Лекция по эконометрике № 4

Классическая линейная регрессия. Проверка гипотез о конкретном значении коэффициентов регрессии

**Демидова
Ольга Анатольевна
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru**
28.09.2020

План лекции № 4

- **Классическая линейная регрессия**
- **Проверка гипотез о конкретном значении коэффициентов парной регрессии**
- **Доверительные интервалы для коэффициентов парной регрессии**
- **Прогнозирование по модели парной регресии**
- **Доверительные интервалы для среднего и индивидуального прогноза**
- **Проверка нормальности распределения**

Классическая линейная регрессия

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

ε – сумма влияния многих факторов, каждый из которых незначительно влияет на Y. По Центральной предельной теореме такая случайная величина имеет нормальное распределение.

Классическая линейная регрессия

Если ε_i , i = 1,…,n распределены нормально,

т.е. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$,

То оценки параметров β_0 и β_1 тоже распределены нормально, причем

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sigma_\varepsilon^2\right)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

где $x_i = X_i - \bar{X}$, $i = 1,\ldots,n$

Классическая линейная регрессия

Дисперсия возмущений σ_ε^2 неизвестна, для нее используется оценка

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-2}$$

Случайная величина $\dfrac{RSS}{\sigma_\varepsilon^{\ 2}}$ **имеет распределение**

$$\chi^2(n-2)$$

Классическая линейная регрессия

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2_{\hat{\beta}_0}\right)$$

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sigma^2_{\varepsilon}$$

Классическая линейная регрессия

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1}\right), \qquad \sigma^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\sigma^2_{\varepsilon}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \sim N(0,1), \qquad \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim ???, \qquad \frac{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}{\sigma^2_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\sigma^2_{\varepsilon}}$$

Классическая линейная регрессия

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{RSS}{n-2}, \qquad \frac{RSS}{\sigma_{\varepsilon}^{2}} \sim \chi^{2}(n-2),$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}(n-2) \sim \chi^{2}(n-2), \qquad \frac{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^{2}}{\sigma_{\hat{\beta}_1}^{2}} = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^{2}}{\sigma_{\hat{\beta}_1}^{2}}(n-2) \sim \chi^{2}(n-2),$$

Классическая линейная регрессия

$$t(k) \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(k)/k}} \qquad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim ???,$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}{\sigma^2_{\hat{\beta}_1}}(n-2)}{(n-2)}}} \sim t(n-2),$$

Проверка гипотез

Проверка гипотез состоит из

- Выбора основной и альтернативной гипотезы
- Вычисления некоторой тестовой статистики
- Выбора уровня значимости α (числа между 0 и 1), Самые распространенные уровни значимости 0.05 и 0.01
- Разбиения множества значений тестовой статистики на две области: там, где основная гипотеза отвергается и там, где основная гипотеза не отвергается

Проверка гипотез о конкретном значении коэффициентов регрессии при двусторонней альтернативной гипотезе

Модель: $\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon}$

Нулевая гипотеза: $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$

Альтернативная гипотеза: $H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^0$

Проверка гипотез о конкретном значении коэффициентов регрессии при двусторонней альтернативной гипотезе

Сначала необходимо оценить по n наблюдениям модель:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

Если нулевая гипотеза не отвергается, то тестовая статистика

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{s.e.(\hat{\beta}_1)} \sim t(n-2)$$

Имеет t – распределение с (n – 2) степенями свободы.

