Лекции по эконометрике № 6-7

Множественная линейная регрессия

Демидова
Ольга Анатольевна
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru
12.10.2020

План лекций № 6-7

- Множественная линейная регрессия в скалярной и матричной формах
- Метод наименьших квадратов и его геометрическая интерпретация в многомерном случае. Система нормальных уравнений
- Матричное выражение для вектора оценок коэффициентов регрессии. Ковариационная матрица оценок коэффициентов регрессии
- Теорема Гаусса-Маркова для множественной линейной Показатели качества подгонки множественной регрессии
- Особенности регрессии без свободного члена
- Проверка гипотез для коэффициентов множественной регрессии

Множественная линейная регрессия

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$ -

общий вид модели множественной регрессии.

$X_1, \ldots, X_k$ – факторы (независимые переменные),

Y – зависимая переменная,

ε_i – возмущения,

n – число наблюдений.

Множественная линейная регрессия

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, \; i = 1, \ldots, n$$

Обозначим

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ \ldots \\ X_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, X_k = \begin{pmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \ldots \\ X_{kn} \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение регрессии можно переписать в векторном виде

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Множественная линейная регрессия

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n$$

Если ввести матрицу наблюдений X размера (nxk) и вектор коэффициентов β размера (kx1)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \ldots & X_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & X_{1n} & \ldots & X_{kn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_k \end{pmatrix},$$

то уравнение регрессии можно переписать в матричном виде: $Y = X\beta + \varepsilon$

Оцененные значения зависимой переменной и остатки регрессии

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon,$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ki}, \; i = 1, \ldots, n$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i, \; i = 1, \ldots, n$$

МНК для множественной линейной регрессии

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \to \min$$

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

МНК для множественной линейной регрессии

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = e'e$$

МНК для множественной линейной регрессии

$$RSS\,(\hat{\beta}) = e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) =$$

$$= (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\beta) =$$

$$= Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$\underset{(1\times n)}{Y'}\ \underset{(n\times k)}{X}\ \underset{(k\times 1)}{\hat{\beta}} \quad \Rightarrow (Y'X\hat{\beta}) = (Y'X\hat{\beta})' = \hat{\beta}'X'Y$$

$$RSS(\hat{\beta}) = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Необходимые условия экстремума, система нормальных уравнений и оценка МНК

$$RSS(\hat{\beta}) = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$\frac{\partial RSS(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

