Лекция по эконометрике № 2

Линейная регрессионная модель для случая одной объясняющей переменной

Демидова
Ольга Анатольевна
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru
14.09.2020

План лекции № 2

- **Возникновение термина «регрессия»**
- **Теоретическая и выборочная регрессии**
- **Линейность регрессии по переменным и параметрам.**
- **Задача оценивания параметров**
- **Метод наименьших квадратов (МНК)**
- **Система нормальных уравнений и ее решение**
- **Интерпретация оценок МНК на примере**

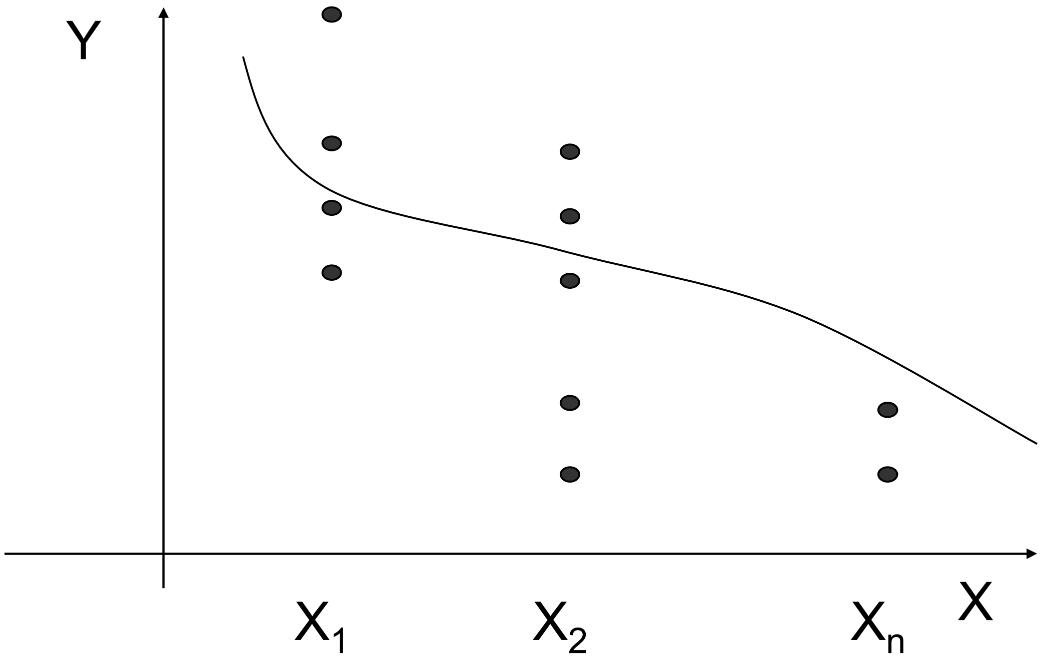
Dictionary definition: “Regression is a backward movement, a retreat, a return to an earlier stage of development”.

Sir Francis Galton (1822-1911) ввел термин «регрессия», изучая зависимость роста детей от роста родителей.

“A regression of children’s height towards the average”.

- Линейный регрессионный анализ объединяет широкий круг задач, связанных с построением зависимостей между двумя переменными: X и Y.
- X – независимая, объясняющая, экзогенная переменная, регрессор
- Y- зависимая, объясняемая, эндогенная переменная, regressand.
- На практике исследователь работает с данными (X_i, Y_i), i = 1,…,n.

Модель парной регрессии



Уравнение теоретической регрессии $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$, $i = 1,\ldots,n$

т.к. при одном и том же X, Y могут быть разные.

Из случайной величины Y выделяем некоторую часть, которая детерминирована иксом,

ε_i - случайная составляющая, добавка.

Модель парной регрессии

$f(X_i) = E(Y|X = X_i), i = 1,\ldots,n$

$Y_i = E(Y|X = X_i) + \varepsilon_i, i = 1,\ldots,n$ – уравнение теоретической регрессии

Какова причина появления случайной составляющей ε_i (возмущения)?

- **В модели участвуют не все переменные, влияющие на поведение Y.**
- **Врожденная неопределенность поведения экономических агентов.**
- **Мы используем те величины, которые можем измерить, а не те, которые хотелось бы.**
- **Ошибки измерения.**

Модель парной регрессии

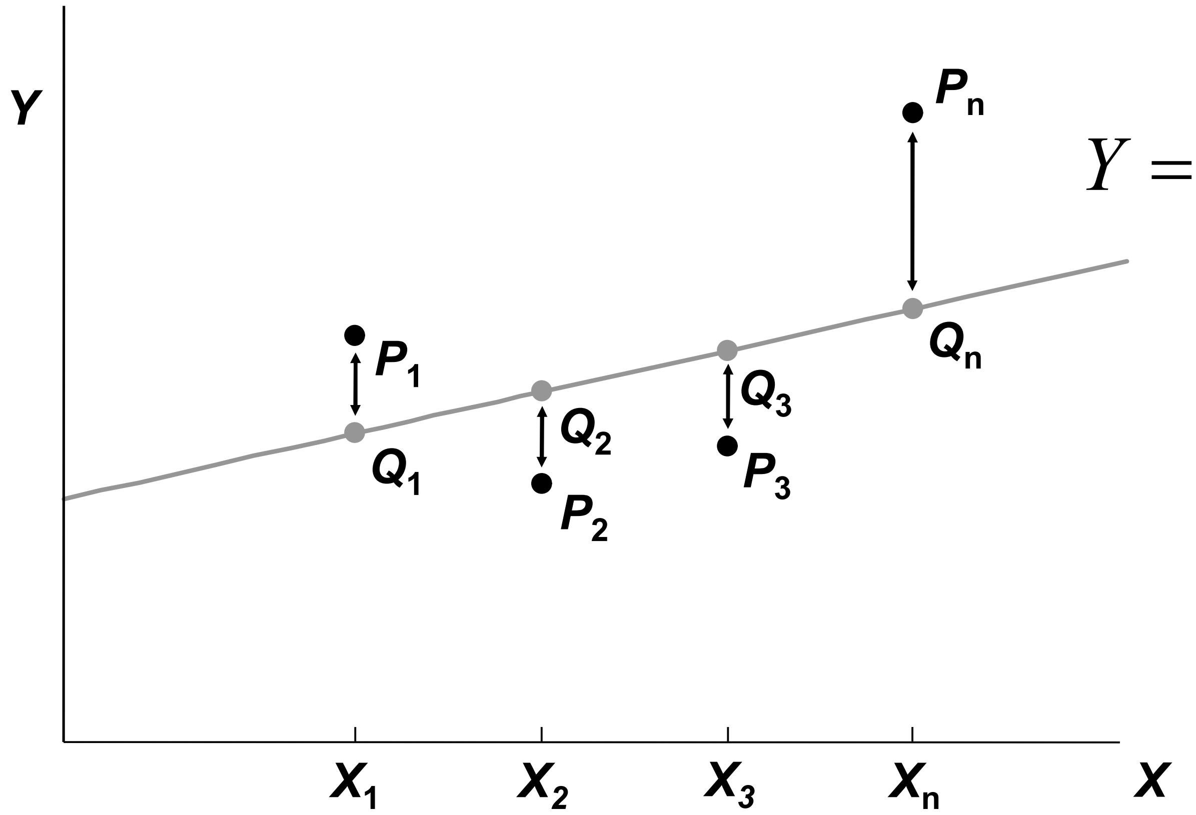
Уравнение теоретической регрессии

$$Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$$

в зависимости от $f(X_i)$ может быть линейным, квадратичным, логарифмическим и т.д.

Рассмотрим линейный случай: $f(x) = \beta_0 + \beta_1 X$ – линейно по X и по параметрам.

Модель парной регрессии

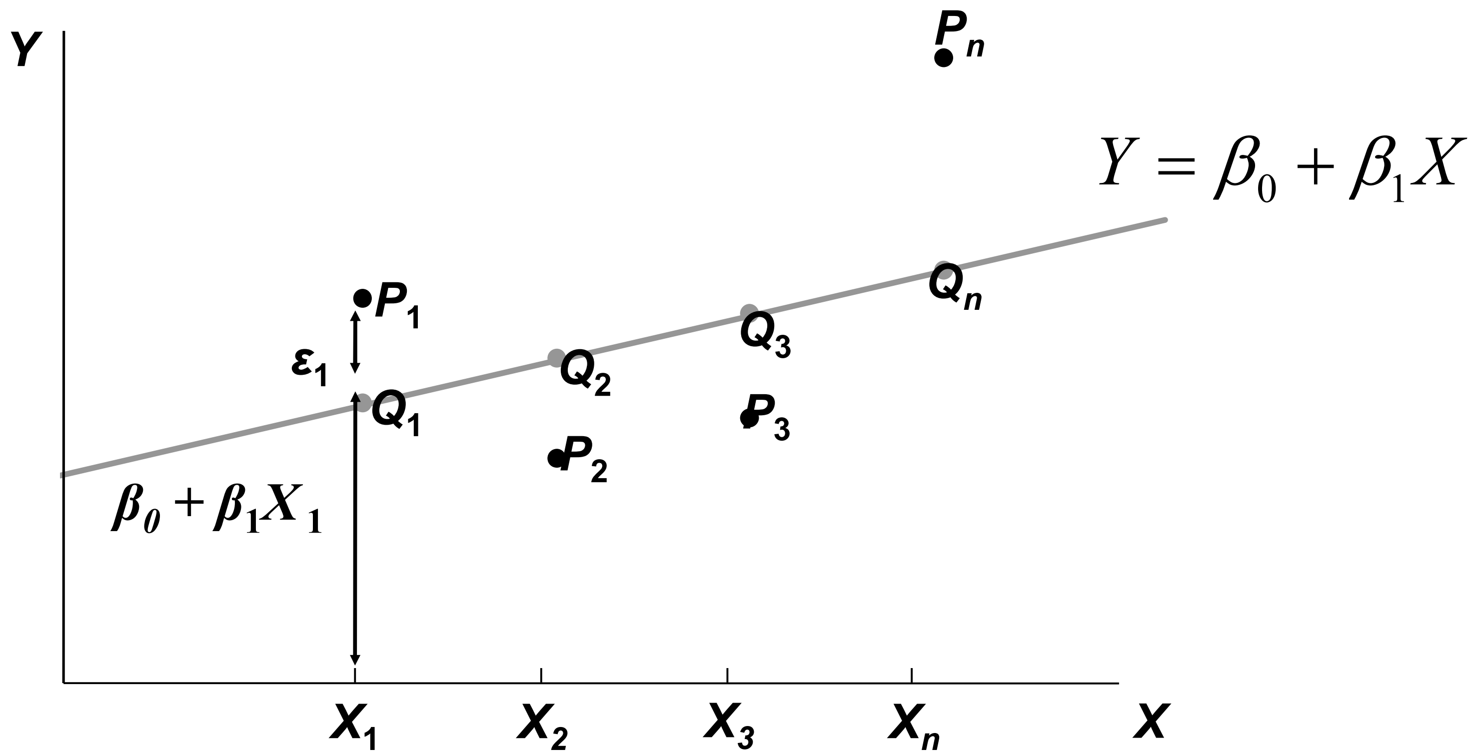


$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

Специфицируем модель следующим образом:

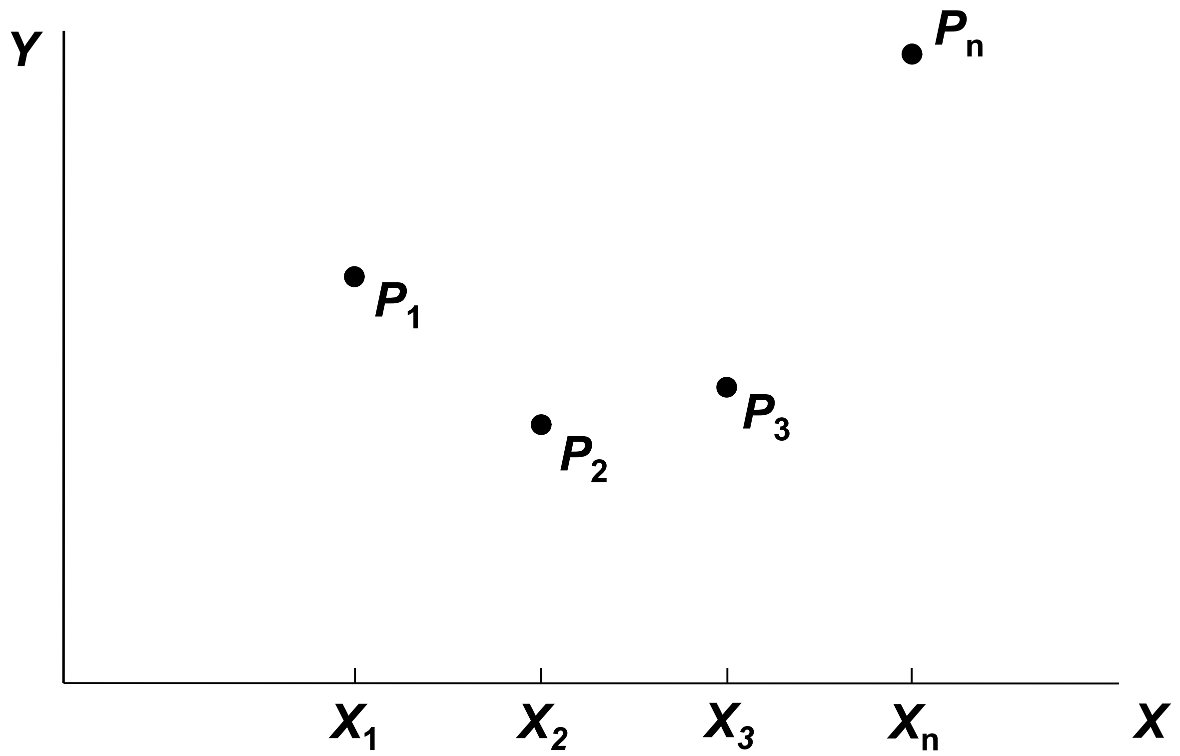
$\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon}$**, где** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **– возмущение.**

Модель парной регрессии



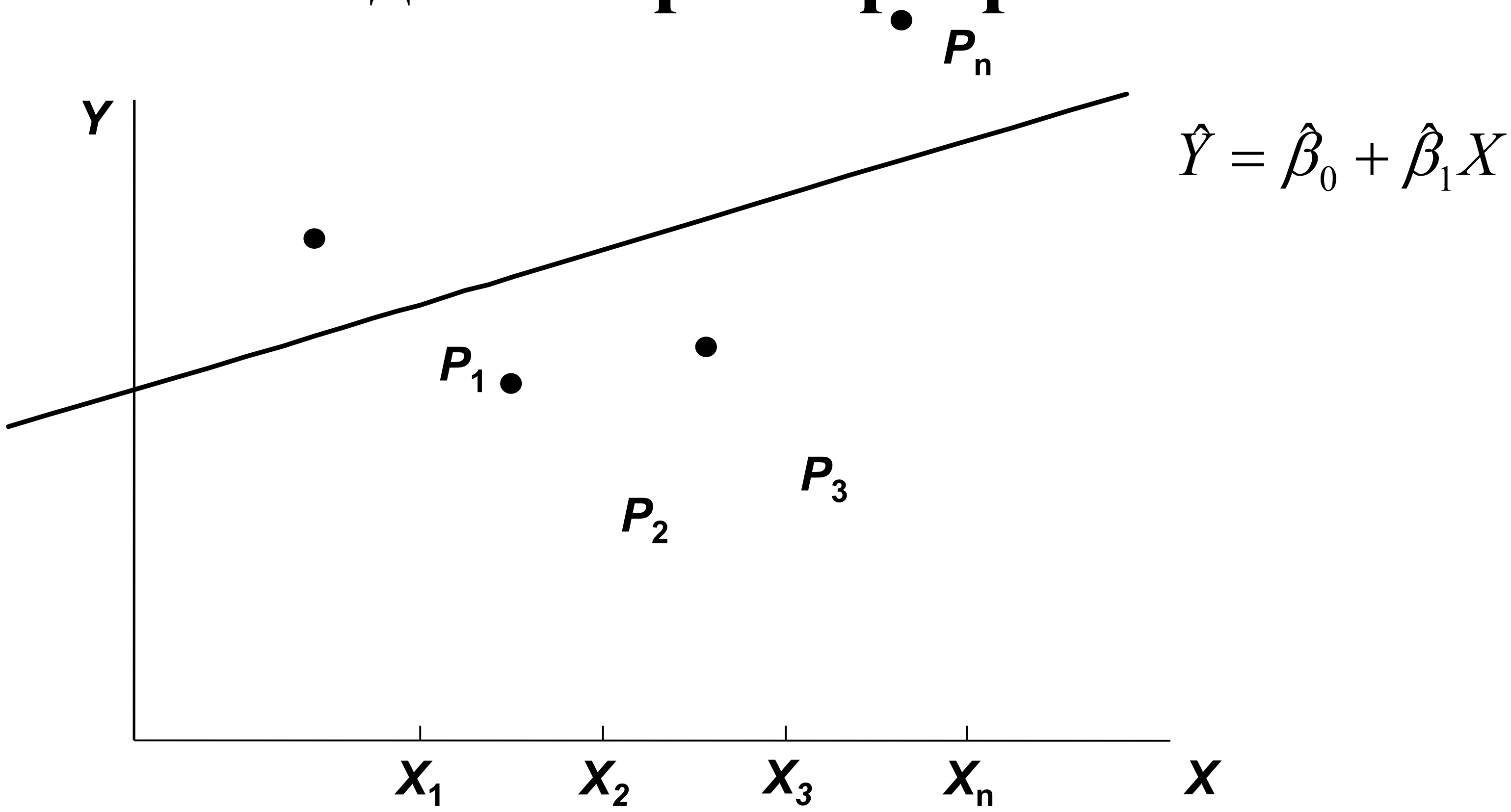
Таким образом, каждое значение переменной Y можно разделить на две части: детерминированную, $\beta_0 + \beta_1 X$, и случайную ε.

Модель парной регрессии



Но на практике мы не имеем линии $Y = \beta_0 + \beta_1 X$, а имеем только n пар наблюдений.