Таблицы для t - распределения

t Distribution: Critical values of *t*

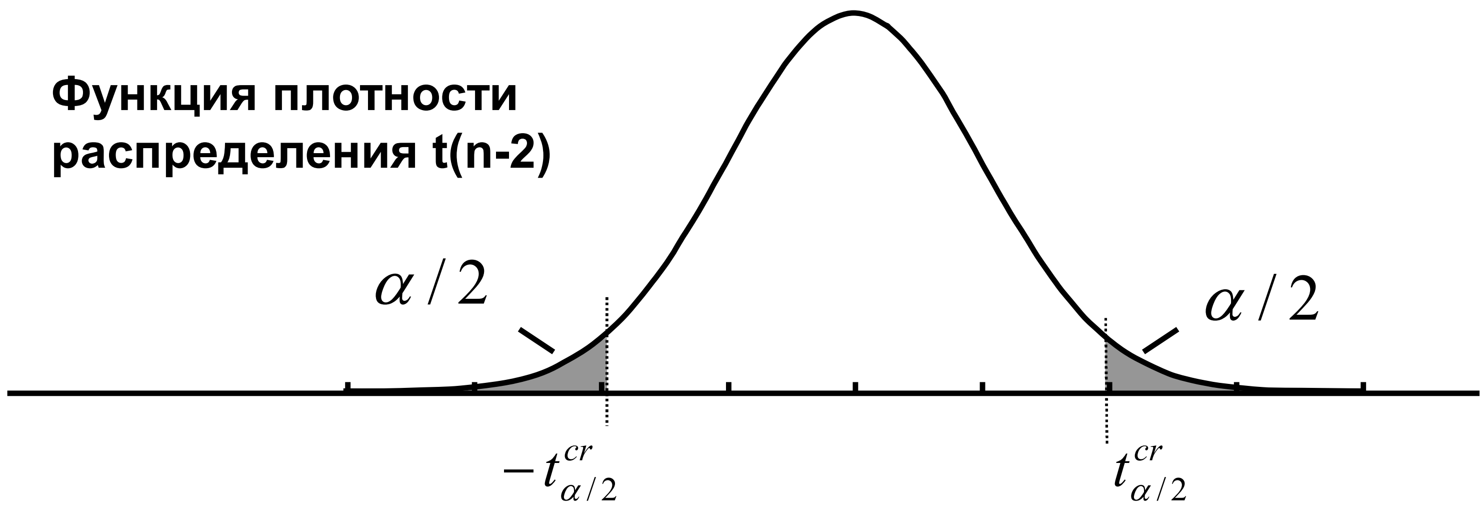
Degrees of freedom	Two-tailed test / One-tailed test	10% / 5%	5% / 2.5%	2% / 1%	1% / 0.5%	0.2% / 0.1%	0.1% / 0.05%
1		6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2		2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.598
3		2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4		2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5		2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
…		…	…	…	…	…	…
…		…	…	…	…	…	…
18		1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19		1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20		1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
…		…	…	…	…	…	…
…		…	…	…	…	…	…
120		1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞		1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Правило принятия решения при двусторонней альтернативной гипотезе и уровне значимости α:

Нулевая гипотеза $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$ **отвергается**

если $|t| > t_{\alpha/2}^{cr}$

Функция плотности распределения t(n-2)



Серым цветом выделена область отвержения нулевой гипотезы при двусторонней альтернативной гипотезе.

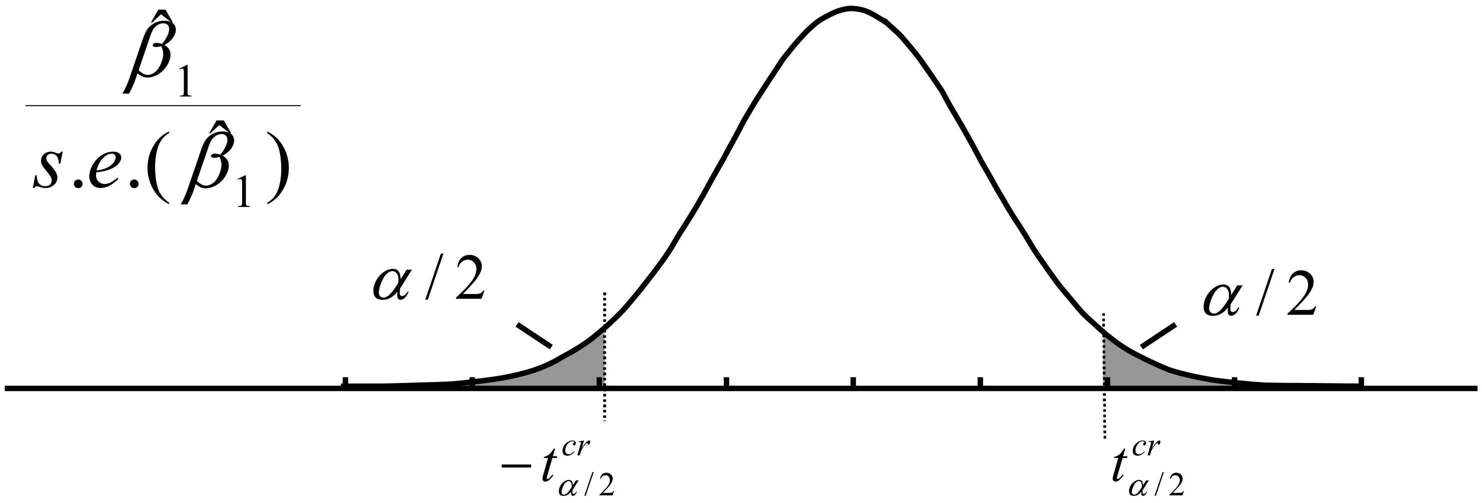
Проверка гипотезы о значимости коэффициента

