partial g_r/\partial \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1'}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2'}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial g_r'}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta'}\right) = -\mathbb{E}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_k} \end{pmatrix}$ — информационная матрица Фишера

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений

$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений

$\hat{\theta}_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_{UR}

$\hat{\theta}_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_R

Тогда для тестирования гипотезы H_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик.

$LR := -2(\ell(\hat{\theta}_R) - \ell(\hat{\theta}_{UR})) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика отношения правдоподобия

$W := g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика Вальда

$LM := \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика множителей Лагранжа