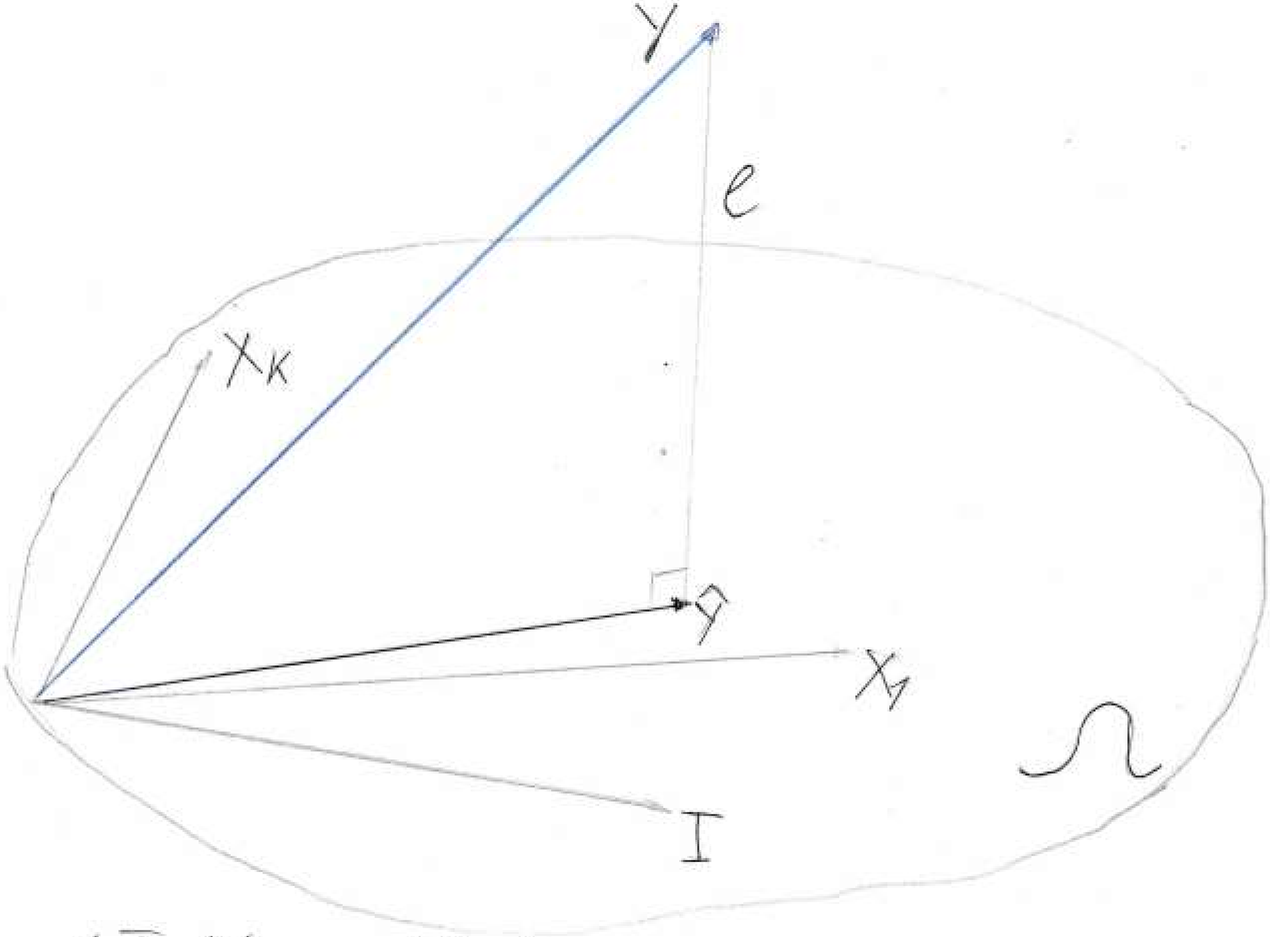
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Достаточное условие экстремума

$$RSS(\hat{\beta}) = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$H = \frac{\partial^2 RSS(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}'} = 2X'X$$

Геометрический вывод формулы оценок МНК



$$\Omega = \langle I, X_1 \ldots X_K \rangle$$

Геометрический вывод формулы оценок МНК

$$Y = \hat{Y} + e \Leftrightarrow |e| \to \min \Leftrightarrow |e|^2 \to \min$$

$$|e| \to \min \Rightarrow e \perp \Omega$$

$$\Rightarrow e \perp X_j \ \forall \ j = 1, \ldots, k \Rightarrow$$

$$X_j' e = 0$$

Геометрический вывод формулы оценок МНК

$$X'e = 0$$

$$X'(Y - \hat{Y}) = 0$$

$$X'(Y - X\hat{\beta}) = 0$$

$$X'Y - X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Y$$

ТГМ для множественной линейной регрессии

Если модель множественной линейной регрессии

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon,$

1) Правильно специфицирована

2) Не существует линейной связи между регрессорами

3) Возмущения имеют нулевое мат. ожидание $E(\varepsilon_i) = 0,$

4) Дисперсии возмущений одинаковы $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^{\ 2}$,

5) Возмущения с разными номерами не коррелируют

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

Тогда оценки МНК являются BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

ТГМ для множественной линейной регрессии

Estimator – оценка,

Unbiased – несмещенная,

Linear – по Y,

Best – это оценки с наименьшей дисперсией в классе всех линейных несмещенных оценок

ТГМ для множественной линейной регрессии

Estimator – оценка (т.е. по набору наблюдений мы получаем оценки параметров регрессии)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \ldots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}.$$