Модель $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{s.e.(\hat{\beta}_1)}$$



Если нулевая гипотеза отвергается, то говорят, что коэффициент β_1 значим. Если нулевая гипотеза не отвергается, то коэффициент β_1 называется незначимым. Серым цветом выделена область отвержения нулевой гипотезы.

Проверка гипотезы о значимости коэффициента.

t - статистика

Модель: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS                  Number of obs =     570
---------+------------------------------               F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016               Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875               R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------               Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117               Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]

---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501      8.102   0.000       .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305     -0.764   0.445      -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

t – статистика коэффициента наклона выделена красным цветом.

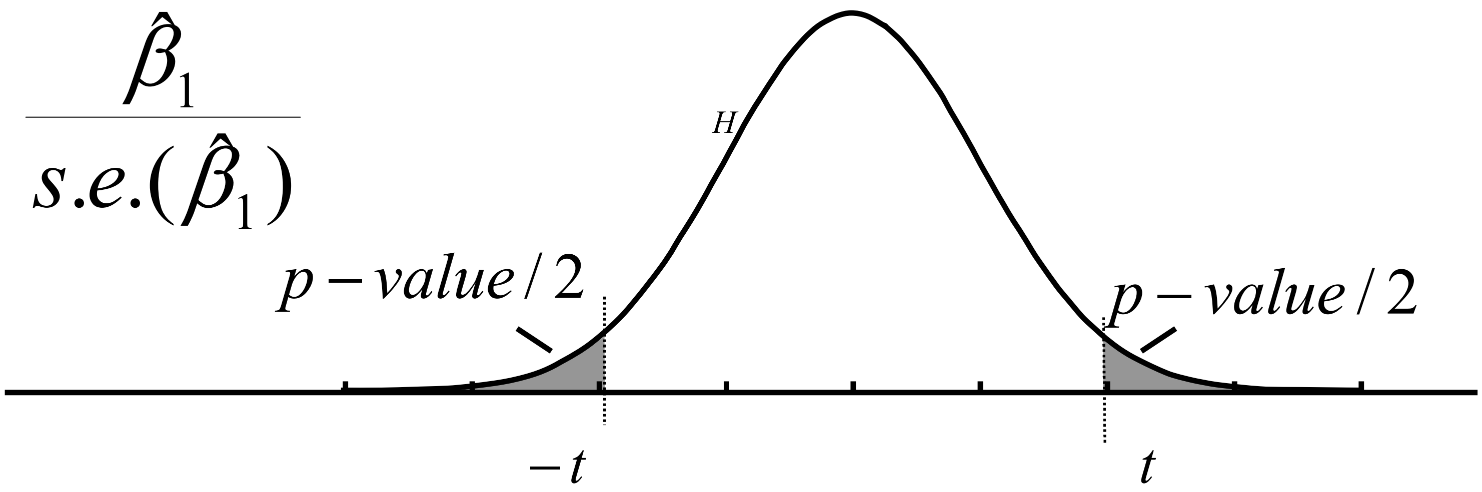
P – VALUE (P – Значение) для проверки гипотезы о значимости коэффициента

Модель $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{s.e.(\hat{\beta}_1)}$$



P – value – минимальный уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отвергается. На рисунке это площадь всей заштрихованной области.

Проверка гипотезы о значимости коэффициента.

P-value

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =     570
---------+------------------------------           F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016           Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875           R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117           Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]

---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501      8.102   0.000        .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305     -0.764   0.445       -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

В таблице выделены P-value для проверки гипотез о значимости коэффициентов регрессии.

Проверка гипотезы о значимости коэффициента. Связь P-value и уровня значимости α.

