Эконометрика, 2020-2021, 1 модуль
Семинары 1-2
07.09.20 для
Группы Э_Б2018_Э_3
Семинарист О.А.Демидова

Повторение теории вероятностей и математической статистики

1) Для случайной величины X, распределение которой задано с помощью таблицы

X	2	3	4	5
p	0.1	0.4	0.3	0.2

найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

2) E(X) = 2, E(Y) = 3, var(X) = 5, var(Y) = 4, cov(X,Y) = -3
Найти
A) E(3X + 1)
b) var(3X + 1)
c) var(3X + 2Y)
d) cov(5X + 2, 3Y-1)

3) Пусть функция плотности случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & \textit{при}\quad -1\le x\le 1\\ 0 & \textit{при остальных } x\end{cases}$$

а) Убедиться, что $f(x)$ является функцией плотности.
б) Построить функцию распределения случайной величины X.
в) Найти $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$.

4) Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \textit{для } x\le 1\\ 0.25(x-1)^2 & \textit{для } 1\le x\le 3\\ 1 & \textit{для } x\ge 3\end{cases}$$

а) Найти функцию плотности этой случайной величины.
б) Найти вероятность $P(2 < X < 4)$.

5) Совместное распределение случайных величин X и Y задано с помощью таблицы

		X		
		3	4	5
Y	2	0.2	0.2	0.1
	4	0.12	0.12	0.05

	6	0.08	0.08	0.05

а) Найти маржинальное распределение случайных величин X и Y, математическое ожидание и дисперсию каждой из величин.
б) Найти распределение случайной величины Y при условии, что X = 4.
в) Найти математическое ожидание случайной величины Y при условии, что X = 4.

6) Пусть случайная величина $X \sim N(0,1)$. Найти
а) $P(X < 2)$,
б) $P(X > 2)$,
в) $P(0 < X < 2)$,
г) $P(|X| < 2)$,
д) $P(-1 < X < 2)$

7) Пусть случайная величина $X \sim N(2,9)$. Найти $P(-2 < X < 3)$.

8) Пусть случайная величина $X \sim t(20)$. Найти числа x_1 и x_2 такие, что
а) $P(-x_1 < X < x_1) = 0.9$
б) $P(X < x_2) = 0.99$

9) Пусть случайная величина $X \sim \chi^2(5)$. Найти числа x_1 и x_2 такие, что
а) $P(X > x_1) = 0.01$
б) $P(X < x_2) = 0.95$.

10) Пусть случайная величина $X \sim F(2,20)$. Найти числа x_1 и x_2 такие, что
а) $P(X > x_2) = 0.01$.
б) $P(X < x_1) = 0.95$

11) Доходность ценных бумаг на New York Фондовой бирже имеет нормальное распределение. В таблице приведены данные о доходности 10 видов ценных бумаг:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
X	10	16	5	10	12	8	4	6	5	4	80
X^2	100	256	25	100	144	64	16	36	25	16	782

а) Найти точечные оценки для математического ожидания и дисперсии доходности.
б) Найти 90% доверительный интервал для математического ожидания доходности.

12) Пусть $X_1,...,X_n$ - выборка из нормально распределенной генеральной совокупности, т.е. $X_i \sim N(\mu,\sigma^2), i = 1,...,n$.
Построены следующие оценки для математического ожидания μ:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X}\,,\ \hat{\mu}_2 = X_1\,,\ \hat{\mu}_3 = \frac{X_1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}(X_2 + ... + X_n).$$

а) Какая из этих оценок является несмещенной?
б) Какая из этих оценок является наиболее эффективной?
в) Какая из этих оценок является состоятельной?

Повторение линейной алгебры

1. Даны вектор-столбцы $a = (3,-4,12)^T$, $b = (7,4,3)^T$.
   Найти а) $2a$, б) $a+b$, в) $2a-3b$, г) скалярное произведение векторов a и b, д) длину вектора a.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Найти а) 3A, б) 3A + 5B, в) AC, г) CA.

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Найти а) det A, б) det B, в) A^{-1}, г) B^{-1}, д) след матрицы B.

4. Дана матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ X_1 & . & . & . & X_n \end{pmatrix}^T$. Найти $X^T X$.

5. Доказать, что симметричными являются матрицы
   а) $X^T X$, б) $P(X) = X(X^T X)^{-1} X^T$

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

   а) $A = \begin{pmatrix} 1{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.