NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Лекция по эконометрике №3, 4 модуль

Автокорреляция

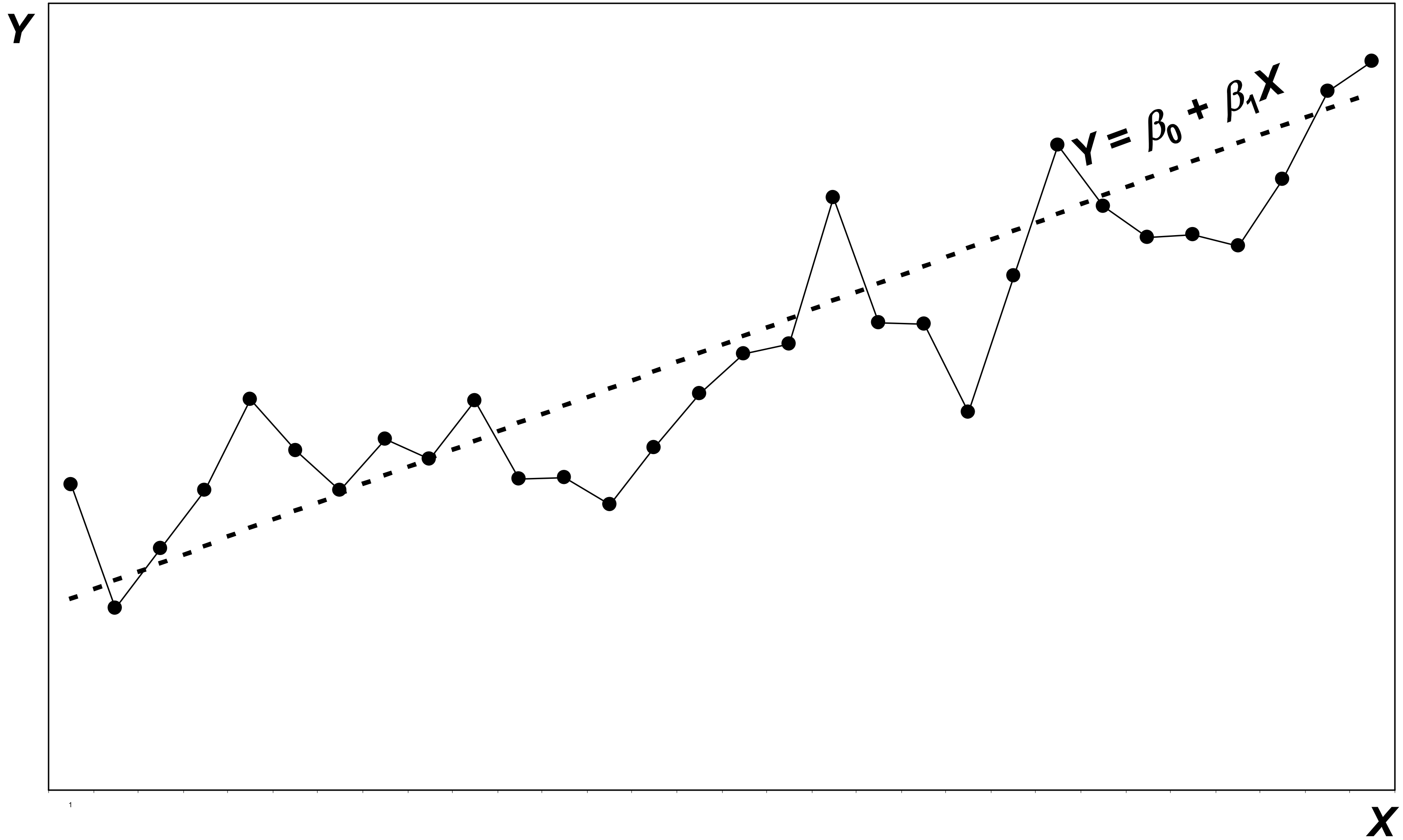
Демидова
Ольга Анатольевна
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru

18.04.2020

План лекции

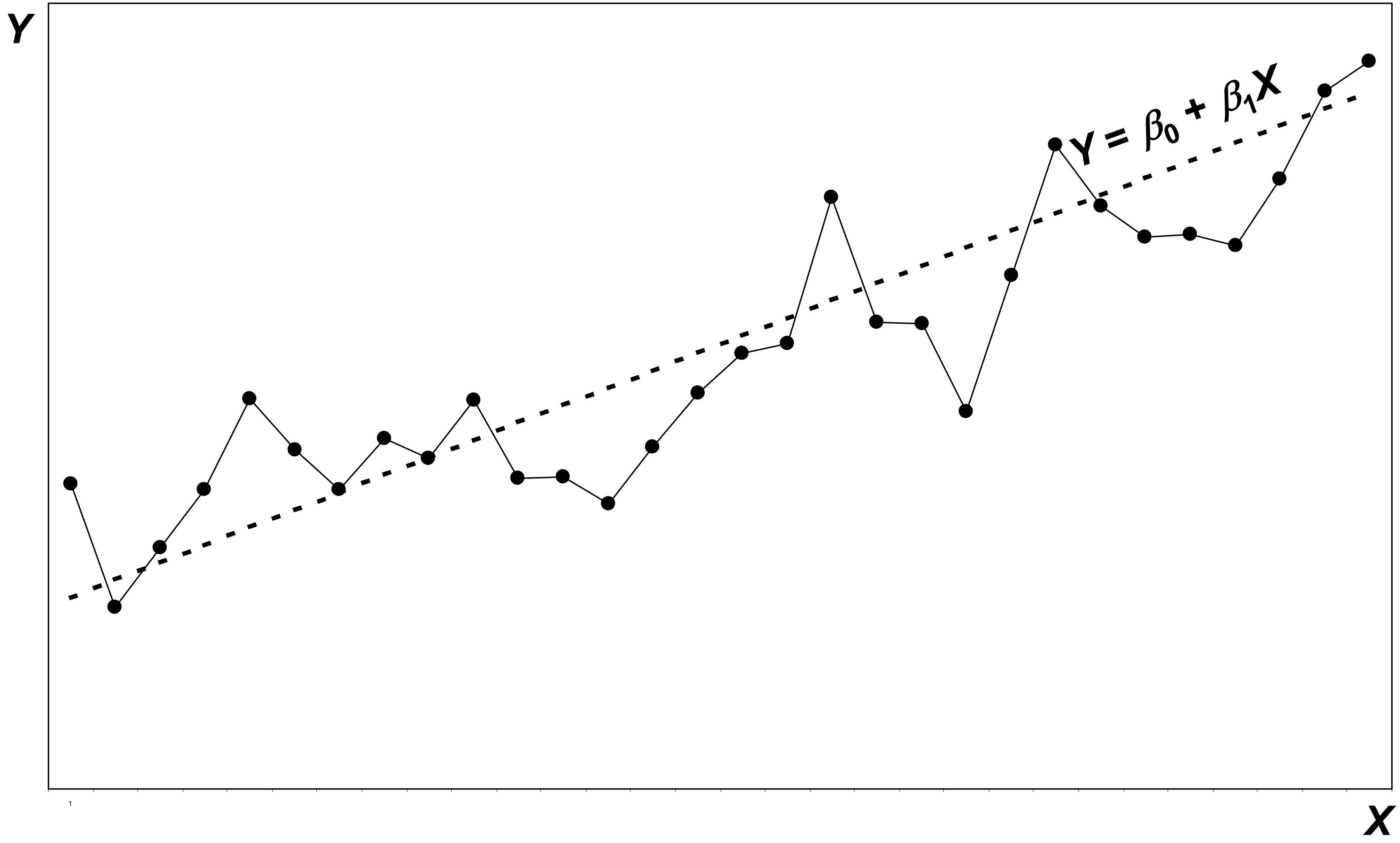
1) Понятие об автокорреляции случайной составляющей
2) Тесты для выявления автокорреляции
3) Тест серий
4) Тест Дарбина – Уотсона
5) Что делать при наличии автокорреляции случайной составляющей?
6) Оценка параметра автокорреляции
7) Проверка автокорреляции в динамических моделях
8) Выявление автокорреляции более высокого порядка
9) Робастные стандартные ошибки в форме Ньюи-Веста (Newey-West)

Автокорреляция



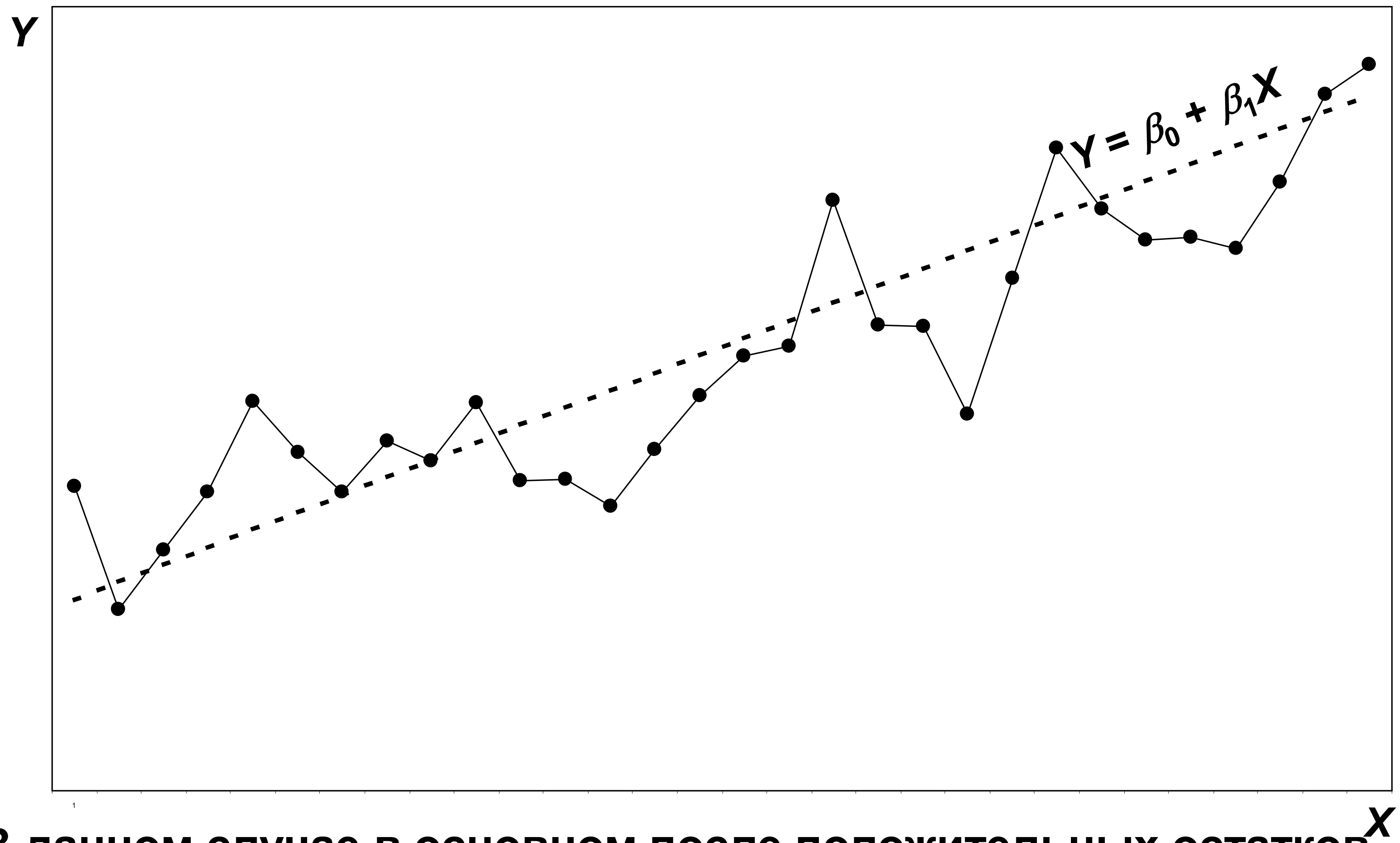
Автокорреляция – явление, встречающееся в основном для временных рядов.