ТГМ для множественной линейной регрессии

Unbiased – несмещенная

(т.е. математические ожидания оценок коэффициентов регрессии совпадают с истинными значениями параметров).

$$\hat{\beta}_{OLS}(Y) = (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\mathrm{Y} = (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) =$$

$$= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$E(\hat{\beta}_{OLS}) = E(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) =$$

$$= \beta + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon] = \beta + 0 = \beta$$

ТГМ для множественной линейной регрессии

Linear – по Y.

$$\hat{\beta}_{OLS}(Y) = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$1.1.\ \hat{\beta}_{OLS}(Y_1 + Y_2) = (X'X)^{-1}X'(Y_1 + Y_2) =$$

$$= \hat{\beta}_{OLS}(Y_1) + \hat{\beta}_{OLS}(Y_2)$$

$$1.2.\ \hat{\beta}_{OLS}(\alpha Y) = \alpha\hat{\beta}_{OLS}(Y), \alpha - const$$

ТГМ для множественной линейной регрессии

Best – это оценки с наименьшей дисперсией в классе всех линейных несмещенных оценок (без доказательства).

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1},$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_j) = \sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)_{jj}^{-1},\ j = 1,\ldots,k$$

Для множественной регрессионной модели вычисляется ковариационная матрица. Ее диагональными элементами являются дисперсии оценок коэффициентов.

Ковариационная матрица оценок МНК

$$\mathrm{var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2 I_n \Rightarrow$$

$$Var(Y) = Var(X\beta + \varepsilon) = Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

$$\mathrm{var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2 I_n \Rightarrow$$

$$Var(\hat{\beta}_{OLS}) = Var((X'X)^{-1} X'Y) =$$

$$= (X'X)^{-1} X' Var(Y) X (X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$$

Оценки дисперсий оценок коэффициентов множественной регрессии

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{RSS}{n - k - 1}$$

$$\mathrm{v\hat{a}r}(\hat{\beta}_j) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(X'X)_{jj}^{-1},\ j = 0,\dots,\ k$$

Приведены формулы для вычисления оценок дисперсий оценок коэффициентов регрессии. Но дисперсия ошибок регрессии неизвестна. Поэтому используется ее оценка (верхняя формула). Подставив вместо дисперсии ошибок регрессии ее оценку, получаем оценку дисперсии коэффициентов.

Стандартные ошибки оценок коэффициентов множественной регрессии

$$s.e.(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}_{jj}}, \; j = 0,\ldots, k$$

Однако вместо оценок дисперсий коэффициентов обычно используются корни квадратные из них, называемые стандартными ошибками (standard errors). Они выдаются статистическими пакетами.

Пример оценки стандартных ошибок коэффициентов множественной регрессии

```
. reg EARNINGS S EXP

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  2,   537) =   67.54
       Model |  22513.6473     2  11256.8237           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  89496.5838   537  166.660305           R-squared     =  0.2010
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1980
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =   12.91

------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   2.678125   .2336497    11.46   0.000     2.219146    3.137105
         EXP |   .5624326   .1285136     4.38   0.000     .3099816    .8148837
       _cons |  -26.48501    4.27251    -6.20   0.000    -34.87789   -18.09213
------------------------------------------------------------------------------
```

Изучается зависимость заработной платы от длительности обучения и опыта работы.

t-статистики, p-value, доверительные интервалы рассчитываются аналогично случаю парной регрессии.