Модель парной регрессии



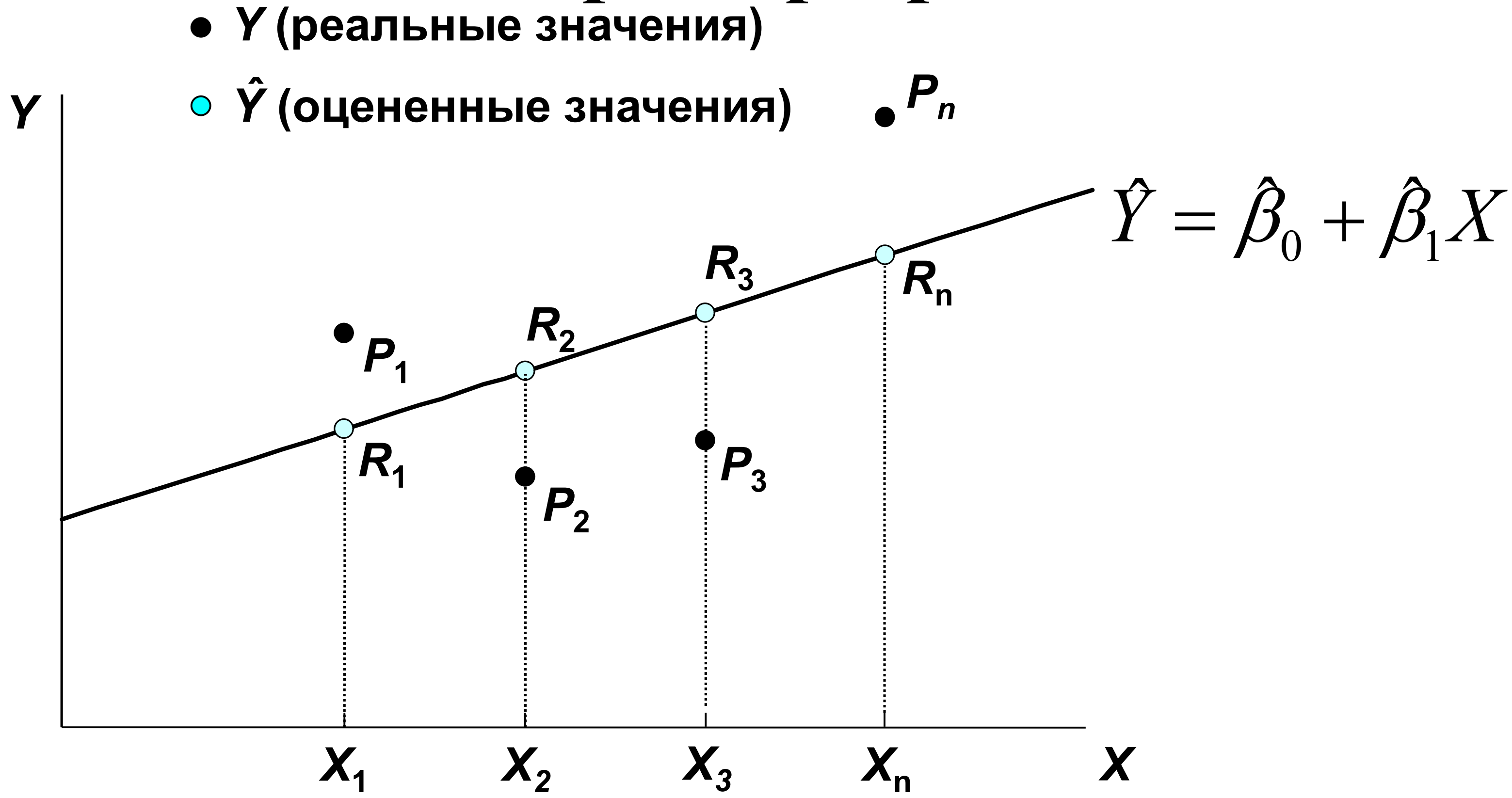
По n парам наблюдений мы должны построить оценки

параметров β_0 и β_1 (соответственно $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$).

Тогда линия $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

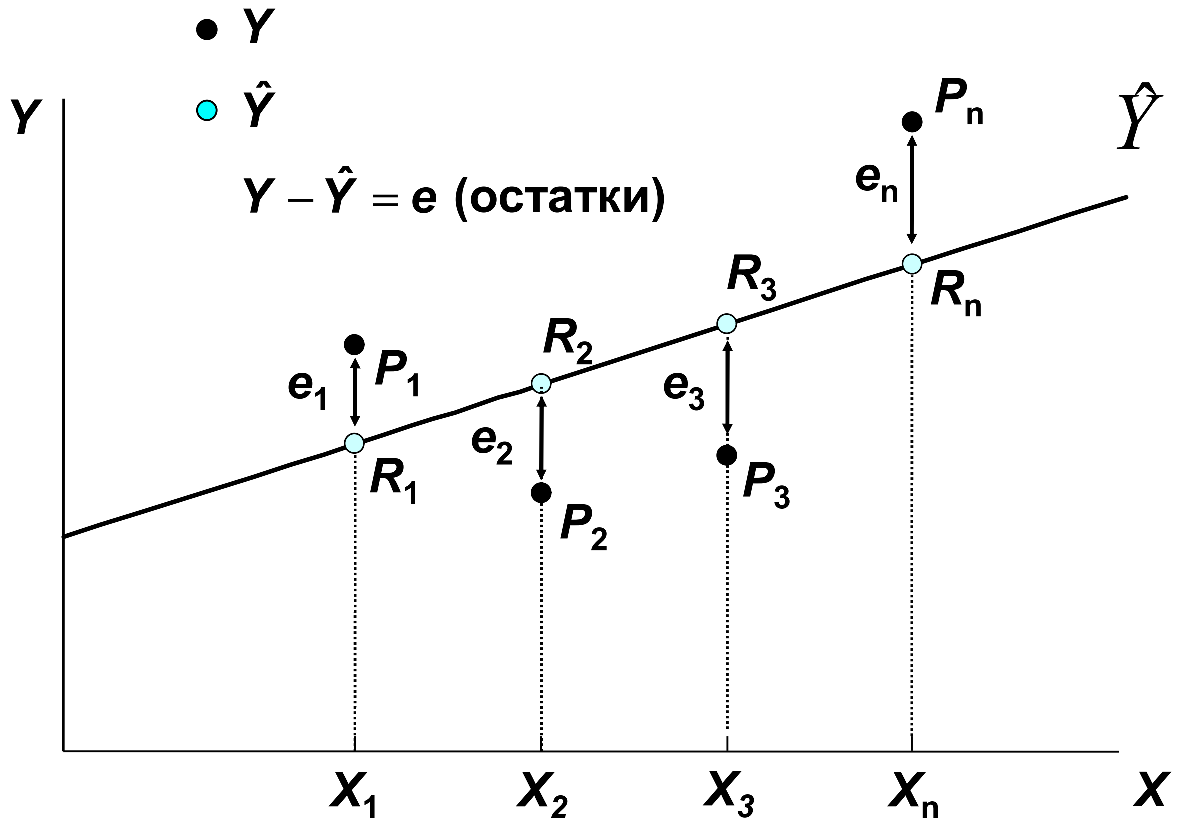
будет являться аппроксимацией линии $Y = \beta_0 + \beta_1 X$.

Модель парной регрессии



На рисунке проведена линия выборочной регрессии, лежащие на ней точки R_i называются оцененными значениями переменной Y.