Автокорреляция



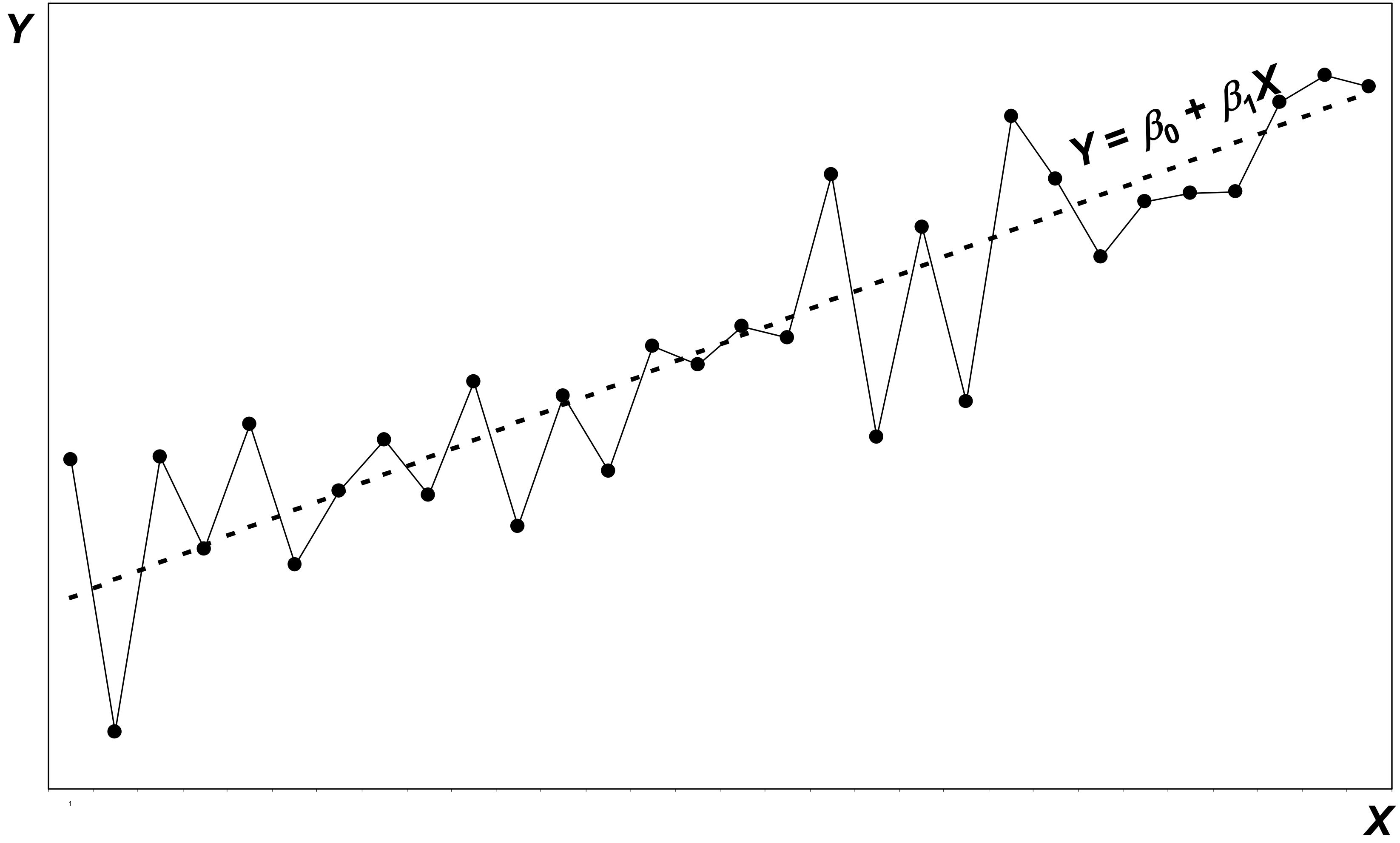
При автокорреляции нарушается условие теоремы Гаусса – Маркова о некоррелированности возмущений для различных моментов времени.

Автокорреляция



В данном случае в основном после положительных остатков вновь следуют положительные, а после отрицательных вновь следуют отрицательные. Смена знаков остатков происходит редко. Это пример положительной автокорреляции.

Автокорреляция



В данном случае после положительных остатков чаще всего следуют отрицательные и наоборот. Это пример отрицательной автокорреляции.

Автокорреляция

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

AR(1): $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

где u_t ~ i.i.d. (некоррелированные при различных t = 1,…,T, одинаково распределенные случайные величины)

$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t, \quad |\rho| < 1$ **- марковская схема**

Говорят, что возмущения удовлетворяют авторегрессионной схеме первого порядка (сокращенно AR(1)), если они удовлетворяют вышеуказанному соотношению.

Авторегрессия – зависимость от собственных предыдущих значений.

Автокорреляция

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

Автокорреляция первого порядка: AR(1)

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

Автокорреляция пятого порядка: AR(5)

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + \rho_4\varepsilon_{t-4} + \rho_5\varepsilon_{t-5} + u_t$$

Пример

```
============================================================
Dependent Variable: LGHOUS
Method: Least Squares
Sample: 1959 2003
Included observations: 45
============================================================
     Variable      Coefficient Std. Error t-Statistic  Prob.
============================================================
        C            0.005625   0.167903   0.033501   0.9734
      LGDPI          1.031918   0.006649   155.1976   0.0000
     LGPRHOUS       -0.483421   0.041780  -11.57056   0.0000
============================================================
R-squared            0.998583    Mean dependent var 6.359334
Adjusted R-squared   0.998515    S.D. dependent var 0.437527
S.E. of regression   0.016859    Akaike info criter-5.263574
Sum squared resid    0.011937    Schwarz criterion -5.143130
Log likelihood       121.4304    F-statistic        14797.05
Durbin-Watson stat   0.633113    Prob(F-statistic)  0.000000
============================================================
```

Оценена линейная в логарифмах зависимость расходов на жилье от располагаемого дохода и цен.

Пример

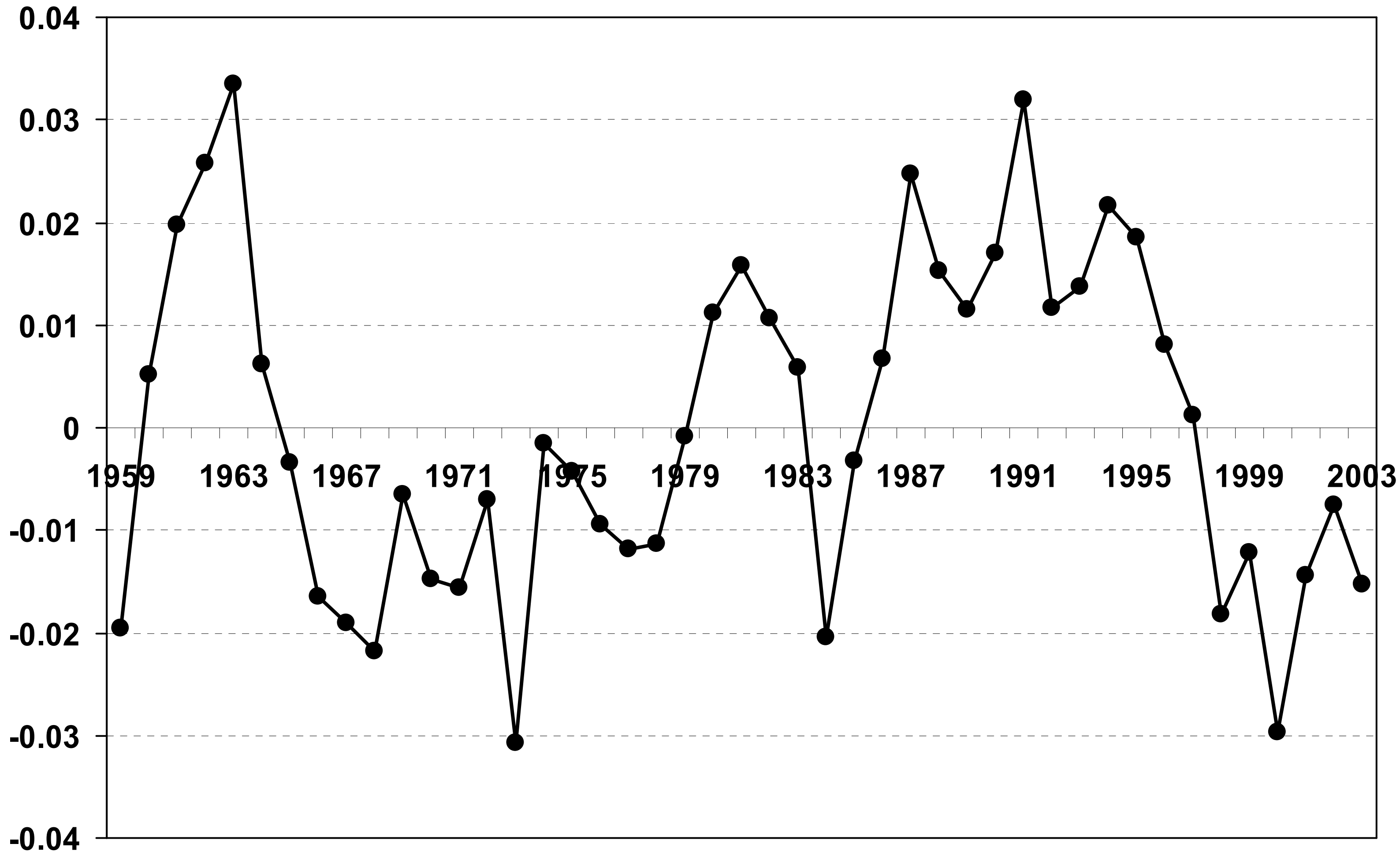


График остатков регрессии позволяет заподозрить наличие положительной автокорреляции.