Дисперсионный анализ для множественной линейной регрессии

$$\sum (Y - \overline{Y})^2 = \sum (\hat{Y} - \overline{Y})^2 + \sum e^2$$

$$TSS = \sum (Y - \overline{Y})^2 \qquad \boldsymbol{TSS = ESS + RSS}$$

$$ESS = \sum (\hat{Y} - \overline{Y})^2$$

$$RSS = \sum e^2$$

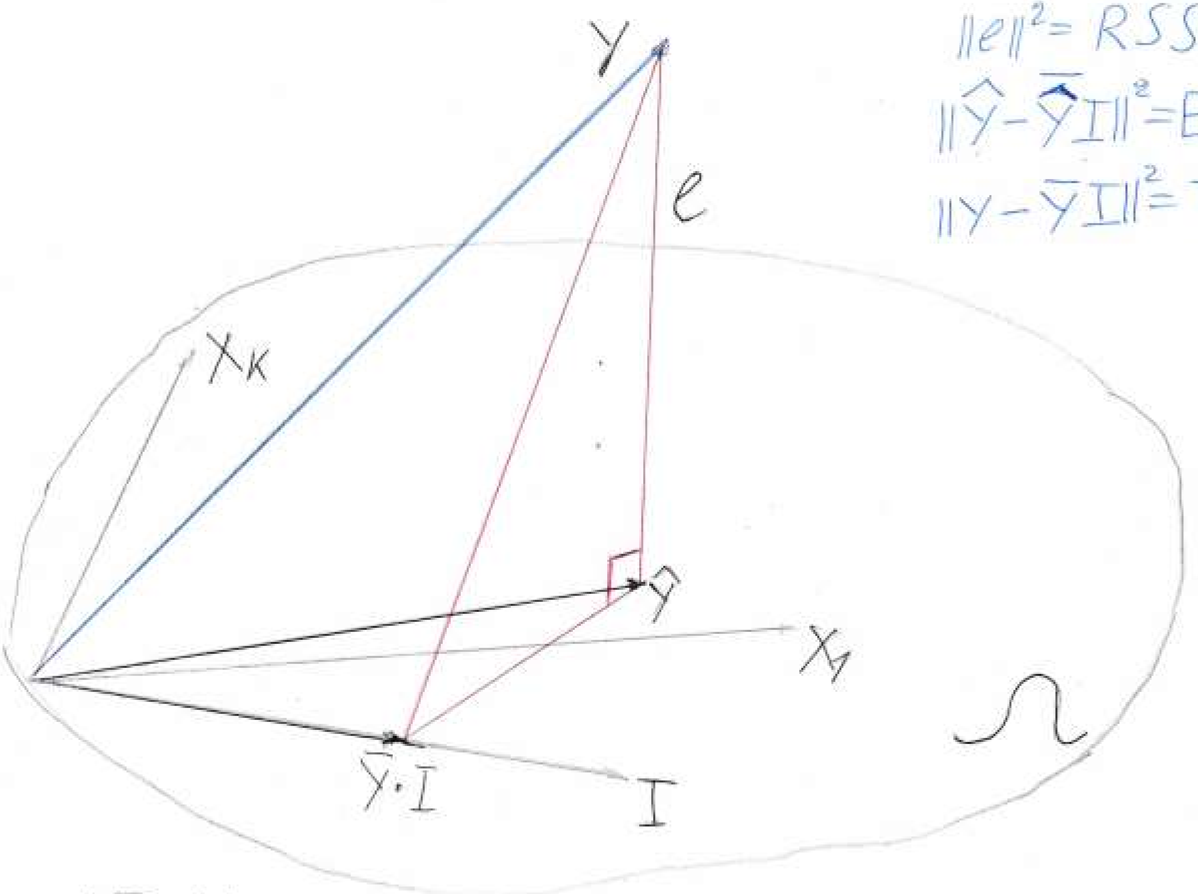
TSS (Total Sum of Squares) - общая сумма квадратов отклонений зависимой переменной от среднего значения.

ESS (Explained Sum of Squares) – объясненная с помощью регрессии сумма квадратов отклонений.

RSS (Residual Sum of Squares) – сумма квадратов остатков.

