Дифференциальные и разностные уравнения

Романов И.В.

Москва 2020

Курс «Дифференциальные и разностные уравнения» является одной из базовых математических дисциплин, тем не менее имеющих многочисленные применения в прикладных науках. Для иллюстрации некоторых из таких приложений ниже будут рассмотрены четыре примера. Курс длится 2 модуля (в первом полугодии) и состоит из одной лекции и одного семинара в неделю. Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается, как некоторая взвешенная сумма таких видов работ, как: контрольная работа за первый модуль, индивидуальное домашнее задание во втором модуле и итоговый экзамен.

Пример 1. Простейшая модель фирмы [1] Пусть $y(t)$ — количество продукции, произведенной к моменту времени $t > 0$ и $p(y) = b - ay$ — цена за единицу продукции, $a, b > 0$. Предположим, что скорость изменения $y(t)$ пропорциональна доходу, т.е.

$$y'(t) = ky(t)(b - ay(t)) \tag{1}$$

— дифференциальное уравнение. $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Требуется найти $y(t)$, если известно, что

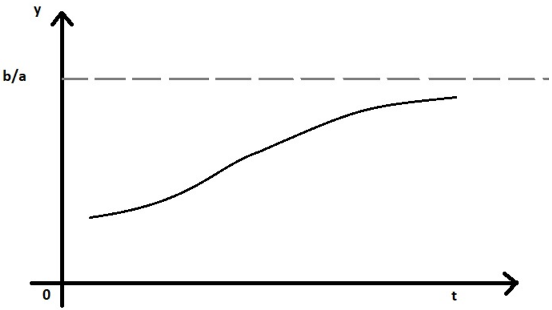
$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

— т.е известно, сколько продукции было произведено в начальный момент времени.

Уравнение (1) можно решить:

$$y(t) = \frac{Cbe^{bkt}}{1 + Cae^{bkt}}.$$

Заметим, что это решение удовлетворяет условию (2). График решения имеет вид:



Это так называемая логистическая кривая, которая показывает динамику «насыщения» рынка товарами. В данном случае решается задача прогнозирования: сколько продукции будет произведено к некоторому моменту времени $t = t_1$ и когда произойдет «насыщение» рынка товарами.

Пример 2. Выравнивание цены по уровню актива [1] Данная модель имеет вид:

$$
\begin{aligned}
q'(t) &= k_1(S(p) - D(p)),\\
p'(t) &= -k_2(q(t) - q_0),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$k_{1,2},\ q_0 > 0$, q — величина актива, p — цена. $S(p)$ — предложение, $D(p)$ — спрос. Представленная модель может применяться для описания динамики цены за баррель сланцевой нефти в зависимости от, например, количества буровых установок. Спрос и предложение часто моделируются так:

$$D(p) = -a_1 p + d_0,$$

$$S(p) = a_2 p + s_0,$$

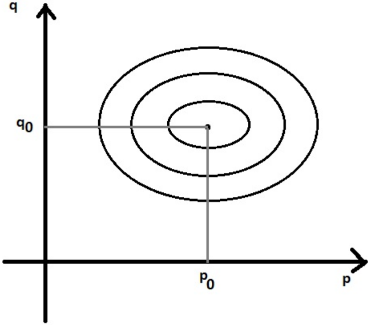
$a_1,\ a_2,\ d_0,\ s_0 > 0$.

В этом случае система (3) сводится к одному уравнению для цены:

$$p''(t) + \omega^2 p(t) = f_0, \tag{4}$$

где ω — частота колебаний, причем ω и f_0 — известные числа, зависящие от параметров задачи. Уравнение (4) называется уравнением колебаний маятника ($p(t)$ в этом случае интерпретируется, как угол отклонения маятника от положения равновесия в момент времени t).

Графически взаимосвязь $p(t)$ и $q(t)$ выглядит как множетсво концентрических замкнутых кривых, близких к окружностям



Здесь (p_0, q_0) — равновесное состояние системы. Рисунок показывает цикличность процесса изменения нефтяных цен в зависимости от изменения числа буровых установок.

Пример 3. Математический маятник [2] Уравнение колебания маятника может быть обобщено:

$$p''(t) = -\sin p(t). \tag{5}$$

Если отклонение величины $p(t)$ от нуля «малое», то $\sin p(t) \approx p(t)$ и получаем (4) для $f_0 = 0$, $\omega = 1$. Сведем (5) к системе уравнений с помощью замены:

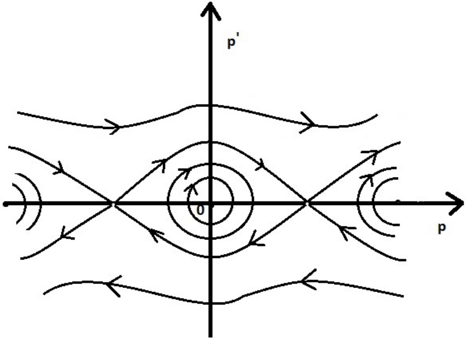
$$p' = p_1,$$

$$p_1' = p_2.$$

Тогда

$$\begin{cases} p_1' = p_2, \\ p_2' = -\sin p_1. \end{cases} \tag{6}$$

Взаимосвязь между p_1 и p_2 изображена на рисунке:



Пример 4. Паутинообразная модель рынка [3] Эта модель относится к теории разностных уравнений. Пусть $p(\tau)$ — цена за единицу продукции в момент времени $\tau = 0, 1, 2..$, т.е. τ — «дискретное время». $D(p)$ — спрос, $S(p)$ — предложение. Предположим, что

- Производитель товаров на каждом временном этапе τ ориентируется на цену этапа $\tau - 1$.
- Локально (т.е. на каждом этапе) спрос равен предложению.

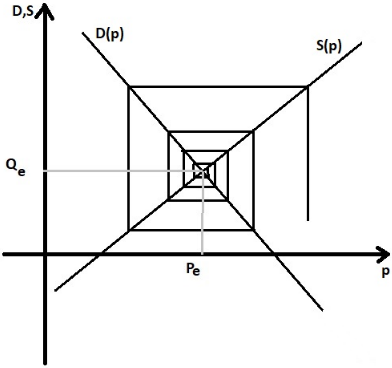
Тогда, если $S_\tau = S(p(\tau))$ и $D_\tau = D(p(\tau + 1))$, то

$$D(p(\tau + 1)) = S(p(\tau)). \tag{7}$$

Пусть $D(p) = Q_e - d(p - p_e)$, $S(p) = Q_e + s(p - p_e)$, где $Q_e > 0$ — равновесная величина спроса и предложения, $p_e > 0$ — равновесная (глобально, т.е. на всем промежутке времени) цена, $d, s > 0$.
Тогда из основного уравнения (7) получим:

$$p(\tau + 1) + \frac{s}{d} p(\tau) = (1 + \frac{s}{d}) p_e. \tag{8}$$

Уравнение (8) — линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Пусть $s < d$. Из решения этого уравнения можно получить, что взаимосвязь между ценой, спросом и предложением выражается следующим графиком ("паутиной"):



1. С.Г. Журавлев, В.В. Аниковский, Дифференциальные уравнения.Сборник задач - М.: Изд-во «Экзамен», 2005 - 126 с.
2. В.К. Романко, Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления - М.: Изд-во «Лаборатория Базовых Знаний», 2011 - 340 с.
3. В.В. Лебедев, К.В. Лебедев, Математическое и компьютерное моделирование экономики - М.: Изд-во «НВТ - Дизайн», 2002 - 248 с.

Благодарю за внимание!