Причины автокорреляции

1) Инертность экономических показателей

2) Ошибки спецификации модели, заключающиеся в невключении в модель существенных переменных

3) The Cobweb effect (паутинообразный эффект)

4) «Манипулирование данными». Сглаживание данных.

Последствия автокорреляции

1) Хотя оценки МНК коэффициентов регрессии останутся несмещенными, они уж не будут эффективными
2) Оценки МНК для стандартных отклонений коэффициентов регрессии будут смещенными, чаще всего вниз, т.е будут заниженными.
3) Статистики t и F будут неадекватными. Следствием заниженности оценок стандартных отклонений коэффициентов является завышенность t – статистик.

Выявление автокорреляции

Способы выявления автокорреляции первого порядка

1) **Визуальный**

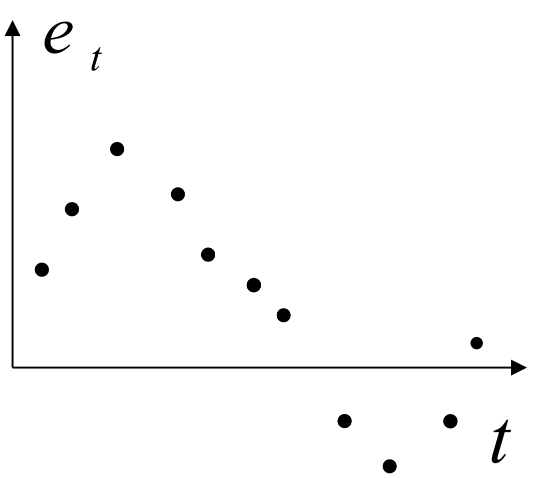
2) **С использованием теста серий**

3) **С использованием статистики Дарбина - Уотсона**

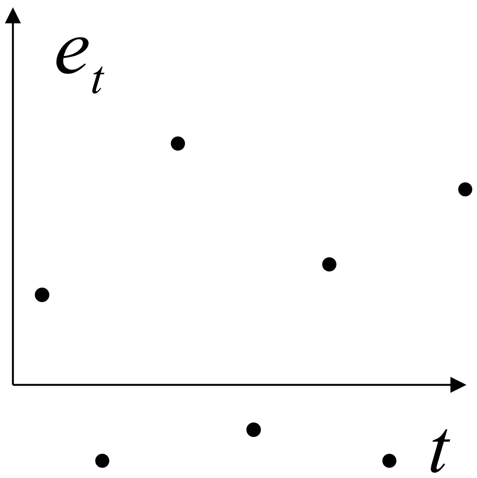
Визуальный способ выявления автокорреляции

Способы выявления автокорреляции первого порядка

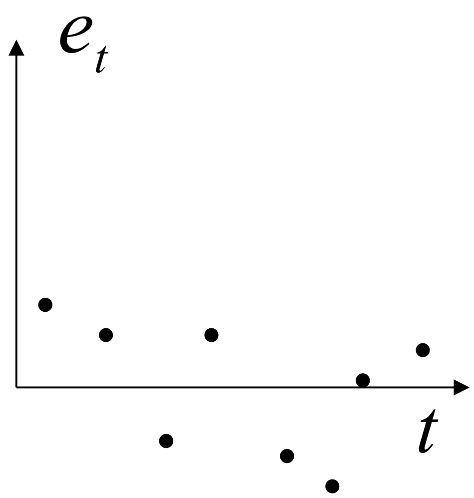
Оцениваем коэффициенты уравнения регрессии с помощью МНК и сохраняем остатки e_t, $t = 1,\ldots,T$.



положительная автокорреляция



отрицательная автокорреляция

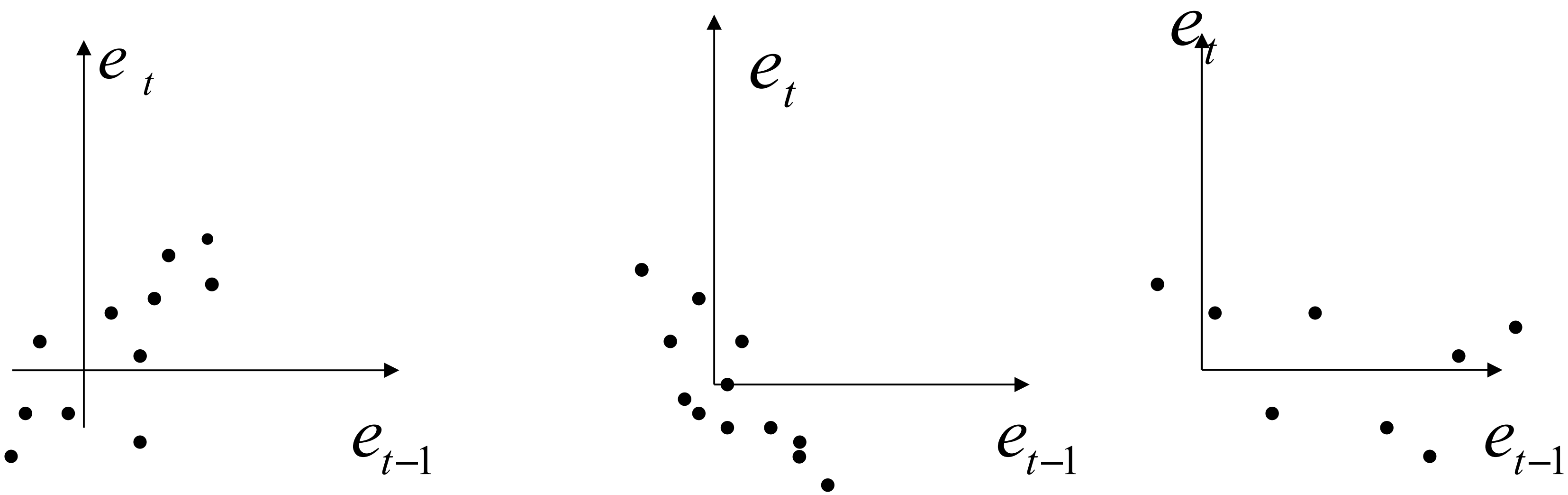


нет автокорреляции

Визуальный способ выявления автокорреляции

Способы выявления автокорреляции первого порядка

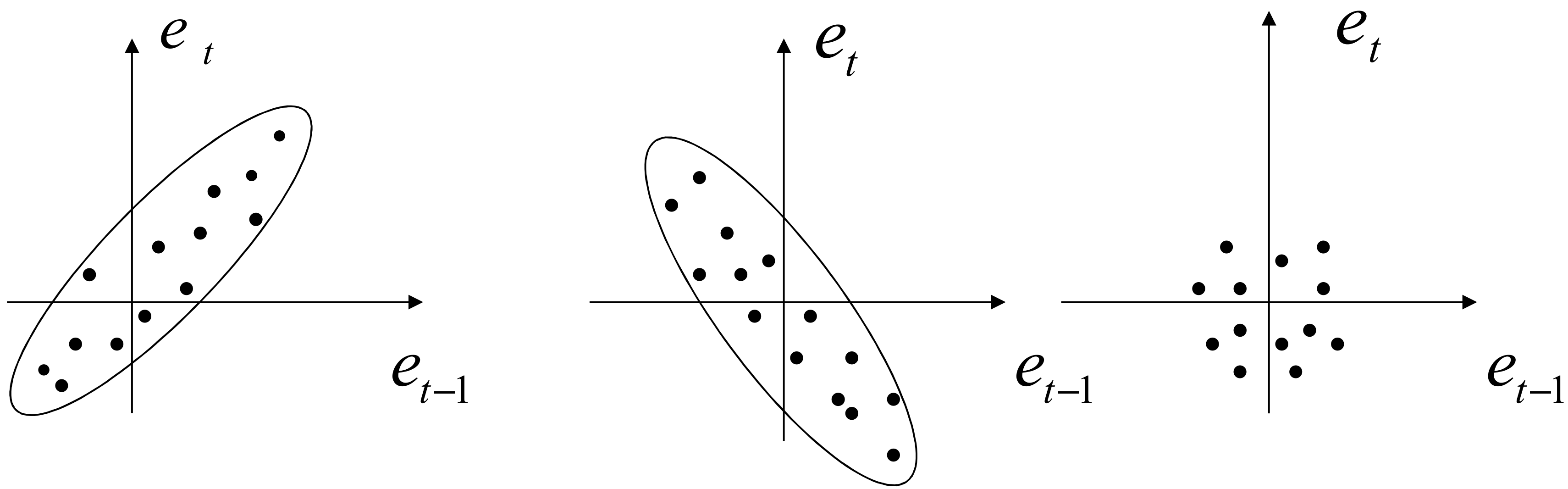
Оцениваем коэффициенты уравнения регрессии с помощью МНК и сохраняем остатки e_t, $t = 1,\ldots,T$.



положительная автокорреляция **отрицательная автокорреляция** **нет автокорреляции**

Визуальный способ выявления автокорреляции

положительная автокорреляция | **отрицательная автокорреляция** | **нет автокорреляции**



Тест серий

Серия остатков – набор последовательных остатков одного знака.

Если в графике остатков есть длинные серии положительных остатков или длинные серии отрицательных остатков, т.е. число серий мало, то имеет место положительная автокорреляция.

Если в графике остатков знаки остатков часто меняются, т.е. число серий велико, то имеет место отрицательная автокорреляция.

Формальное описание теста серий

H_0: автокорреляции нет ($\rho = 0$)

H_1: имеет место автокорреляция первого порядка

1) Оцениваются параметры уравнения регрессии. Сохраняются остатки.
2) Отмечаем знаки остатков, их абсолютные значения нас не интересуют.
3) n – число наблюдений (и всех знаков)
4) N_1 – число знаков «+»
5) N_2 – число знаков «-»
6) K – число серий
7) Таблица при уровне значимости 0.05

	N_2	
N_1	K_{min}, K_{max}	

Формальное описание теста серий

8) Если $K \le K_{min}$, то имеет место положительная автокорреляция

9) Если $K \ge K_{max}$, то имеет место отрицательная автокорреляция

Пример

Знаки остатков:

\+ + + + + + + - + + + - - - - - - + + + +

$N_1 = 14$, $N_2 = 6$, $K = 5$

В таблице $K_{min} = 5$, $K_{max} = 15$

$K \leq K_{min}$ => имеет место положительная автокорреляция.

Тест серий

В таблице N_1, $N_2 \le 20$, т.е. $n \le 40$.