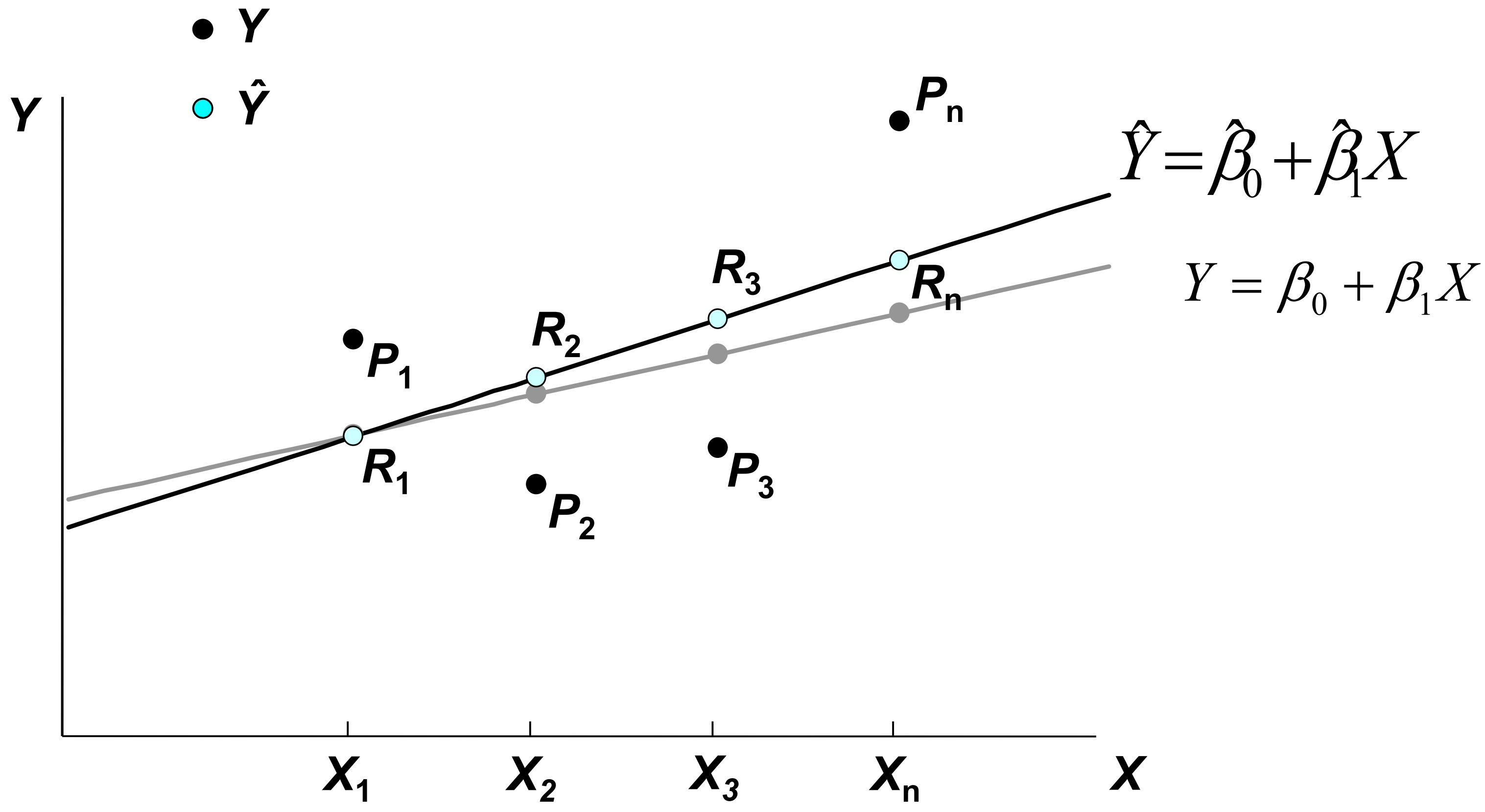
Модель парной регрессии



$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

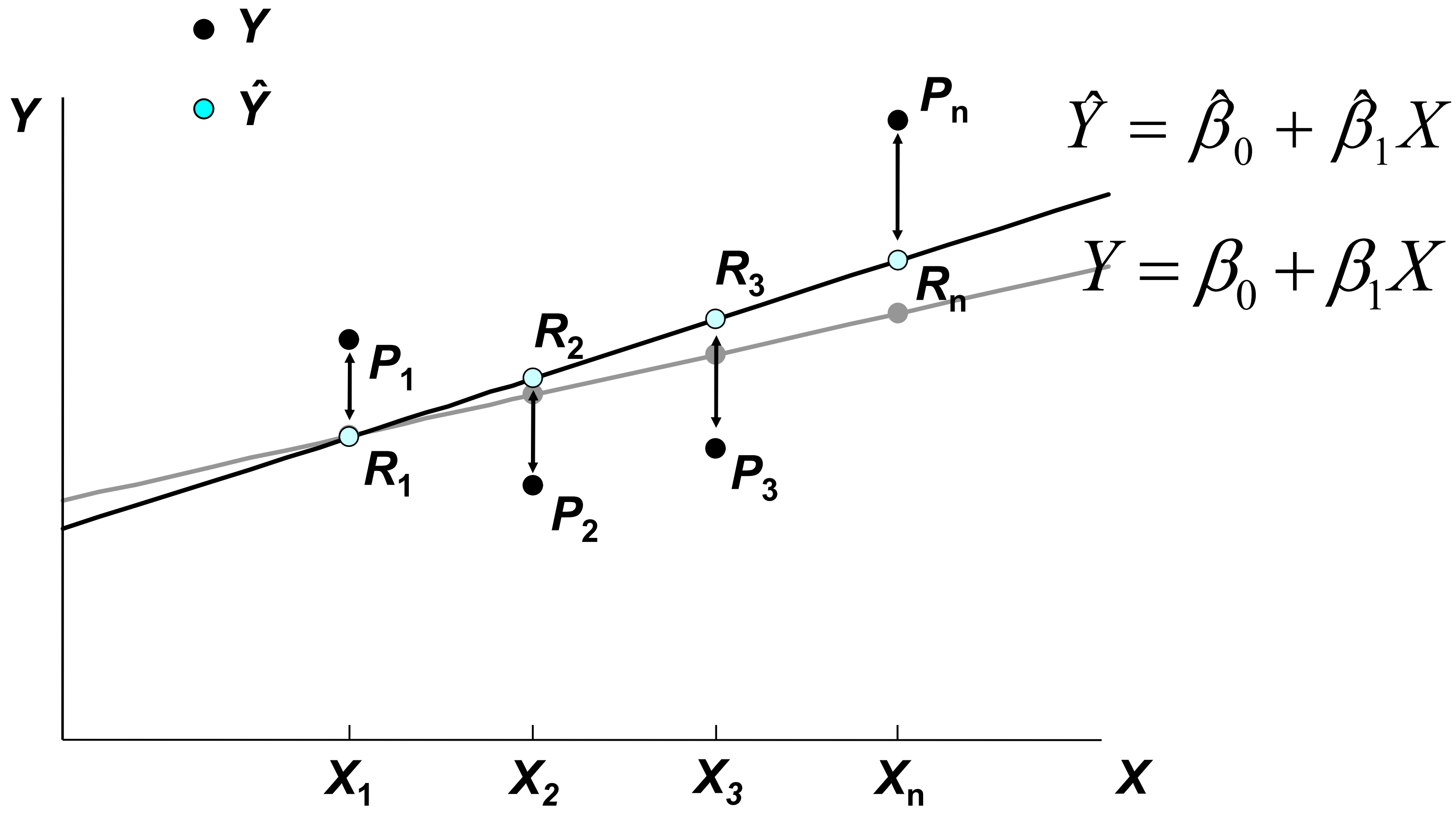
Разности между действительными и оцененными значениями переменной *Y* называются остатками регрессии.

Модель парной регрессии



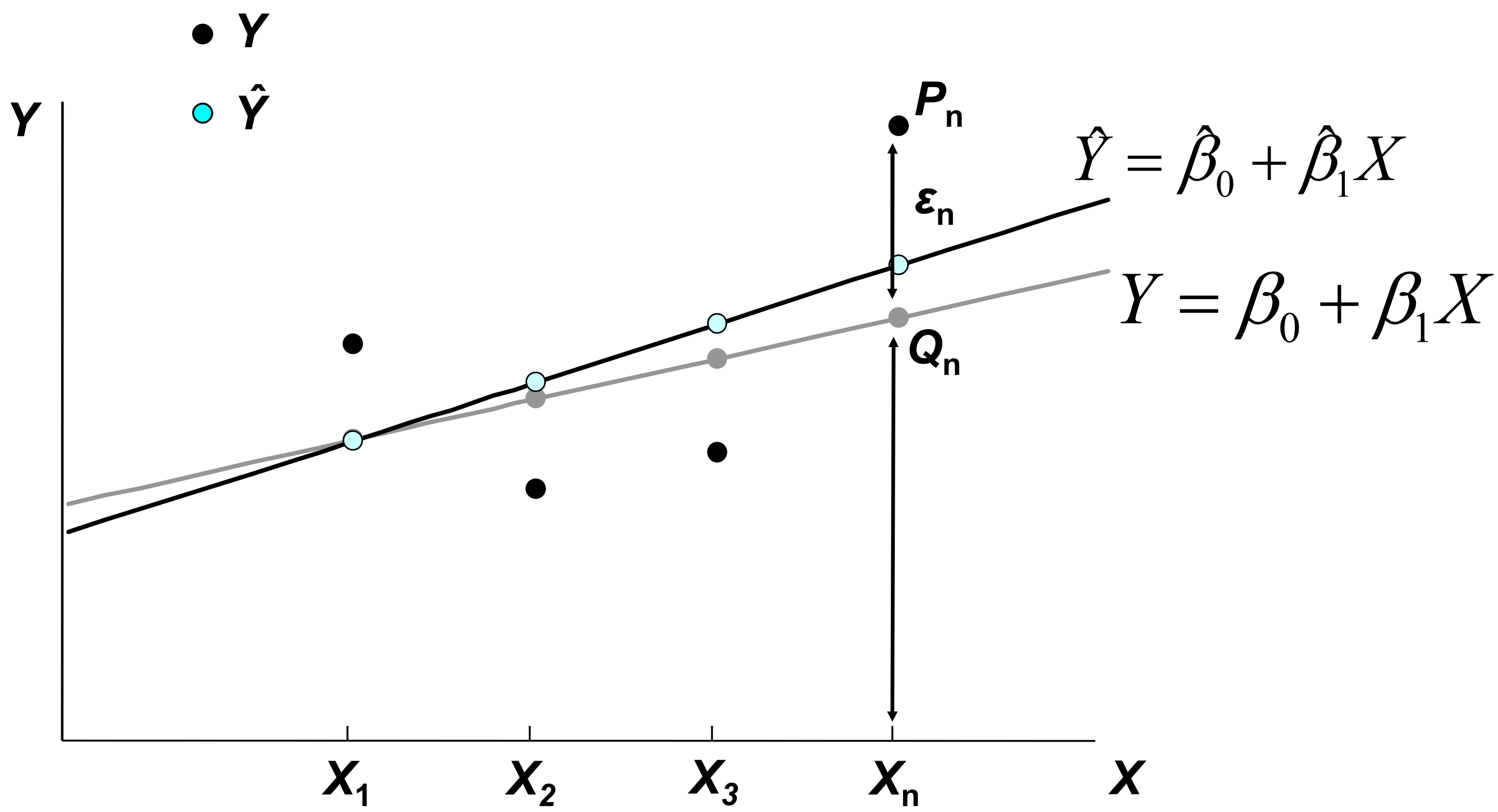
Серым цветом проведена линия теоретической регрессии, а черным – выборочной регрессии.

Модель парной регрессии



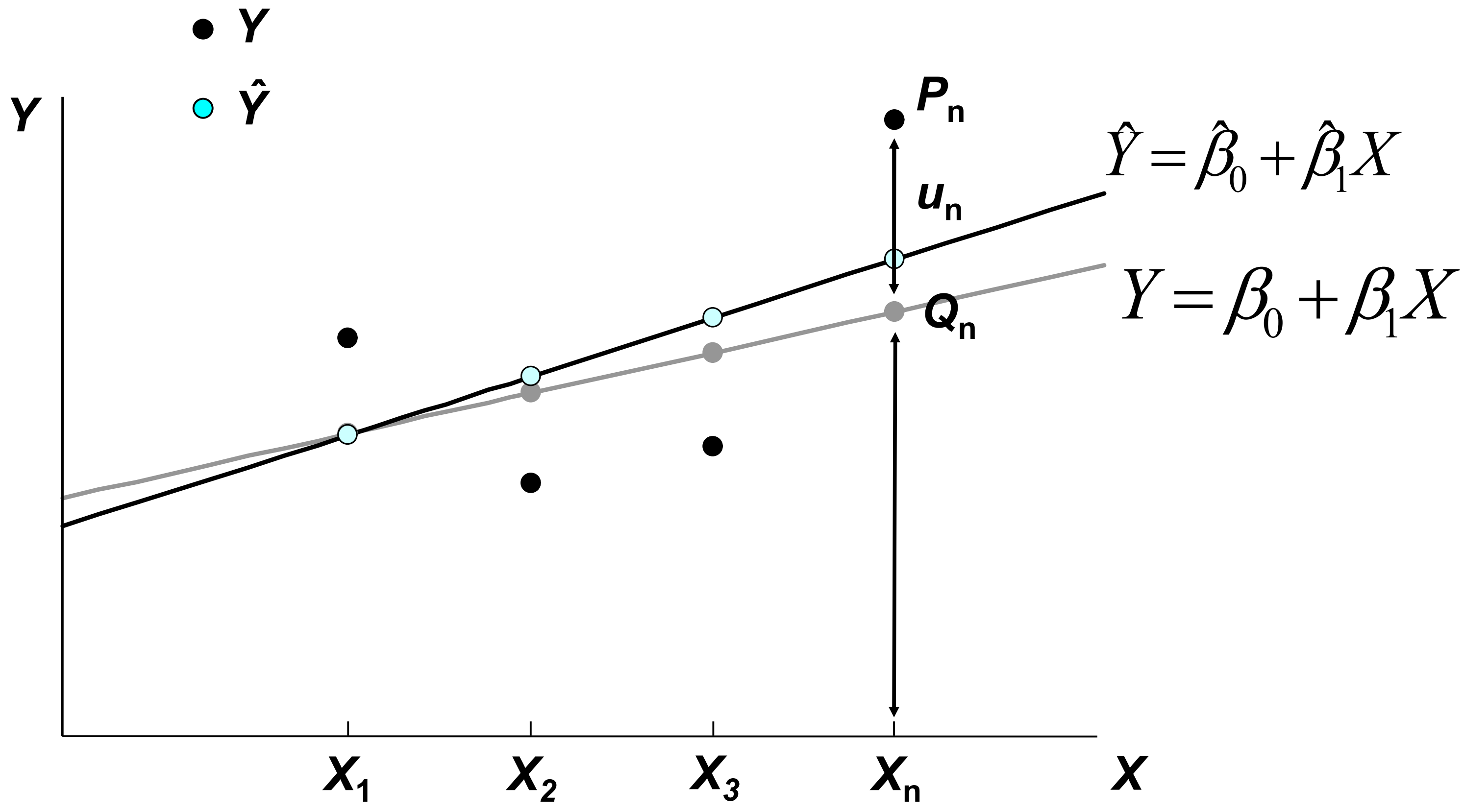
На рисунке изображены остатки e_i (отклонения от линии выборочной регрессии).