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =     570
---------+------------------------------           F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016           Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875           R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117           Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]

---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501      8.102   0.000       .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305     -0.764   0.445      -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

Если P-value коэффициента регрессии меньше, чем выбранный уровень значимости α, то нулевая гипотеза отвергается и соответствующий коэффициент является значимым. В приведенном примере при любом разумном уровне значимости константа незначима, а коэффициент наклона значим.

Проверка гипотез о конкретном значении коэффициентов регрессии при односторонней альтернативной гипотезе (>)

Модель: $\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon}$

Основная гипотеза: $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$

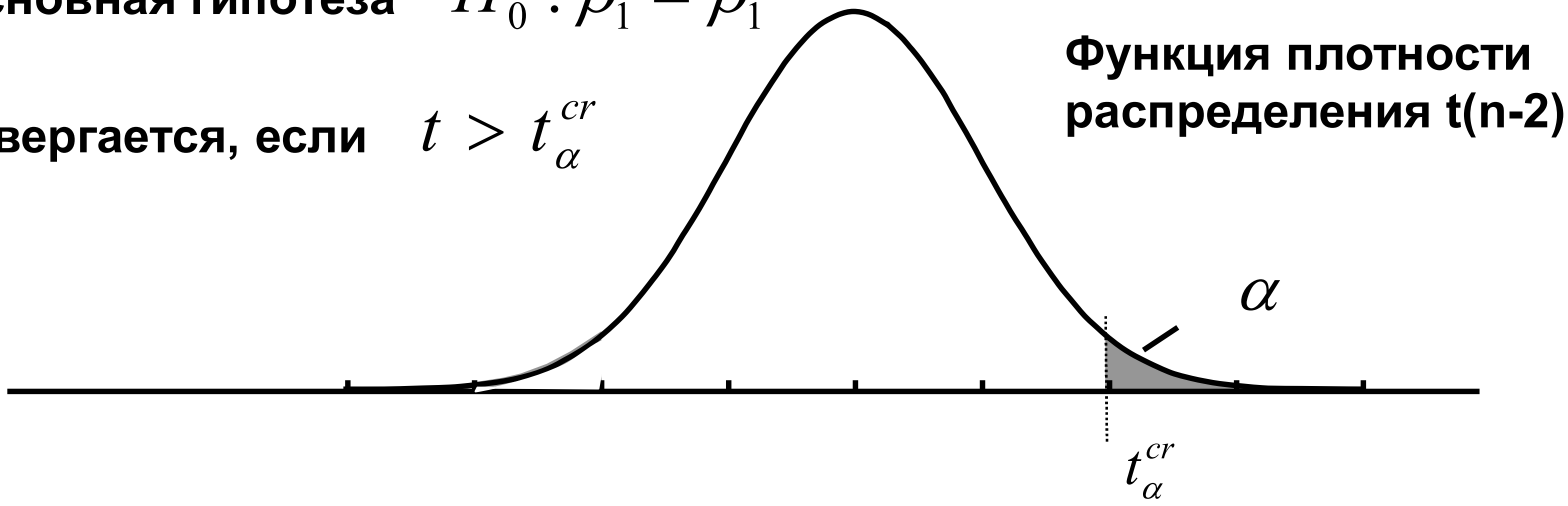
Альтернативная гипотеза: $H_1 : \beta_1 > \beta_1^0$

Проверка гипотез о конкретном значении коэффициента регрессии при односторонней альтернативной гипотезе (>)

Правило отвержения нулевой гипотезы при односторонней альтернативной гипотезе (>) и уровне значимости α .

Основная гипотеза $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$

отвергается, если $t > t_\alpha^{cr}$



Серым цветом выделена область отвержения нулевой гипотезы при односторонней альтернативной гипотезе (>)

Проверка гипотез о конкретном значении коэффициента регрессии при односторонней альтернативной гипотезе (<)