При больших n распределение количества серий k близко к нормальному

$$k \sim N\left(\frac{2N_1N_2}{N_1+N_2}+1;\quad \frac{2N_1N_2(2N_1N_2-N_1-N_2)}{(N_1+N_2)^2(N_1+N_2-1)}\right)$$

Можно построить, например, 95 % доверительный интервал для k.

Если значение тестовой статистики k попадает в этот доверительный интервал, то гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции не отвергается.

Статистика Дарбина - Уотсона

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

Формула для вычисления статистики Дарбина – Уотсона d по остаткам регрессии.

Статистика Дарбина - Уотсона

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

где ρ – параметр в Марковской схеме :

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

Статистика Дарбина - Уотсона

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{T} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} - \frac{2\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

Для больших выборок $\boldsymbol{d \to 2 - 2\rho}$

Нет автокорреляции (ρ ≈ 0) $\boldsymbol{d \to 2}$

Положительная автокорреляция (ρ ≈ 1) $\boldsymbol{d \to 0}$

Отрицательная автокорреляция (ρ ≈ -1) $\boldsymbol{d \to 4}$

Соответствие между значениями ρ и d.

Статистика Дарбина - Уотсона

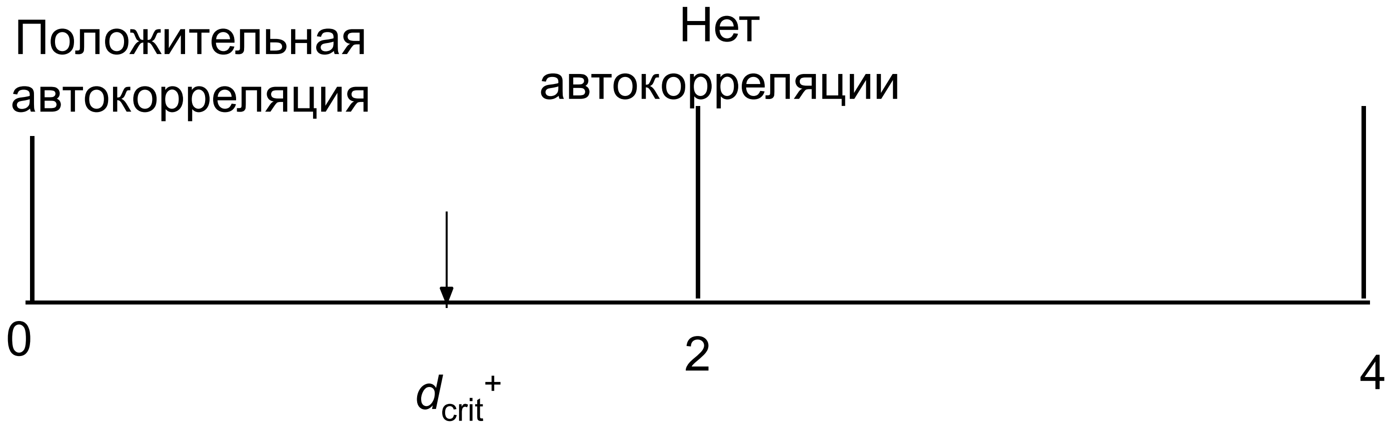
Нет автокорреляции $d \to 2$

Положительная автокорреляция $d \to 0$

Отрицательная автокорреляция $d \to 4$

Соответствие между значениями статистики Дарбина – Уотсона и автокорреляцией.

Проверка гипотезы о наличии положительной автокорреляции первого порядка



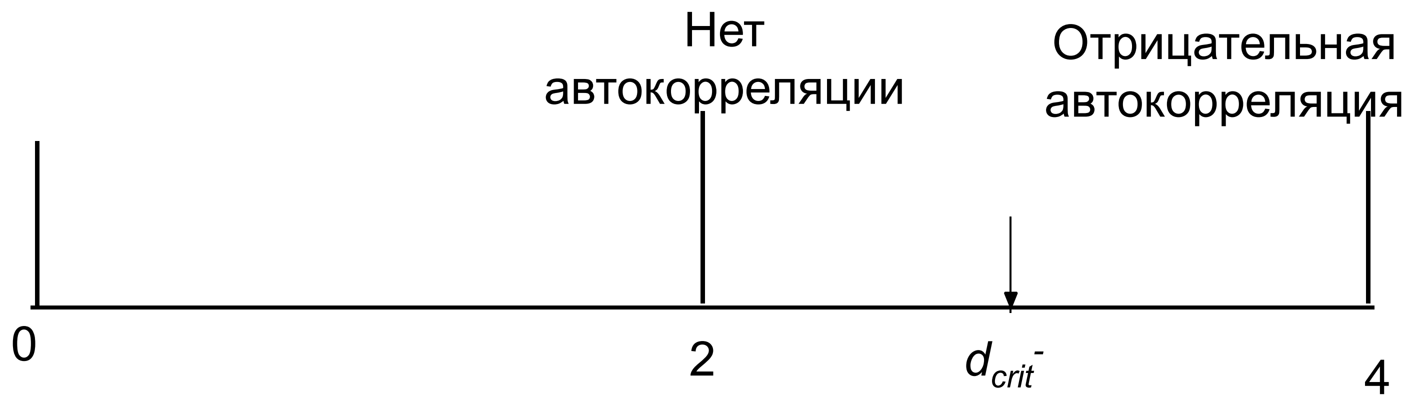
H_0: $\rho = 0$ (нет автокорреляции)

H_1: $\rho > 0$ (положительная автокорреляция)

Тестовая статистика d

Правило: если $d < d_{cr}^{+}$, то H_0 отвергается.

Проверка гипотезы о наличии отрицательной автокорреляции первого порядка



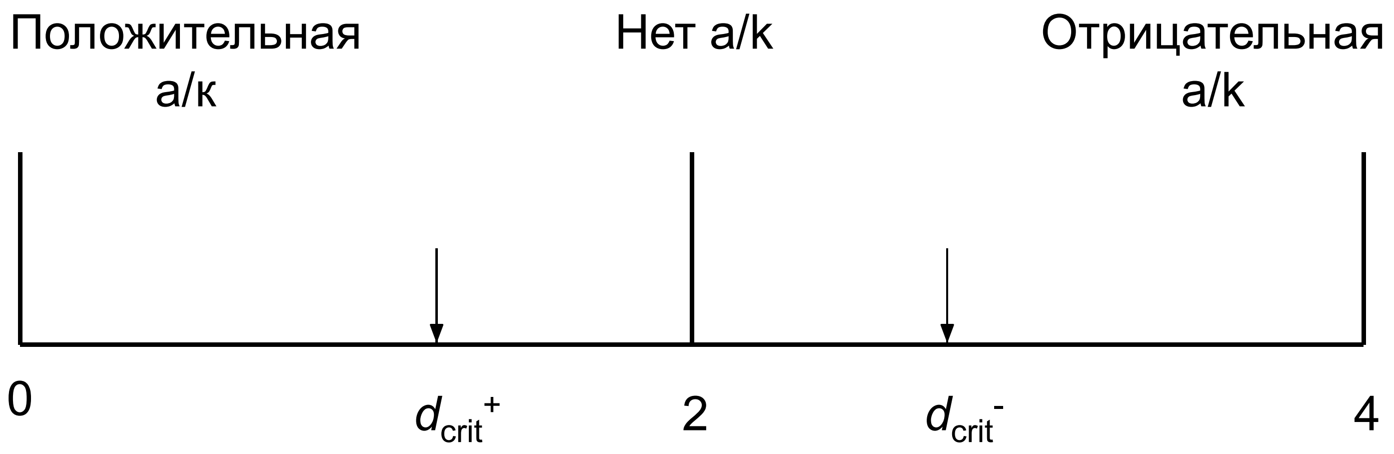
H_0: ρ = 0 (нет автокорреляции)

H_1: ρ < 0 (отрицательная автокорреляция)

Тестовая статистика d

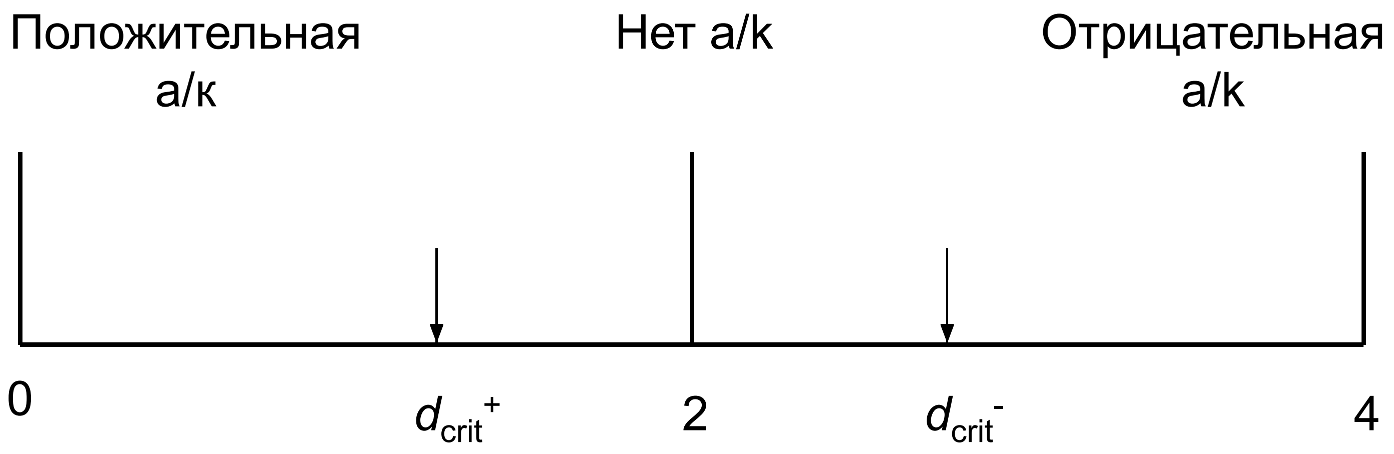
Правило: если $d > d_{cr}^{-}$, то H_0 отвергается.