Теорема Пмфагора

$$TSS = ESS + RSS$$



$$\|e\|^2 = RSS$$
$$\|\hat{Y} - \bar{Y} I\|^2 = ESS$$
$$\|Y - \bar{Y} I\|^2 = TSS$$

$$\Omega = \langle I, X_1 \ldots X_K \rangle$$

Коэффициент множественной детерминации

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2/(n-1)}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2/(n-1)} = \frac{\hat{\text{var}}(\hat{Y})}{\hat{\text{var}}(Y)}$$

R^2 - показатель качества подгонки (оценки) регрессии, является отношением ESS к TSS, (или долей дисперсии Y, объясненной с помощью регрессии).

Это неотрицательная и не превышающая 1 величина.

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i^{\,2}}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}$$

Коэффициент множественной детерминации

R^2 действительно является квадратом, а именно, квадратом выборочного коэффициента корреляции Y и Ŷ.

Минимизируя сумму квадратов остатков, мы максимизируем R^2. Таким образом, чем ближе R^2 к 1, тем выше качество подгонки (оценки) регрессии.

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(X_j, Y)}{\widehat{\mathrm{var}}(Y)}$$

Факторное разложение R2

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i \frac{\hat{\mathrm{cov}}(X_j, Y)}{\hat{\mathrm{var}}(Y)}$$

$$ESS = TSS - RSS = y'y - e'e$$

$$RSS = e'e = (y - x\hat{\beta}_{-1})'(y - x\hat{\beta}_{-1}) =$$

$$= y'y - \hat{\beta}'_{-1}x'y - y'x\hat{\beta}_{-1} + \hat{\beta}_{-1}x'x\hat{\beta}_{-1}$$

$$ESS = \hat{\beta}'_{-1}x'y + \hat{\beta}'_{-1}\underbrace{(x'y - x'x\hat{\beta}_{-1})}_{=0} = \hat{\beta}'_{-1}x'y$$

Коэффициент множественной детерминации

R^2 имеет существенный недостаток: он возрастает при добавлении любого регрессора X (т.к. при этом уменьшается сумма квадратов остатков).

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}$$

R^2_{adj} - это R^2, скорректированный с учетом числа степеней свободы. Он «наказывает» за включение лишних регрессоров.

Коэффициент множественной детерминации, скорректированный на число степеней свободы

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}$$

Для сравнения качества подгонки (оценки) двух регрессий с одной и той же зависимой переменной Y используется коэффициент множественной детерминации, скорректированный на число степеней свободы R^2_{adj}.

R^2_{adj} не превышает 1, но может быть меньше 0.

Особенности регрессии без свободного члена

Если в модели регрессии нет свободного члена,

то не выполняются свойства

1) $\Sigma e_i = 0$

2) TSS = ESS + RSS

3) $R^2 = 1 – RSS/TSS$

В этом случае R^2 не является показателем качества

подгонки регрессии (как и R^2_{adj}).

Проверка значимости коэффициентов множественной линейной регрессии

Модель $$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Основная гипотеза $$H_0 : \beta_j = 0$$

Альтернативная гипотеза $$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Тестовая статистика $$t = \frac{\hat{\beta}_j}{s.e.(\hat{\beta}_j)} \sim t(n - k - 1)$$

Отличие от парной регрессии только в числе степеней свободы.

Пример оценки множественной линейной регрессии

```
. reg EARNINGS S EXP

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  2,   537) =   67.54
       Model |  22513.6473     2  11256.8237           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  89496.5838   537  166.660305           R-squared     =  0.2010
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1980
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =   12.91

------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   2.678125   .2336497    11.46   0.000     2.219146    3.137105
         EXP |   .5624326   .1285136     4.38   0.000     .3099816    .8148837
       _cons |  -26.48501    4.27251    -6.20   0.000    -34.87789   -18.09213
------------------------------------------------------------------------------
```

Изучается зависимость заработной платы от длительности обучения и опыта работы.
t-статистики, p-value, доверительные интервалы рассчитываются аналогично случаю парной регрессии.

Связь доверительных интервалов с проверкой гипотез

$(1-\alpha)100\%$ доверительный интервал для β_j :

Если β_j^0 попадает в $(1 - \alpha)\cdot 100\%$ доверительный интервал для коэффициента β_j, то при уровне значимости α гипотеза H_0: $\beta_j = \beta_j^0$ при альтернативной гипотезе H_1: $\beta_j \neq \beta_j^0$ не отвергается.