Модель парной регрессии



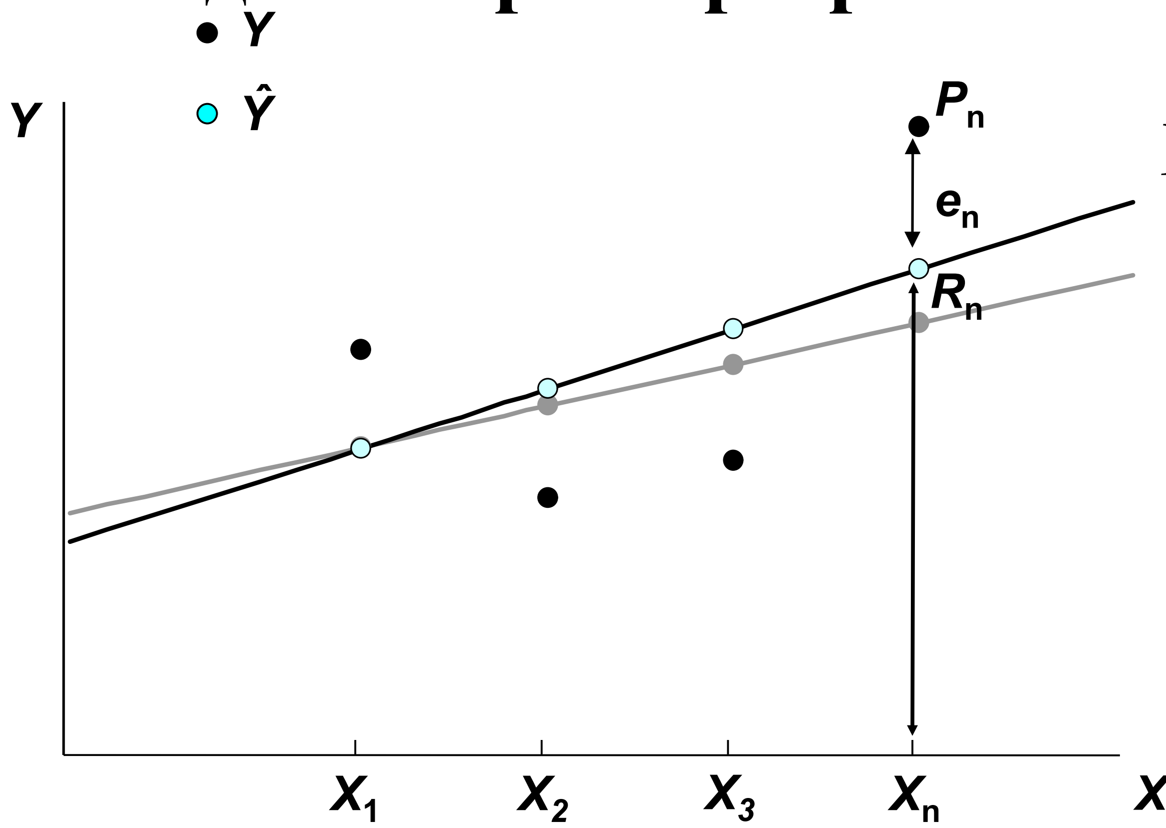
При использовании теоретической регрессии *Y* разлагается на детерминированную ($\beta_0 + \beta_1 X$) и случайную(ε) части.

Модель парной регрессии



Это разложение является чисто теоретическим (т.к. параметров β_0 и β_1 мы не знаем) и будет использовано при анализе свойств оценок коэффициентов регрессии.

Модель парной регрессии



$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

Другая декомпозиция легко выполнима на практике при известных $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$

Оценка коэффициентов выборочной регрессии

Метод наименьших квадратов (МНК) нахождения оценок коэффициентов регрессии состоит в минимизации суммы квадратов остатков регрессии RSS (residual sum of squares).

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e_1^2 + \ldots + e_n^2$$

МНК

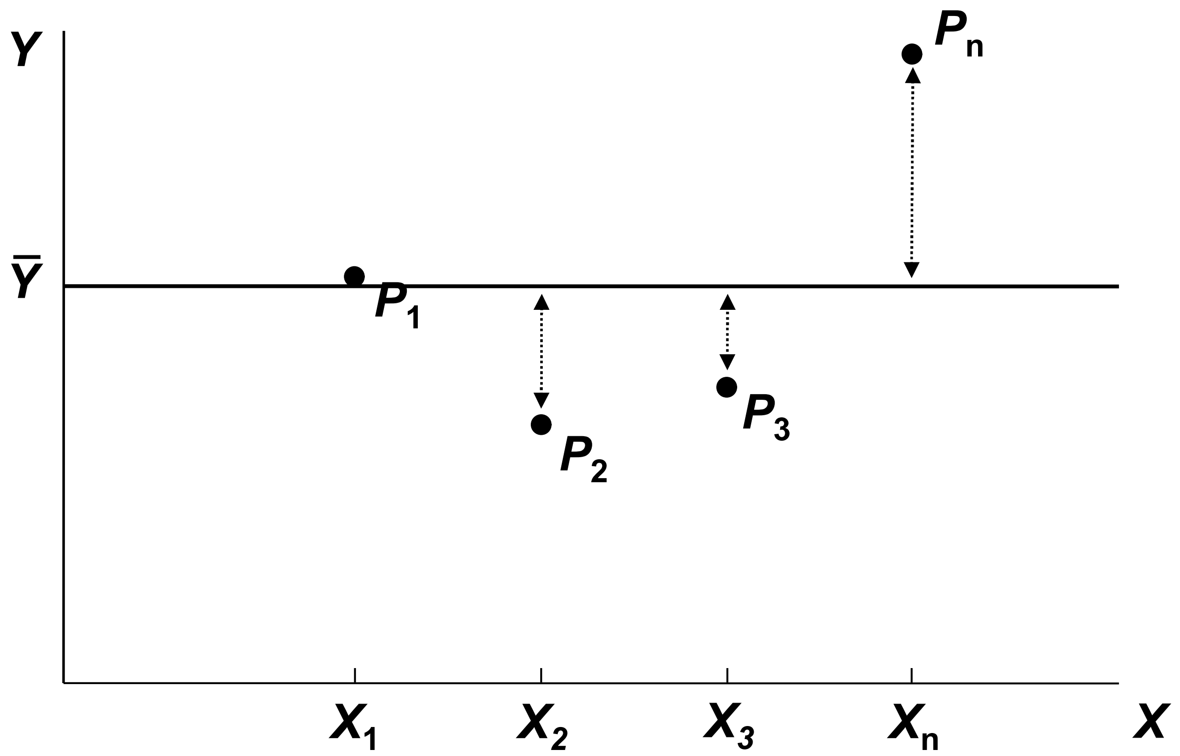
Минимизация *RSS* (residual sum of squares),

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e_1^2 + ... + e_n^2$$

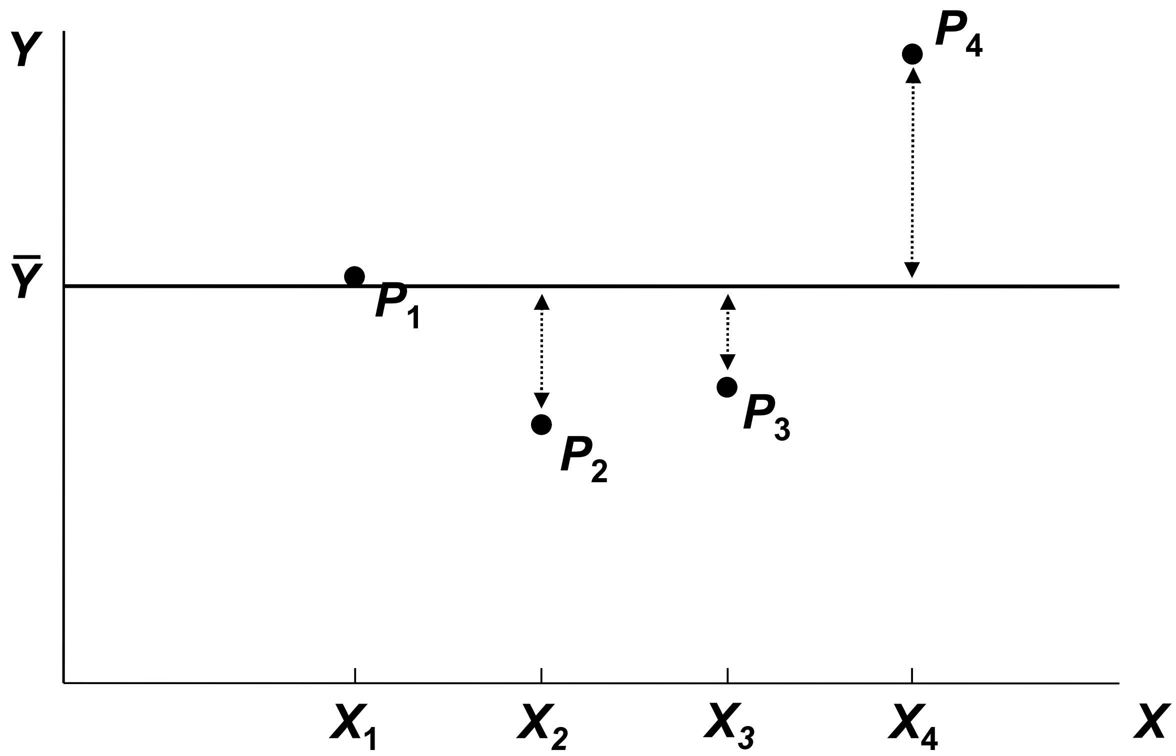
А не суммы остатков

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = e_1 + ... + e_n$$

Почему минимизируется сумма квадратов остатков, а не сумма остатков?