Особенности статистики Дарбина - Уотсона



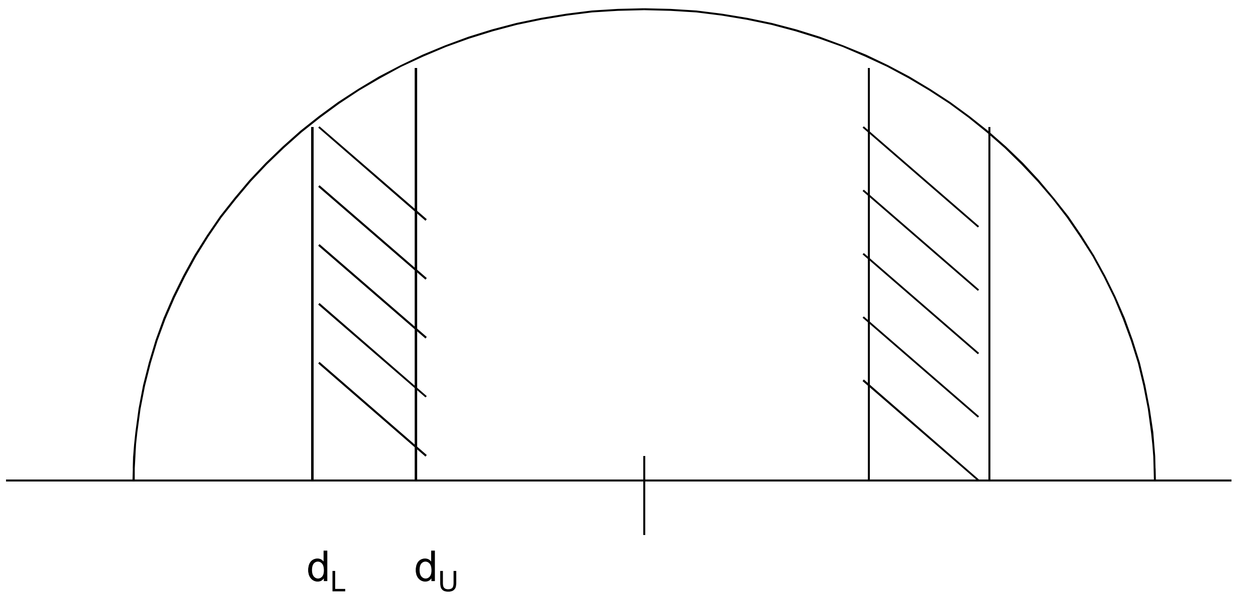
Распределение статистики Дарбина – Уотсона зависит не только от количества наблюдений и числа факторов, но и от конкретных значений матрицы X и Y. Таблиц для нахождения d_{crit}^{+} и d_{crit}^{-} не существует.

Особенности статистики Дарбина - Уотсона



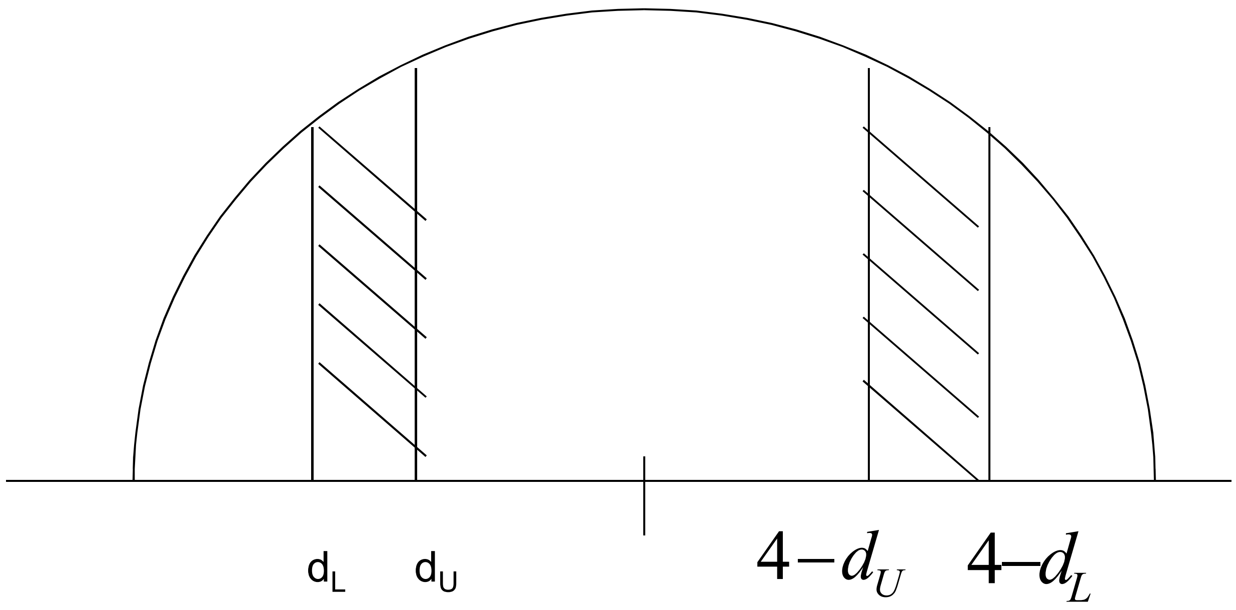
Дарбин и Уотсон использовали статистики d_L и d_U, мажорирующие статистику d снизу и сверху, распределение которых не зависит от X и Y. Существуют таблицы (Дарбина - Уотсона) для квантилей этих статистик.

Особенности статистики Дарбина - Уотсона



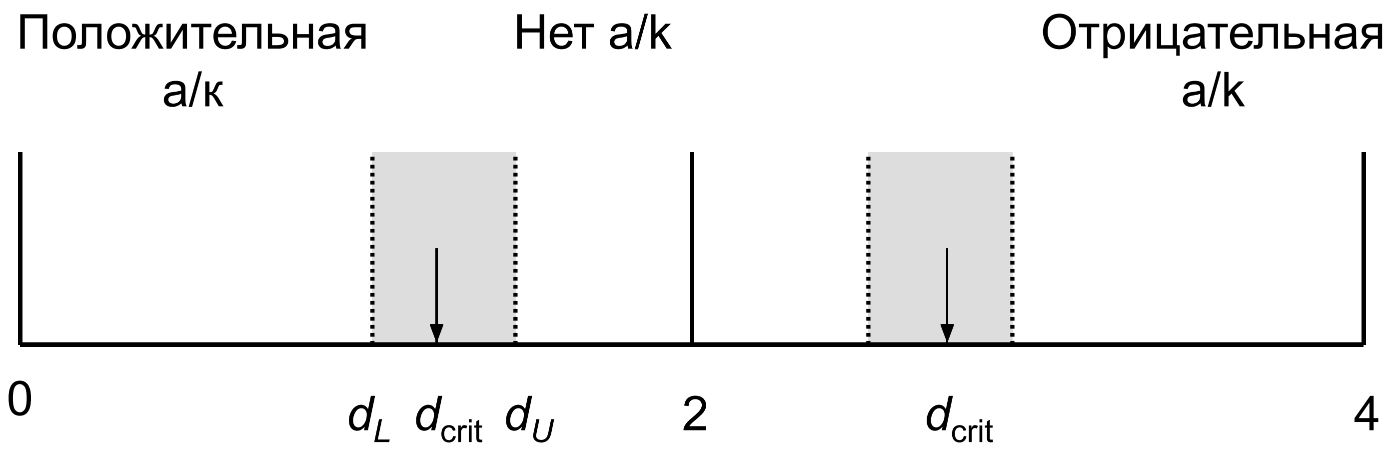
В таблице указаны d_L и d_U – соответственно нижняя и верхняя границы для d_{crit}^{+}.

Особенности статистики Дарбина - Уотсона



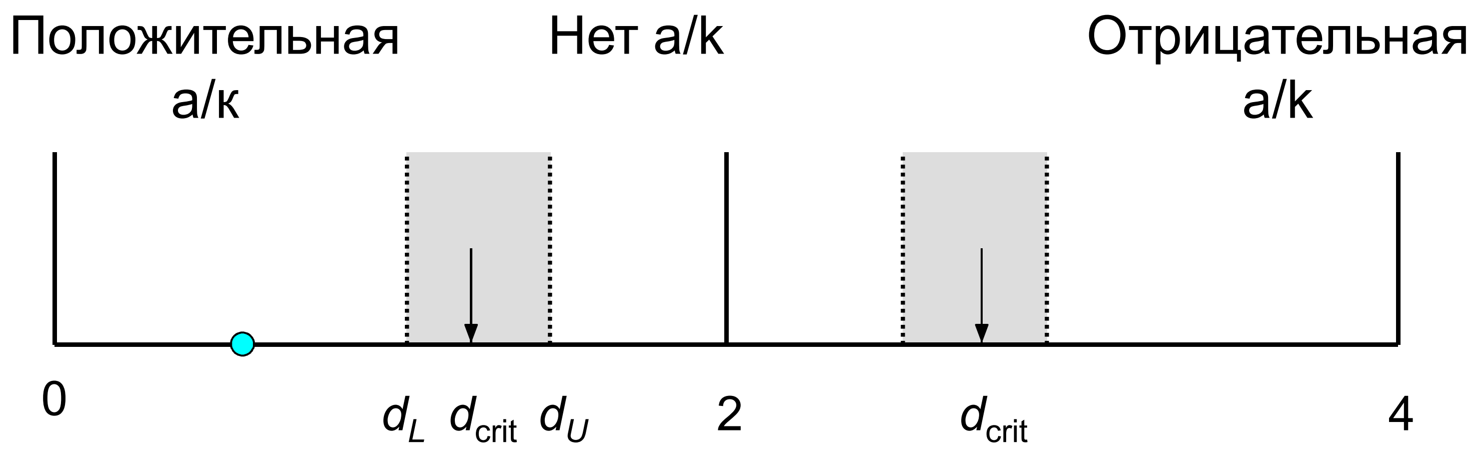
Нижнюю и верхнюю границу для d_{crit}- легко вычислить самостоятельно по формулам 4 - d_U и 4 - d_L соответственно.

Статистика Дарбина - Уотсона



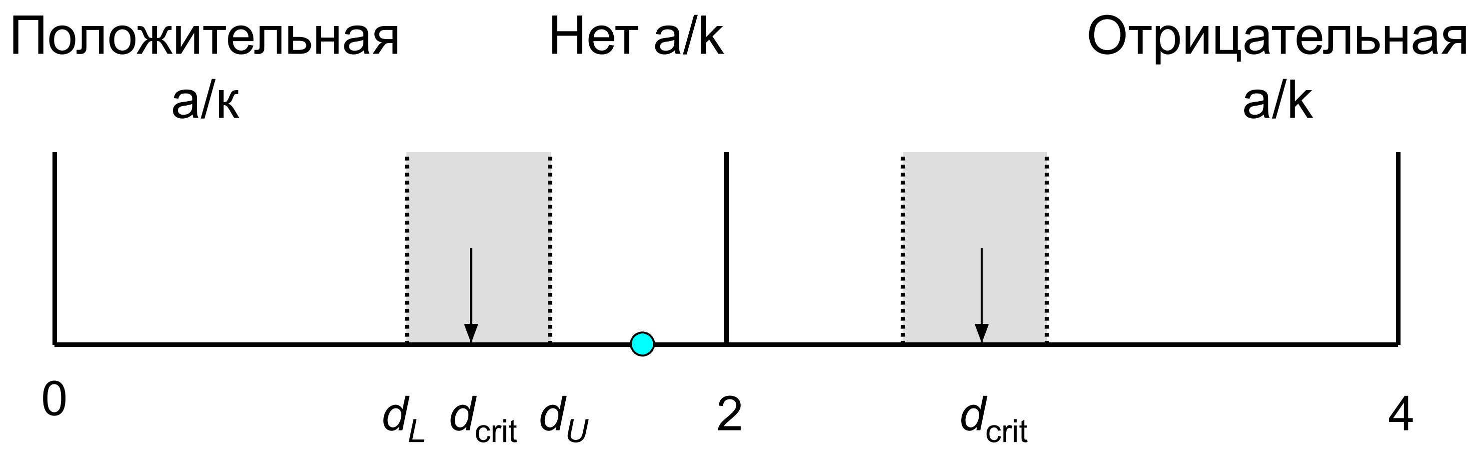
Серым цветом выделены зоны неопределенности.