Проверка гипотезы об адекватности множественной линейной регрессии

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \exists \beta_i \neq 0$$

Гипотезу H_0 можно переформулировать следующим образом: выбранный набор независимых переменных не оказывает влияния на переменную Y.

Проверка гипотезы об адекватности множественной линейной регрессии

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \exists \beta_i \neq 0$$

$$F(k, n-k-1) = \frac{ESS / k}{RSS / (n-k-1)}$$

$$= \frac{\frac{ESS}{TSS} \Big/ k}{\frac{RSS}{TSS} \Big/ (n-k-1)} = \frac{R^2 / k}{(1-R^2) / (n-k-1)}$$

Приведена формула для проверки гипотезы об адекватности регрессии.

Пример проверки гипотезы об адекватности регрессии

```
. reg EARNINGS S EXP

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  2,   537) =   67.54
       Model |  22513.6473     2  11256.8237           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  89496.5838   537  166.660305           R-squared     =  0.2010
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1980
       Total |  112010.231   539  207.811189           Root MSE      =   12.91

------------------------------------------------------------------------------
    EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           S |   2.678125   .2336497    11.46   0.000     2.219146    3.137105
         EXP |   .5624326   .1285136     4.38   0.000     .3099816    .8148837
       _cons |  -26.48501    4.27251    -6.20   0.000    -34.87789   -18.09213
------------------------------------------------------------------------------
```

F – статистика для проверки гипотезы об адекватности регрессии приводится любым статистическим пакетом. Если p-value для этой F-статистики меньше выбранного уровня значимости, например, 0.05, то регрессия адекватна.

Проверка общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SM + \beta_3 SF + \varepsilon$$

Пример зависимости длительности обучения S от способностей индивида, характеризуемых обобщенной переменной ASVABC, длительности обучения мамы индивида SM и папы SF.

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

```
. reg S ASVABC SM SF

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  3,   536) =  104.30
       Model |  1181.36981     3  393.789935           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  2023.61353   536  3.77539837           R-squared     =  0.3686
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3651
       Total |  3204.98333   539  5.94616574           Root MSE      =   1.943

------------------------------------------------------------------------------
           S |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ASVABC |   .1257087   .0098533    12.76   0.000     .1063528    .1450646
          SM |   .0492424   .0390901     1.26   0.208     -.027546    .1260309
          SF |   .1076825   .0309522     3.48   0.001       .04688    .1684851
       _cons |   5.370631   .4882155    11.00   0.000      4.41158    6.329681
------------------------------------------------------------------------------
```

Коэффициент при переменной SM незначим. Но это может быть следствием мультиколлинеарности (об этом явлении на следующей лекции).

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SM + \beta_3 SF + \varepsilon$$

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3$$

Проверим гипотезу об одинаковом влиянии обоих родителей, равенстве коэффициентов β_2 и β_3 .

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SM + \beta_3 SF + \varepsilon$$

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 (SM + SF) + \varepsilon =$$

$$= \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SP + \varepsilon$$

$$\boldsymbol{SP = SM + SF}$$

Для этого инкорпорируем ограничение в уравнение регрессии, введя дополнительную переменную SP.

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

```
. g SP=SM+SF

. reg S ASVABC SP

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  2,   537) =  156.04
       Model |  1177.98338     2  588.991689           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  2026.99996   537  3.77467403           R-squared     =  0.3675
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3652
       Total |  3204.98333   539  5.94616574           Root MSE      =  1.9429

------------------------------------------------------------------------------
           S |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ASVABC |   .1253106   .0098434    12.73   0.000     .1059743    .1446469
          SP |   .0828368   .0164247     5.04   0.000     .0505722    .1151014
       _cons |    5.29617   .4817972    10.99   0.000     4.349731    6.242608
------------------------------------------------------------------------------
```

Оцениваем вспомогательную регрессию.