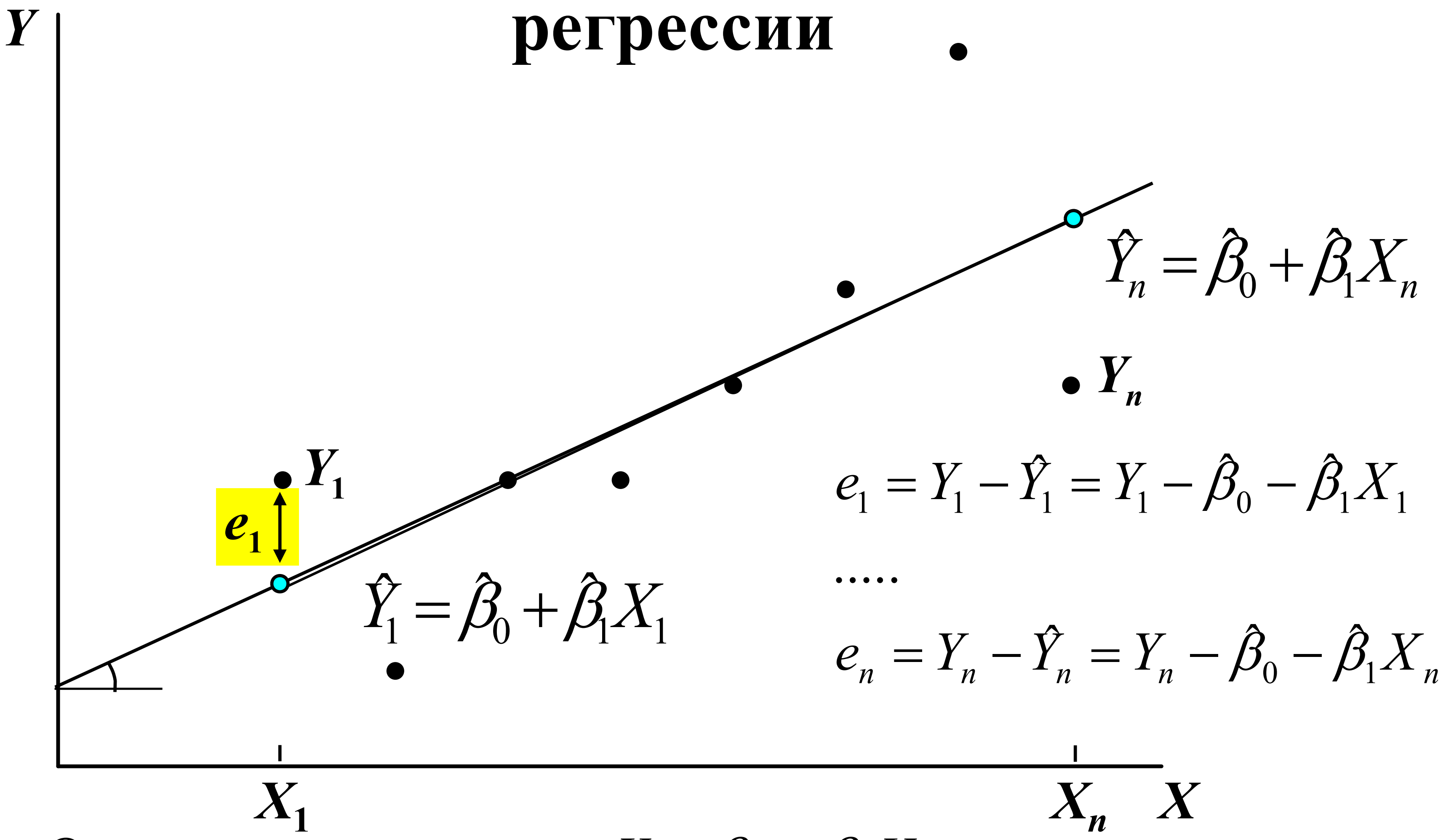


На примере горизонтальной линии легко увидеть, что сумма остатков равна 0, остатки разных знаков компенсируют друг друга, хотя и могут быть велики по абсолютной величине. Это будет иметь место и в общем случае.



МНК является не единственным возможным критерием, но очень удобен для практического применения (обладая и другими замечательными свойствами).

Нахождение оценок коэффициентов парной регрессии



Оцениваемая модель : $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$

Оцененная модель : $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

Выразим остатки регрессии через наблюдения.

Выражение для RSS

$$RSS = e_1^2 + \ldots + e_n^2 = (Y_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1)^2 + \ldots + (Y_n - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_n)^2$$

$$= \quad Y_1^2 + \quad \hat{\beta}_0^2 + \quad \hat{\beta}_1^2 X_1^2 - \quad 2\hat{\beta}_0 Y_1 - \quad 2\hat{\beta}_1 X_1 Y_1 + \quad 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 X_1$$

$$+ \ \ldots$$

$$+ \quad Y_n^2 + \quad \hat{\beta}_0^2 + \quad \hat{\beta}_1^2 X_n^2 - \quad 2\hat{\beta}_0 Y_n - \quad 2\hat{\beta}_0 X_n Y_n + \quad 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 X_n$$

$$= \sum Y_i^2 + n\hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 \sum X_i^2 - 2\hat{\beta}_0 \sum Y_i - 2\hat{\beta}_1 \sum X_i Y_i + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

Приводим подобные слагаемые.

Необходимое условие экстремума

$$RSS = \sum Y_i^2 + n\hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 \sum X_i^2 - 2\hat{\beta}_0 \sum Y_i - 2\hat{\beta}_1 \sum X_i Y_i + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2n\hat{\beta}_0 - 2\sum Y_i + 2\hat{\beta}_1 \sum X_i = 0$$

$$n\hat{\beta}_0 = \sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i \qquad (1)$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

Приравниваем к 0 частную производную по первой переменной .

Необходимое условие экстремума

$$RSS = \sum Y_i^2 + n\hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 \sum X_i^2 - 2\hat{\beta}_0 \sum Y_i - 2\hat{\beta}_1 \sum X_i Y_i + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\hat{\beta}_1 \sum X_i^2 - 2\sum X_i Y_i + 2\hat{\beta}_0 \sum X_i = 0$$

Приравниваем к 0 частную производную по второй переменной .

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\hat{\beta}_1 \sum X_i^2 - 2\sum X_i Y_i + 2\hat{\beta}_0 \sum X_i = 0$$

$$\hat{\beta}_1 \sum X_i^2 - \sum X_i Y_i + \hat{\beta}_0 \sum X_i = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_1 \sum X_i^2 - \sum X_i Y_i + (\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}) \sum X_i = 0$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему нормальных уравнений.

Делим на 2 и подставляем выражение для $\hat{\beta}_0$

через $\hat{\beta}_1$**.**

Выражение для $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 \sum X_i^2 - \sum X_i Y_i + (\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}) \sum X_i = 0$$

$$\hat{\beta}_1 \left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2 \right) = \sum X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

Альтернативное выражение для $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2},$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, x_i = X_i - \overline{X}, \quad y_i = Y_i - \overline{Y}$$

Разделим числитель и знаменатель на n-1

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{C\hat{o}v}(X, Y)}{\mathrm{V\hat{a}r}(X)}$$