Статистика Дарбина - Уотсона



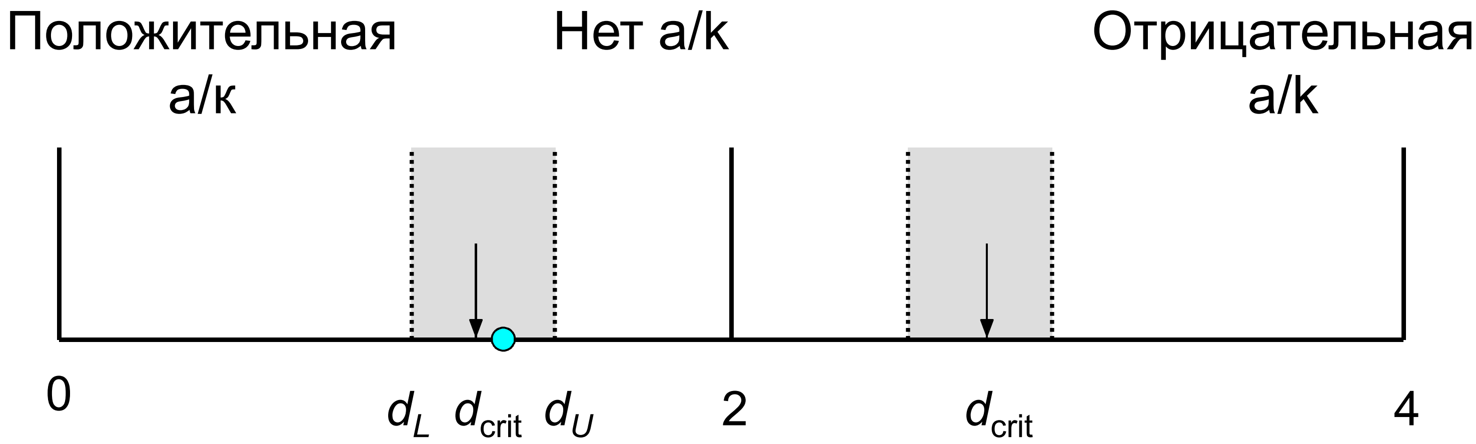
Если $d < d_L$, то имеет место положительная автокорреляция.

Статистика Дарбина - Уотсона



Если $d > d_U$, то гипотеза о положительной автокорреляции отвергается.

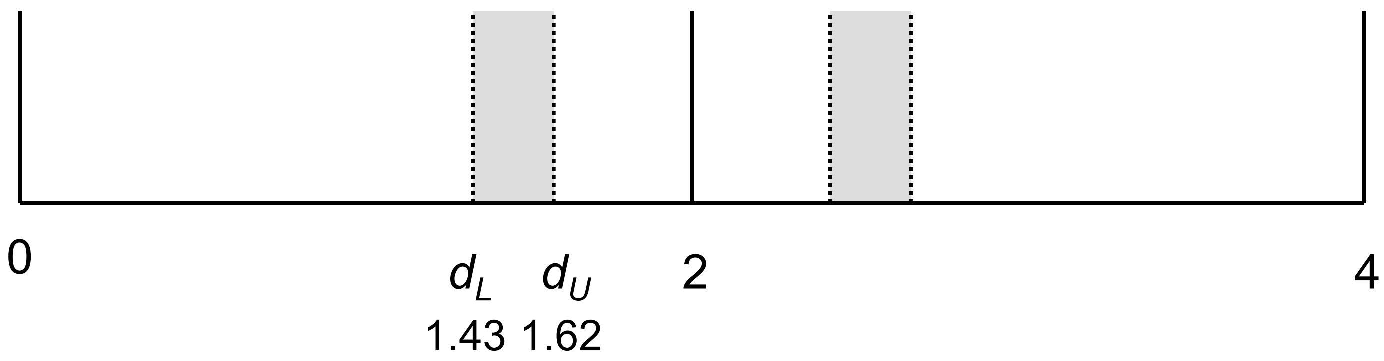
Статистика Дарбина - Уотсона



Если d попадает в зону между d_L и d_U, то вывод сделать невозможно.

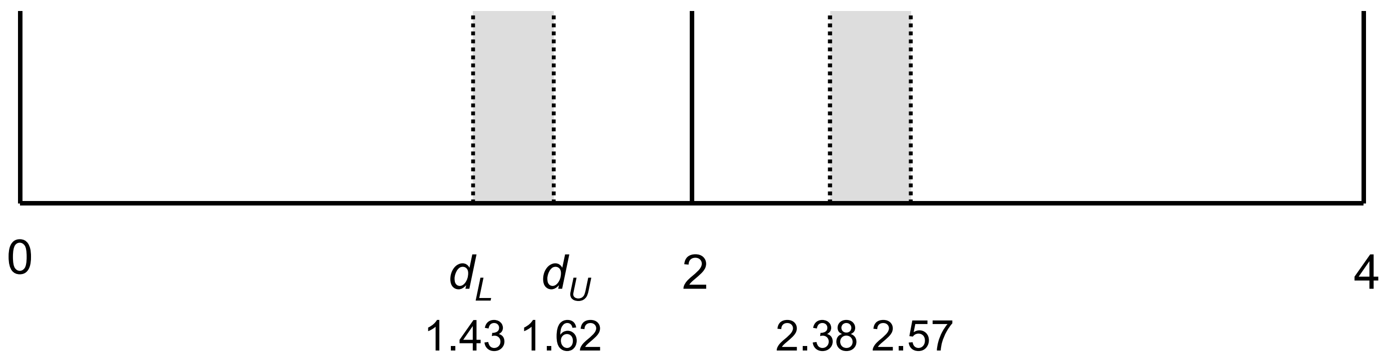
Пример

(n = 45, k = 2,   5% level)



Проверка гипотезы о наличии автокорреляции остатков для регрессии с константой и двумя объясняющими факторами, оцененной по 45 наблюдениям при 5% уровне значимости. d_L и d_U находим в таблице Дарбина – Уотсона.

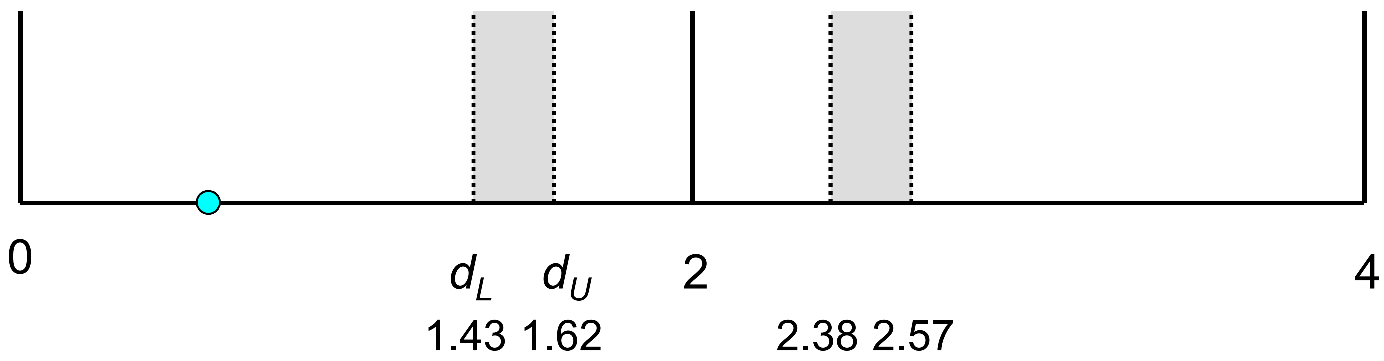
Пример



(n = 45, k = 2, 5% level)

Вычисляем границы второй зоны неопределенности.

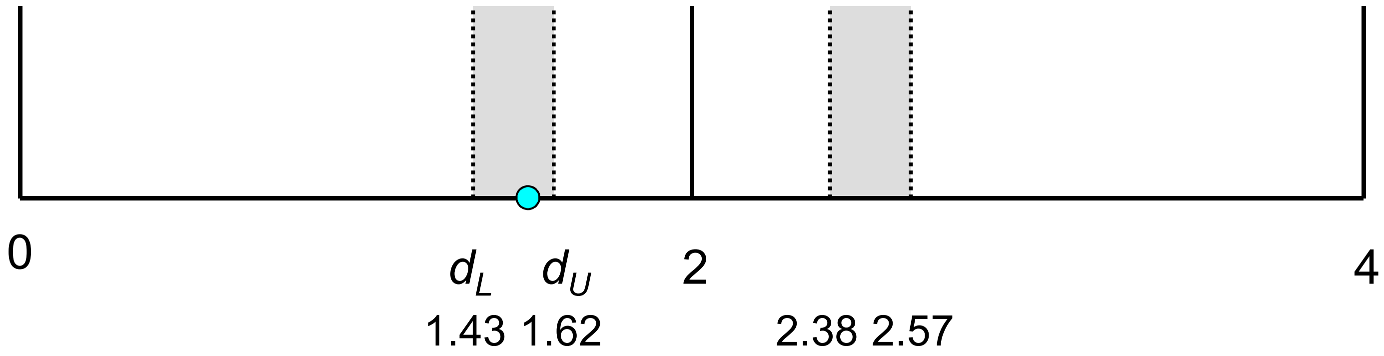
Пример



(n = 45, k = 2, 5% level)

Если d < 1.43, то гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается в пользу гипотезы о положительной автокорреляции.