Модель: $\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon}$

Основная гипотеза: $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$

Альтернативная гипотеза: $H_1 : \beta_1 < \beta_1^0$

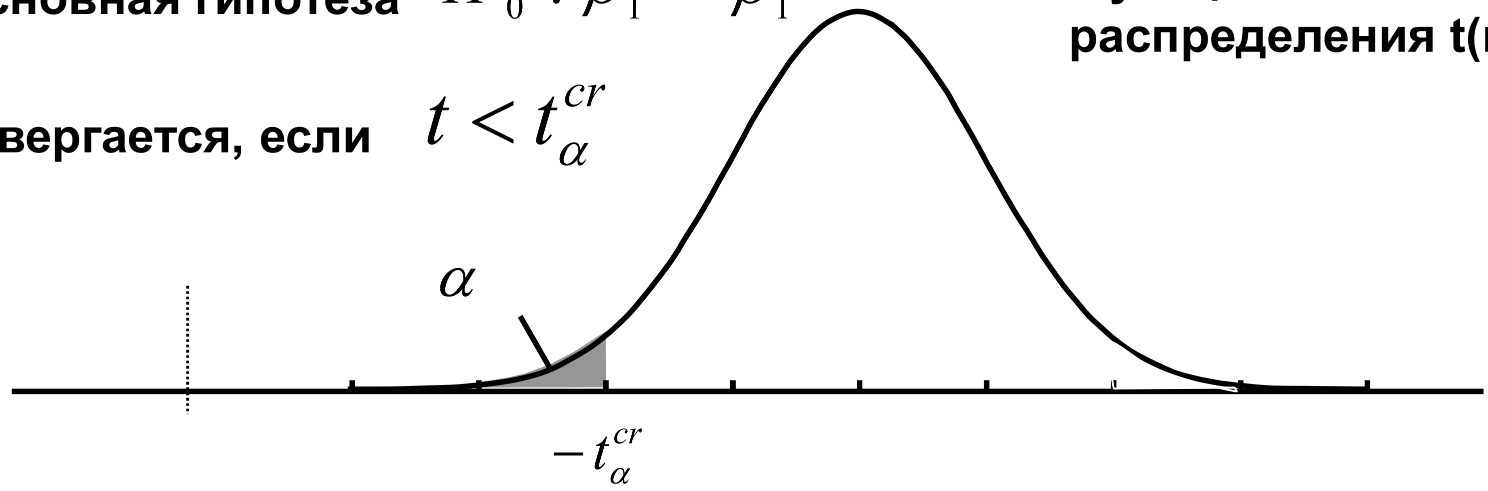
Проверка гипотез о конкретном значении коэффициента регрессии при односторонней альтернативной гипотезе (<).

Правило отвержения нулевой гипотезы при односторонней альтернативной гипотезе (<) и уровне значимости α .