Интерпретация оценок коэффициентов

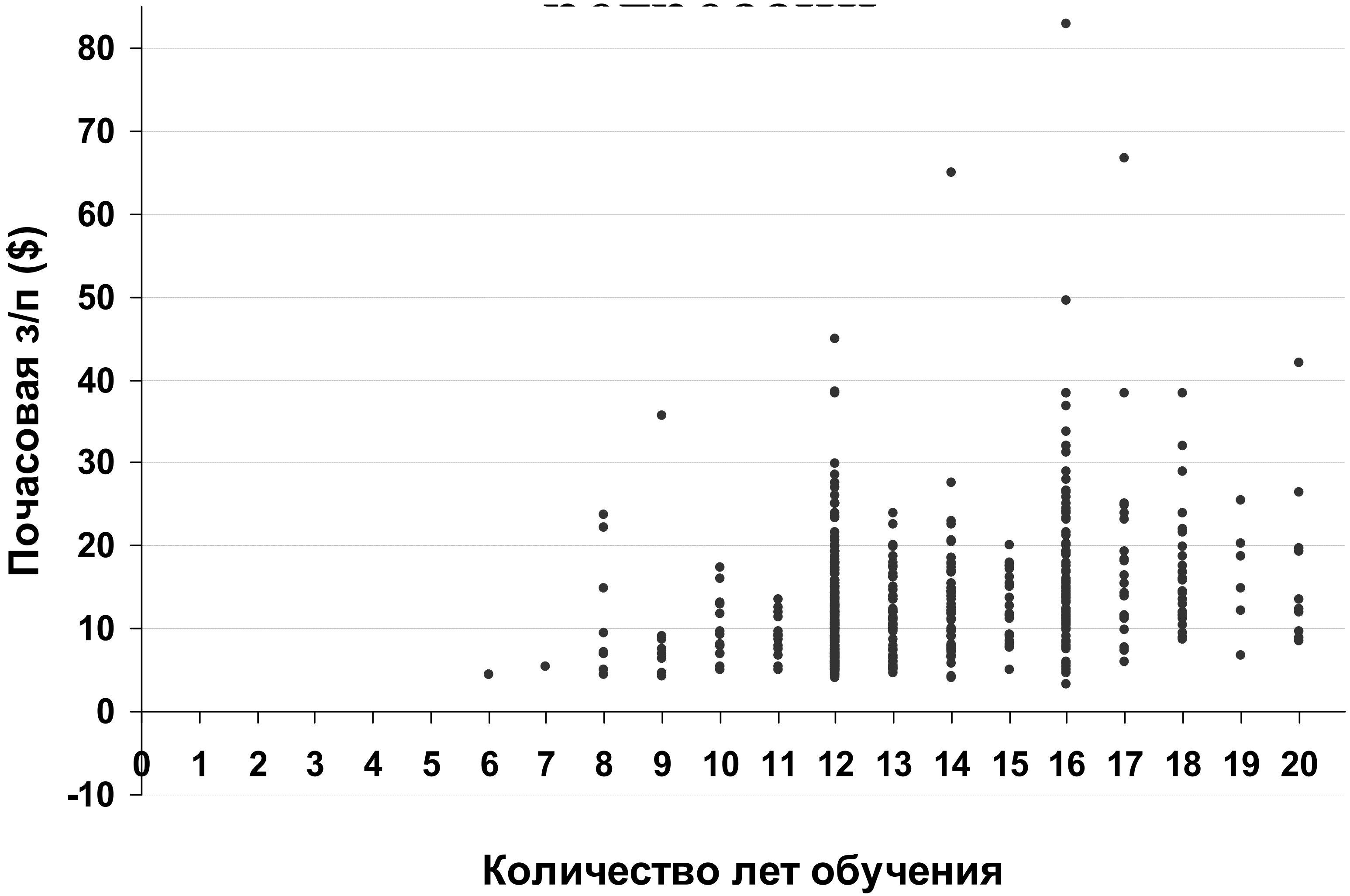
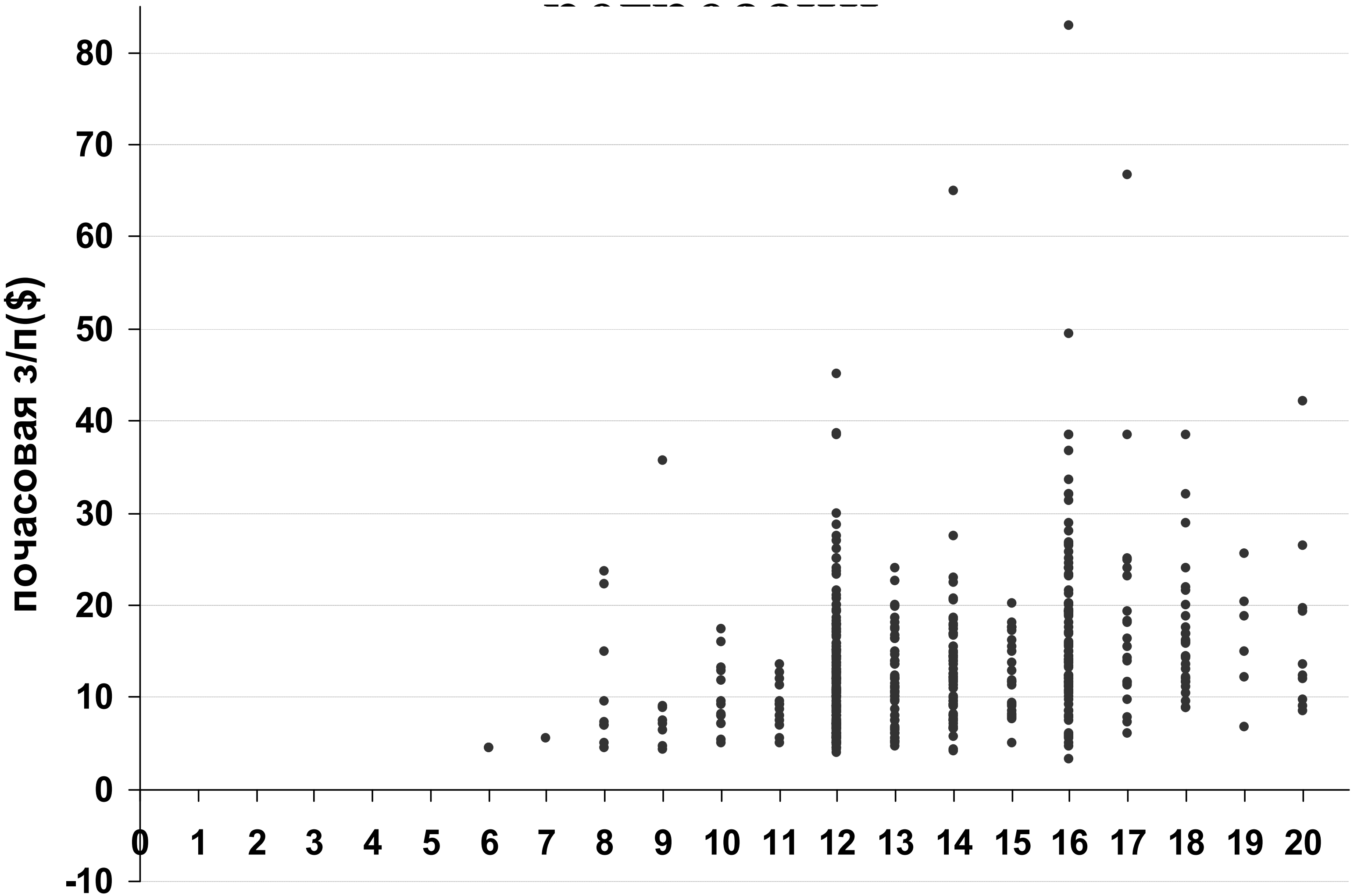


Диаграмма рассеяния отражает зависимость почасовой з/п в 1994 г. от длительности обучения для 570 индивидов из National Longitudinal Survey of Youth.

Интерпретация оценок коэффициентов



6 – 12 лет обучения – школьное образование (неполное или полное),

13 – 15 лет обучения – колледж, 16 – 18 лет – магистратура, 18 – 20 лет – докторантура.

Интерпретация оценок коэффициентов регрессии

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS                  Number of obs =     570
---------+------------------------------               F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016               Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875               R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------               Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117               Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501      8.102   0.000       .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305     -0.764   0.445      -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

Для оценки регрессии используется статистический пакет Stata.

Интерпретация оценок коэффициентов регрессии

```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =     570
---------+------------------------------           F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016           Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875           R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117           Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055    .1324501     8.102   0.000       .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004    1.820305    -0.764   0.445      -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

В первой колонке – названия переменных, во второй колонке – оценки коэффициентов регрессии.

Интерпретация оценок коэффициентов регрессии

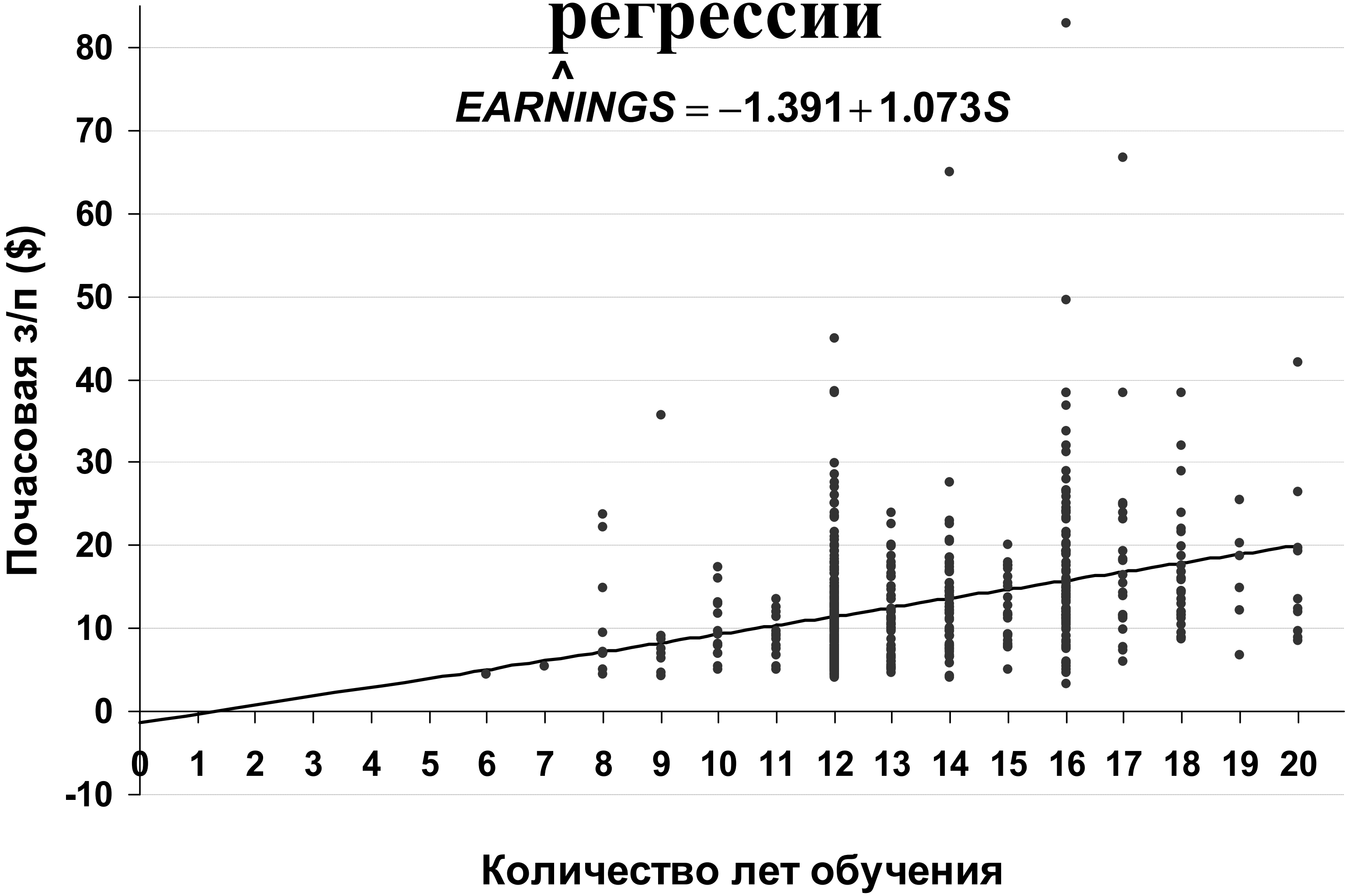
```
. reg EARNINGS S