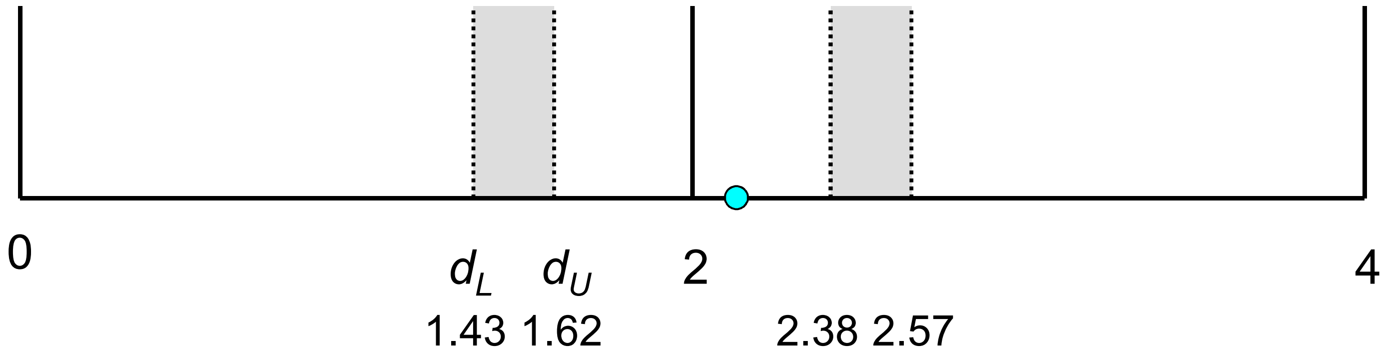
Пример



(n = 45, k = 2,   5% level)

Если 1.43 < d < 1.62, то вывод сделать невозможно.

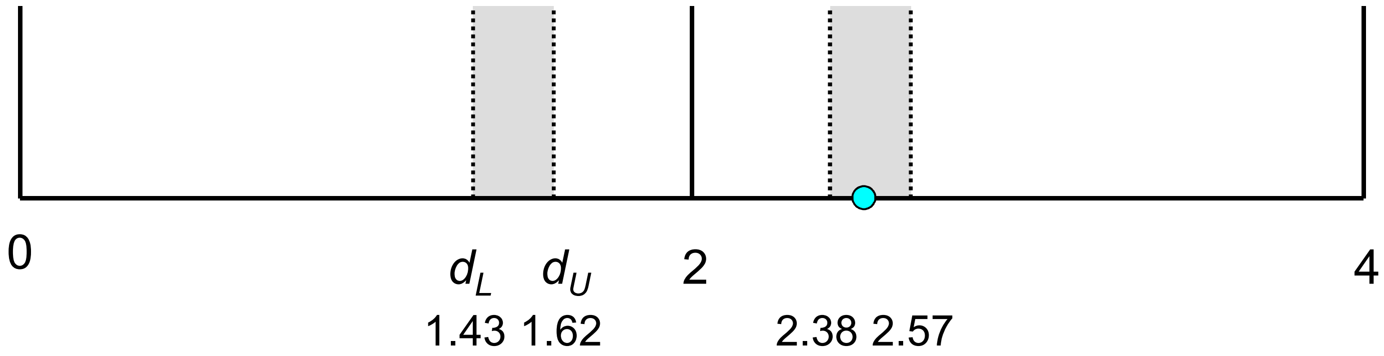
Пример



(n = 45, k = 2, 5% level)

Если 1.62 < d < 2.38, то гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается.

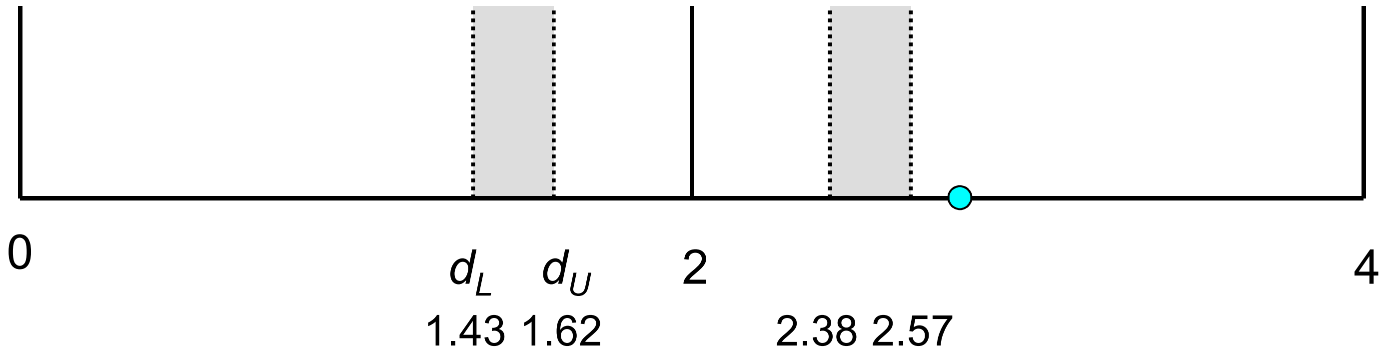
Пример



(n = 45, k = 2,   5% level)

Если 2.38 < d < 2.57, то вывод сделать невозможно.

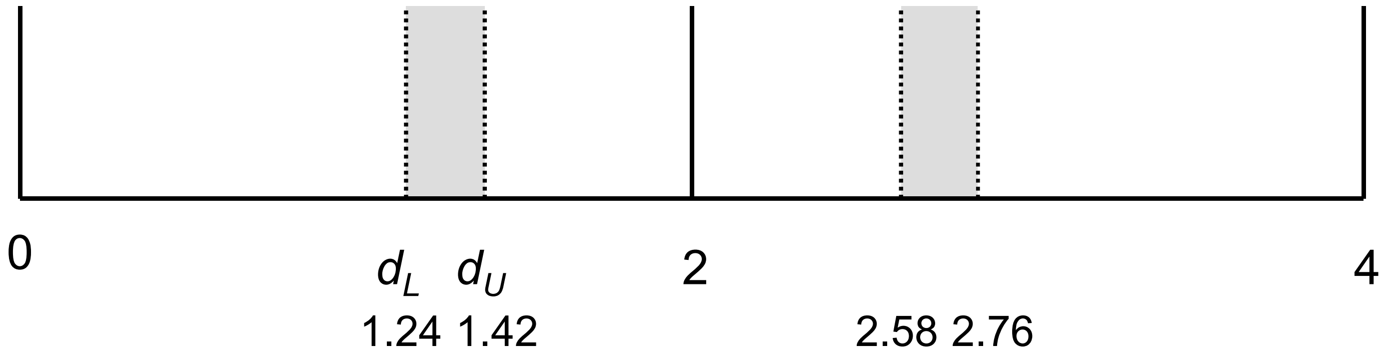
Пример



(n = 45, k =2, 5% level)

Если $d > 2.57$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается в пользу гипотезы об отрицательной автокорреляции.

Пример



(n = 45, k = 2, 1% level)

При уровне значимости 1% значения d_L и d_U изменятся.

Пример

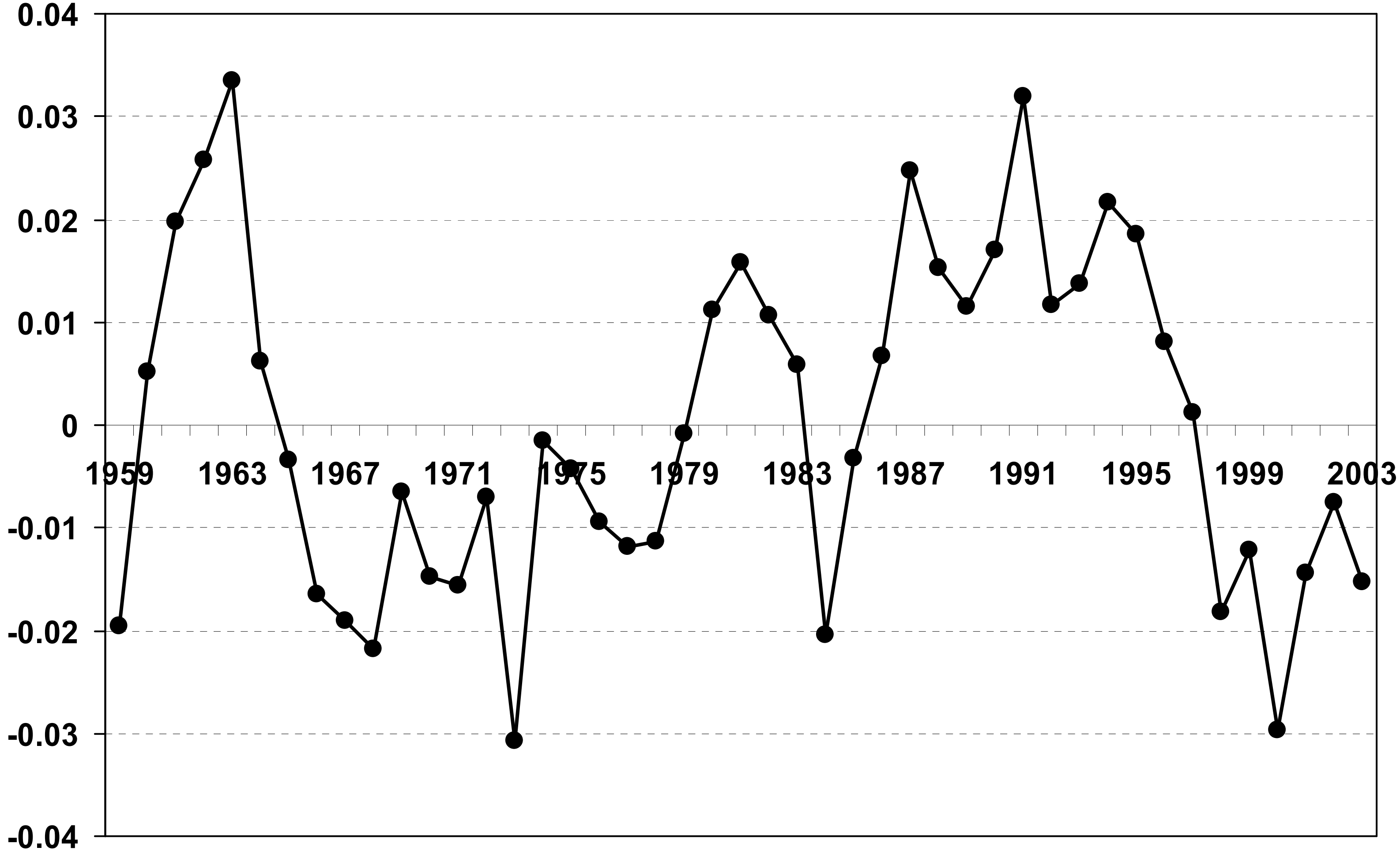


График остатков линейной в логарифмах модели расходов на аренду жилья от дохода и относительных цен явно демонстрирует наличие положительной автокорреляции.