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

```
. reg S ASVABC SM SF

------------------------------------------------------------------------------
           S |      Coef.   Std. Err.       t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ASVABC |   .1257087   .0098533    12.76   0.000     .1063528    .1450646
          SM |   .0492424   .0390901     1.26   0.208     -.027546    .1260309
          SF |   .1076825   .0309522     3.48   0.001       .04688    .1684851
       _cons |   5.370631   .4882155    11.00   0.000      4.41158    6.329681
------------------------------------------------------------------------------

. reg S ASVABC SP

------------------------------------------------------------------------------
           S |      Coef.   Std. Err.       t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ASVABC |   .1253106   .0098434    12.73   0.000     .1059743    .1446469
          SP |   .0828368   .0164247     5.04   0.000     .0505722    .1151014
       _cons |    5.29617   .4817972    10.99   0.000     4.349731    6.242608
------------------------------------------------------------------------------
```

Сравним результаты оценивания двух регрессий.

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

```
. reg S ASVABC SM SF

------------------------------------------------------------------------------
           S |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ASVABC |   .1257087   .0098533    12.76   0.000     .1063528    .1450646
          SM |   .0492424   .0390901     1.26   0.208    -.027546     .1260309
          SF |   .1076825   .0309522     3.48   0.001      .04688     .1684851
       _cons |   5.370631   .4882155    11.00   0.000      4.41158    6.329681
------------------------------------------------------------------------------

. reg S ASVABC SP

------------------------------------------------------------------------------
           S |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      ASVABC |   .1253106   .0098434    12.73   0.000     .1059743    .1446469
          SP |   .0828368   .0164247     5.04   0.000     .0505722    .1151014
       _cons |    5.29617   .4817972    10.99   0.000     4.349731    6.242608
------------------------------------------------------------------------------
```

Если проверяемое ограничение имеет место, то сумма квадратов остатков *RSS* должна увеличиться незначительно.

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SM + \beta_3 SF + \varepsilon \quad (1)$$

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3, \quad H_1 : \beta_2 \neq \beta_3$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 (SM + SF) + \varepsilon$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SP + \varepsilon \quad (2)$$

Модель (2) является ограниченной версией модели (1).

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3, \quad H_1 : \beta_2 \neq \beta_3$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 (SM + SF) + \varepsilon$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 ASVABC + \beta_2 SP + \varepsilon \qquad (2)$$

Проведем формальную проверку гипотезы, рассчитав значение тестовой статистики.

$$F(1, n-k-1) = \frac{(RSS_R - RSS_U)/1}{RSS_U/(n-k-1)} = \frac{202700 - 202361}{202361/536} = 0.90$$

Пример проверки общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$F(1, n-k-1) = \frac{(RSS_R - RSS_U)/1}{RSS_U/(n-k-1)} = \frac{202700 - 202361}{202361/536} = 0.90$$

Полученное значение *F* – статистики равно 0.90, что меньше критического значения F (1, 536) , равного 1. Следовательно, нулевая гипотеза не отвергается.

Проверка общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

H_0: Имеют место q конкретных линейных ограничений на коэффициенты регрессии
H_1: Это ограничения не имеют места

Чтобы проверить выполнение линейных ограничений, необходимо
1) Оценить регрессию без ограничений и найти RSS_{uR}
2) Оценить регрессию с ограничениями RSS_R
3) Вычислить соответствующую F - статистику

Проверка общей линейной гипотезы о коэффициентах регрессии

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

H_0: Имеют место q конкретных линейных ограничений на коэффициенты регрессии
H_1: Это ограничения не имеют места
Тестовая статистика:

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/q}{RSS_U/(n - k - 1)} \sim F(q; n - k - 1)$$

Если значение тестовой *F* - статистики больше, чем Fcr(q,n-k-1), то гипотеза H_0 отвергается. Если значение тестовой *F* – статистики меньше, чем Fcr(q,n-k-1), то H_0 не отвергается.