Основная гипотеза $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$

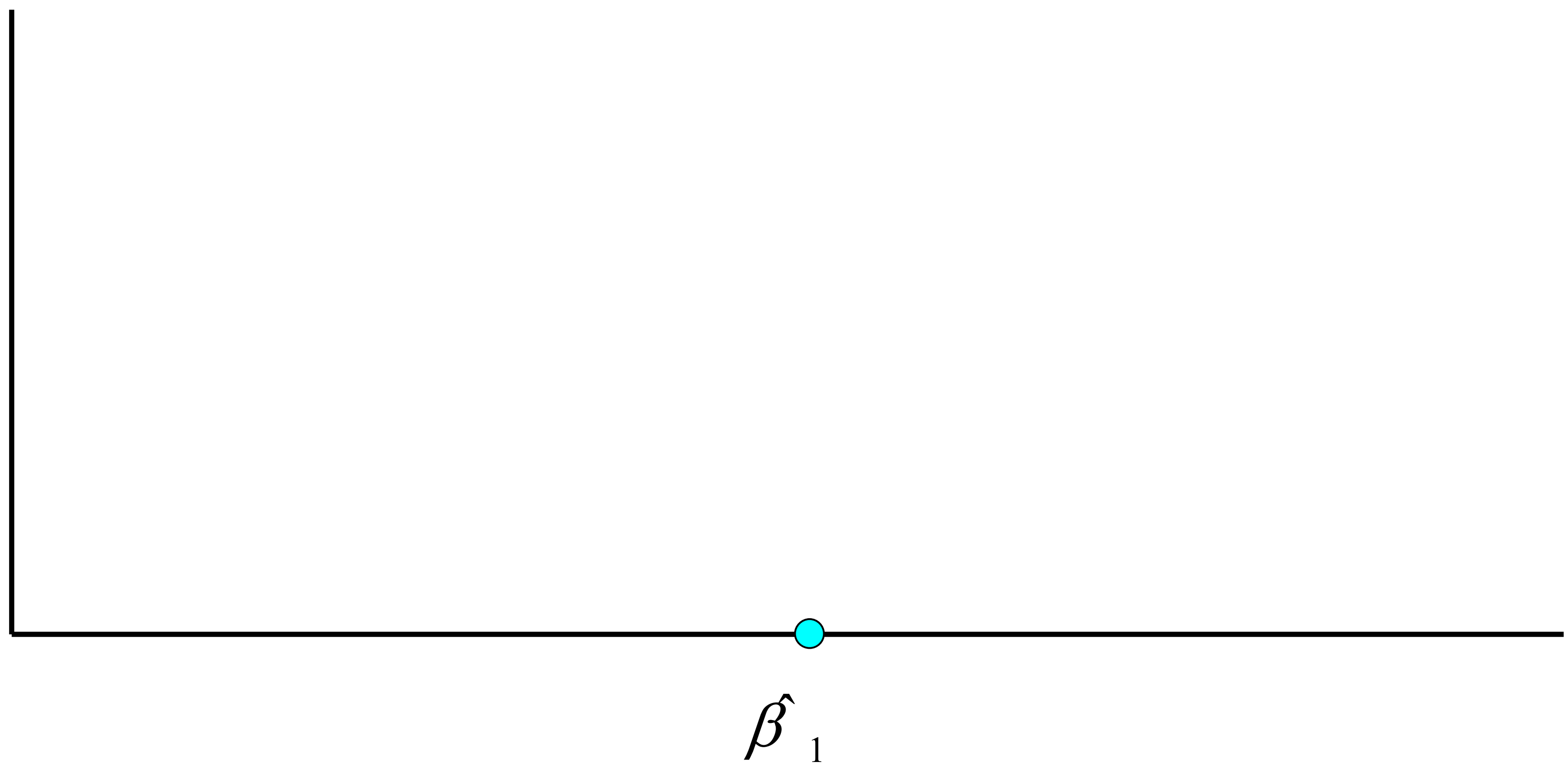
Функция плотности распределения t(n-2)

отвергается, если $t < t_\alpha^{cr}$



Серым цветом выделена область отвержения нулевой гипотезы при односторонней альтернативной гипотезе (<).

Доверительные интервалы для оценок коэффициентов регрессии



Найдем множество всех значений параметра β_1 , гипотеза о равенстве которым при заданном уровне значимости α и двусторонней альтернативной гипотезе не отвергается.

Доверительные интервалы для оценок коэффициентов регрессии

Гипотеза H_0: $\beta_1 = \beta_1^0$ не отвергается, если $|t| \le t_{\alpha/2}^{cr}$, где

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{s.e.(\hat{\beta}_1)}$$

т.е. $$\left| \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{s.e.(\hat{\beta}_1)} \right| \le t_{\alpha/2}^{cr}$$ **или** $$\left| \hat{\beta}_1 - \beta_1^0 \right| \le t_{\alpha/2}^{cr} \cdot s.e.(\hat{\beta}_1)$$

откуда

$$\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2}^{cr} s.e.(\hat{\beta}_1) \le \beta_1^0 \le \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2}^{cr} s.e.(\hat{\beta}_1)$$

Доверительные интервалы для оценок коэффициентов регрессии

(1-α)100% доверительный интервал для коэффициента наклона β_1 имеет вид:

$$\hat{\beta}_1 - t^{cr}_{\alpha/2} s.e.(\hat{\beta}_1) \le \beta_1 \le \hat{\beta}_1 + t^{cr}_{\alpha/2} s.e.(\hat{\beta}_1)$$

Доверительные интервалы для оценок коэффициентов регрессии

Модель: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS                  Number of obs =     570
---------+------------------------------               F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016               Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875               R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------               Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117               Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501     8.102   0.000        .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305    -0.764   0.445       -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

В последней колонке – 95% доверительные интервалы для коэффициентов регрессии.

Проверка значимости коэффициентов с помощью доверительных интервалов

Модель: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS                  Number of obs =     570
---------+------------------------------               F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016               Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875               R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------               Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117               Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501      8.102   0.000       .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305     -0.764   0.445      -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

Если 0 принадлежит доверительному интервалу для коэффициента, то этот коэффициент является незначимым.

В приведенном примере коэффициент β_0 незначим, а коэффициент β_1 - значим.