Пример

```
=============================================================
Dependent Variable: LGHOUS
Method: Least Squares
Sample: 1959 2003
Included observations: 45
=============================================================
     Variable       Coefficient Std. Error t-Statistic  Prob.
=============================================================
         C            0.005625   0.167903   0.033501   0.9734
       LGDPI          1.031918   0.006649   155.1976   0.0000
     LGPRHOUS        -0.483421   0.041780  -11.57056   0.0000
=============================================================
R-squared             0.998583    Mean dependent var 6.359334
Adjusted R-squared    0.998515    S.D. dependent var 0.437527
S.E. of regression    0.016859    Akaike info criter-5.263574
Sum squared resid     0.011937    Schwarz criterion -5.143130
Log likelihood        121.4304    F-statistic         14797.05
Durbin-Watson stat    0.633113    Prob(F-statistic)   0.000000
=============================================================
```

d_L d_U

1.24 1.42

(n = 45, k = 2, 1% level)

Тест Дарбина – Уотсона подтверждает наличие положительной автокорреляции.

Неприменимость статистики Дарбина - Уотсона

Статистика Дарбина –Уотсона неприменима, если

- В уравнении нет свободного члена
- Имеется стохастический регрессор (например, Y_{t-1})
- Возмущения удовлетворяют авторегрессионной схеме не первого, а большего порядка.

Что делать при наличии автокорреляции возмущений первого порядка?

•Преобразовывать исходные данные

•Использовать стандартные ошибки коэффициентов в форме Ньюи – Веста

•Использовать для оценки коэффициентов метод максимального правдоподобия

Устранение автокорреляции

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

Предположим, для марковской схемы известно значение ρ.

Устранение автокорреляции

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$\rho Y_{t-1} = \beta_0 \rho + \beta_1 \rho X_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1}$$

Устранение автокорреляции

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$\rho Y_{t-1} = \beta_0 \rho + \beta_1 \rho X_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1 X_t - \beta_1 \rho X_{t-1} + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

В новой модели остатки свободны от автокорреляции.

Устранение автокорреляции

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, \quad t = 2,...,T$$

$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}, \quad t = 2,...,T$$

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + u_t$$

Для модели с новыми переменными возмущения удовлетворяют условию теоремы Гаусса - Маркова.

Устранение автокорреляции

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, \quad t = 2,...,T$$

$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}, \quad t = 2,...,T$$

$$Y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,Y_1 \qquad X_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,X_1$$

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + u_t$$

Чтобы не потерять первое наблюдение, используем поправку Прайса – Уинстона.

Устранение автокорреляции

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, \quad t = 2,\ldots,T$$

$$X_t^* = Y_t - \rho X_{t-1}, \quad t = 2,\ldots,T$$

$$Y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,Y_1 \qquad X_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,X_1$$

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + u_t$$

Но значение параметра ρ не известно.

Откуда взялась поправка Прайса-Уинстона?

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$\mathrm{var}[\varepsilon] \sim \Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^{T-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^{T-1} & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

(доказать самостоятельно)

$$\Omega^{-1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega^{-1/2}Y = \Omega^{-1/2}X\beta + \Omega^{-1/2}\varepsilon,$$

$$Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*, \quad \mathrm{var}[\varepsilon] \sim I$$

Оценка параметра автокорреляции

Способы нахождения оценок параметра ρ:

1) $\rho \approx 1 - \dfrac{d}{2}$

2) Итерационная процедура Кокрена – Уоркута

3) Двухшаговая процедура Дарбина

4) Метод поиска Хилдрет – Лю на сетке

5) Метод максимального правдоподобия одновременного оценивания коэффициентов регрессии и параметра ρ

Итерационная процедура Кокрена – Уоркута

1) Оцениваем параметры уравнения регрессии

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

Сохраняем остатки e_t

2) Оцениваем параметр ρ в регрессии e_t на e_{t-1}:

$e_t = \rho e_{t-1} + u_t$

Получаем оценку ρ_1

3) Преобразуем исходные данные

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1} \qquad X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$$

4) Повторяем пункты 1 и 2, находим ρ_2.

5) Если $| \rho_1 - \rho_2 | < \varepsilon$ (ε задаем заранее), то оценка ρ равна ρ_2,

Иначе выполняем вышеописанные действия, пока последнее неравенство не будет иметь места.

Двухшаговая процедура Дарбина

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

1) Переносим Y_{t-1} направо

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

2) Оцениваем параметр перед Y_{t-1}

Метод поиска Хилдрет – Лю на сетке

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad (*)$$

1) Разбиваем отрезок для ρ (-1, 1) на равные интервалы
2) Для каждого значения ρ = 0, $\pm$ 0.1, $\pm$ 0.2 и т.д.

   оцениваем параметры регрессии (*), находим RSS.

3) Выбираем значение ρ, при котором RSS минимальна
4) При необходимости еще измельчаем сетку в районе выбранного значения ρ и повторяем вышеописанный процесс.

Пример динамической модели

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Если \quad Y_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \ то \quad Y_{t-1} = \begin{pmatrix} . \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Среди регрессоров встречается стохастический (недетерминированный), Y_{t-1}.

Проверка автокорреляции остатков в динамических моделях

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

В этом случае статистика Дарбина – Уотсона не может быть использована для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции.

Проверка автокорреляции остатков в динамических моделях

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

Причина неприменимости статистики Дарбина – Уотсона заключается в наличии связи между Y_{t-1} и ε_t, если возмущения удовлетворяют марковской схеме.

Проверка автокорреляции остатков в динамических моделях

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{n}{1 - n s^2_{b_{Y(-1)}}}}$$

При наличии в уравнении регрессии лаговых значений переменной Y для проверки гипотезы H_0 об отсутствии автокорреляции используется h – статистика Дарбина.

Проверка автокорреляции остатков в динамических моделях

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{n}{1 - n s^2_{b_{Y(-1)}}}}$$

h – статистика Дарбина имеет стандартное нормальное распределение.

Проверка автокорреляции остатков в динамических моделях

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{n}{1 - n s^2_{b_{Y(-1)}}}}$$

$$d \approx 2 - 2\rho$$

$$\hat{\rho} = 1 - 0.5d$$

Для оценки параметра ρ обычно используется рассчитанное значение статистики Дарбина – Уотсона.

Проверка автокорреляции остатков в динамических моделях

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - ns^2_{b_{Y(-1)}}}}$$

Если знаменатель в дроби меньше 0, то применяется альтернативный тест Дарбина

1) Оцениваем коэффициенты уравнения регрессии

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Сохраняем остатки e_t

2) Оцениваем коэффициенты уравнения регрессии

$$e_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \alpha e_{t-1} + \varepsilon_t$$

3) С помощью t – теста проверяем значимость коэффициента α.

Если коэффициент α значим, то имеет место автокорреляция.

Пример

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - ns_{b_{Y(-1)}}^2}} \qquad h = 0.095 \times \sqrt{\frac{44}{1 - 44 \times 0.0020}} = 0.66$$

```
============================================================
Dependent Variable: LGHOUS
Method: Least Squares                Sample(adjusted): 1960 2003
Included observations: 44 after adjusting endpoints
============================================================
     Variable      CoefficientStd. Errort-Statistic  Prob.
============================================================
        C            0.073957   0.062915   1.175499   0.2467
      LGDPI          0.282935   0.046912   6.031246   0.0000
     LGPRHOUS       -0.116949   0.027383  -4.270880   0.0001
    LGHOUS(-1)       0.707242   0.044405   15.92699   0.0000
============================================================
R-squared            0.999795    Mean dependent var 6.379059
Adjusted R-squared   0.999780    S.D. dependent var 0.421861
S.E. of regression   0.006257    Akaike info criter-7.223711
Sum squared resid    0.001566    Schwarz criterion -7.061512
Log likelihood       162.9216    F-statistic        65141.75
Durbin-Watson stat   1.810958    Prob(F-statistic)  0.000000
============================================================
```

Пример

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - ns^2_{b_{Y(-1)}}}} \qquad h = 0.095 \times \sqrt{\frac{44}{1 - 44 \times 0.0020}} = 0.66$$

```
==============================================================
Dependent Variable: LGHOUS
Method: Least Squares                  Sample(adjusted): 1960 2003
Included observations: 44 after adjusting endpoints
==============================================================
     Variable      CoefficientStd. Errort-Statistic  Prob.
==============================================================
         C            0.073957   0.062915   1.175499   0.2467
       LGDPI          0.282935   0.046912   6.031246   0.0000
     LGPRHOUS        -0.116949   0.027383  -4.270880   0.0001
    LGHOUS(-1)        0.707242   0.044405   15.92699   0.0000
==============================================================
R-squared             0.999795    Mean dependent var 6.379059
Adjusted R-squa[illegible]                          [illegible]421861
S.E. of regres[illegible]                           [illegible]223711
Sum squared re[illegible]                           [illegible].061512
Log likelihood        162.9216    F-statistic        65141.75
Durbin-Watson stat    1.810958    Prob(F-statistic)  0.000000
==============================================================
```

$$\hat{\rho} \cong 1 - 0.5d = 1 - 0.5 \times 1.811 = 0.095$$

Если в процедуре Кокрена – Оркута не сходимости, оценки параметра ρ «скачут», то это может объясняться автокорреляцией более высокого, чем первого, порядка.

Тест Бройша - Годфри

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

H_0: нет автокорреляции возмущений

H_1: имеет место автокорреляция возмущений порядка p

Тест Бройша - Годфри

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_P \varepsilon_{t-P} + u_t$$

H$_0$: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_P = 0$

H$_1$: $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_P^2 \neq 0$

Формальное описание теста Бройша - Годфри

1) **Оцениваются параметры уравнения регрессии**

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

2) **Сохраняются остатки e_t**

3) **Оцениваются параметры уравнения регрессии**

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + r_1 e_{t-1} + r_2 e_{t-2} + \ldots + r_P e_{t-P} + \varepsilon_t$$

4) **Сохраняется R^2 последней оцененной регрессии**

5) **Тестовая статистика** $\chi^2 = TR^2$ **имеет распределение «хи – квадрат» с p степенями свободы**

6) **Если** $\chi^2 > \chi^2_{cr}$ **при выбранном уровне значимости α, то гипотеза H_0 отвергается.**

Стандартные ошибки в форме Ньюи-Веста

$$\mathrm{var}[\varepsilon] \sim \Omega = (\omega_{ij}), \quad \omega_{ij} = 0, \quad |i - j| > L,$$

$$\hat{\mathrm{var}}[\hat{\beta}] = n(X'X)^{-1} \frac{1}{T} \left(\sum_{s=1}^{T} e_s^2 x_s x_s^{'} + \sum_{j=1}^{L} \sum_{t=j+1}^{T} w_j e_t e_{t-j} (x_t x_{t-j}^{'} + x_{t-j} x_t^{'}) \right) (X'X)^{-1} -$$

состоятельная оценка ковариационной матрицы,

$\mathrm{x_s} - s -$ая строка матрицы X,

$\mathrm{w_j} -$ веса (детали опускаем).

Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931
www.hse.ru