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =     570
---------+------------------------------           F(  1,   568) =   65.64
   Model |  3977.38016     1  3977.38016           Prob > F      =  0.0000
Residual |  34419.6569   568  60.5979875           R-squared     =  0.1036
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1020
   Total |  38397.0371   569  67.4816117           Root MSE      =  7.7845

------------------------------------------------------------------------------
EARNINGS |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       S |   1.073055   .1324501      8.102   0.000       .8129028    1.333206
   _cons |  -1.391004   1.820305     -0.764   0.445      -4.966354    2.184347
------------------------------------------------------------------------------
```

Оценка коэффициента перед переменной *S* равна 1.073, а оценка свободного члена (перед cons) равна -1.391.

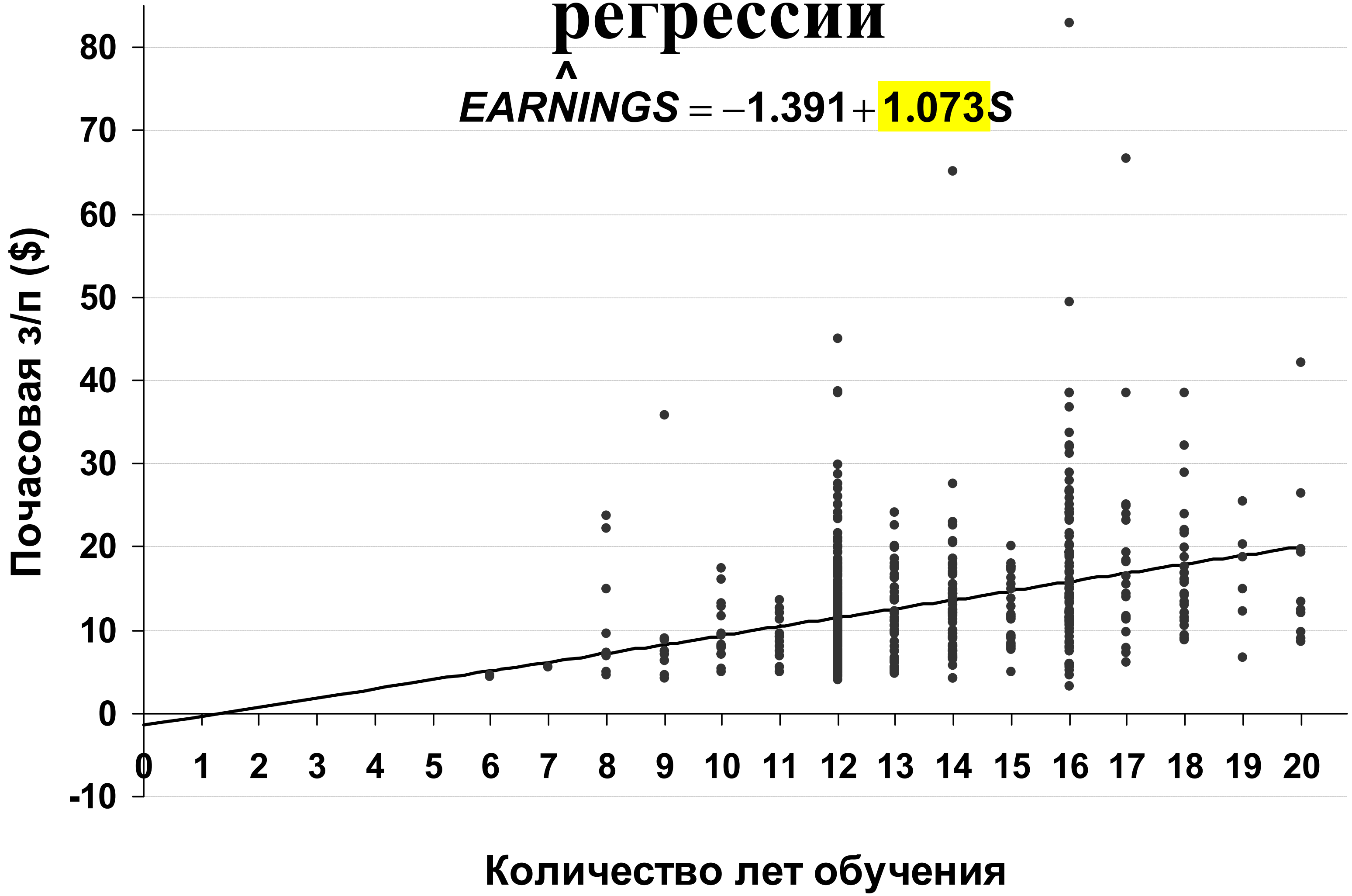
Интерпретация оценок коэффициентов регрессии



На рисунке изображена линия выборочной регрессии.

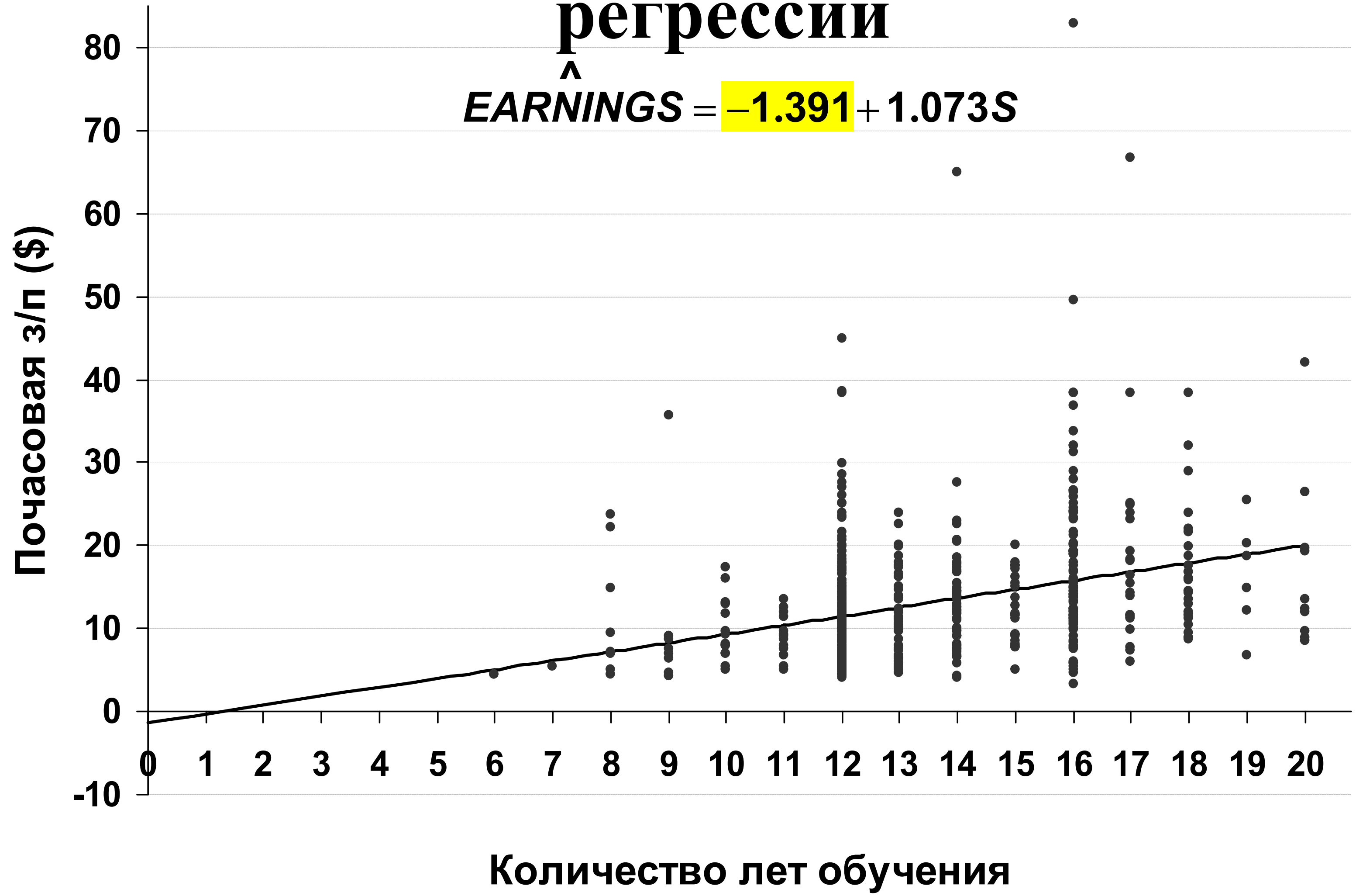
Интерпретация оценок коэффициентов регрессии

$$\widehat{EARNINGS} = -1.391 + 1.073S$$



S **измеряется в годах,** ***EARNINGS*** **в долларах в час. Интерпретация оценки коэффициента наклона: каждый дополнительный год обучения увеличивает почасовую з/п на $1.07.**

Интерпретация оценок коэффициентов регрессии



Интерпретация константы, состоящая в том, что индивидуум, не имеющий образования, должен доплачивать за возможность работать, не имеет смысла.

Интерпретация оценок коэффициентов регрессии

Однако экстраполяция проведена только для проучившихся более 6 лет, свободный член в данном примере не имеет содержательной экономической интерпретации.