Лекция по эконометрике № 5, 2 модуль

Мультиколлинеарность

**Демидова
Ольга Анатольевна
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru**
23.11.2020

План лекции № 5, 2 модуль

- Идеальная и практическая мультиколлинеарность (квазимультиколлинеарность).

- Последствия мультиколлинеарности

- Признаки наличия мультиколлинеарности

- Показатели степени мультиколлинеарности

- Методы борьбы с мультиколлинеарностью

Мультиколлинеарность

Теоретическая мультиколлинеарность данных – явление, наблюдаемое при нарушении условий теоремы Гаусса – Маркова об отсутствии точной линейной связи между регрессорами. При наличии теоретической мультиколлинеарности однозначное нахождение оценов МНК коэффициентов регрессии невозможно.

Теоретическая мультиколлинеарность

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_K X_K + \varepsilon$,

Теоретическая мультиколлинеарность: Rank(X) < k + 1

Ex.1.

$$\ln wage = \beta_1 + \beta_2 S + \beta_3 MALE + \beta_4 FEMALE + \ldots + \varepsilon,$$

$$FEMALE + MALE = i$$

Ex.2.

$$\ln price = \beta_1 + \beta_2 livsq + \beta_3 nonlivsq + \beta_4 totsq + \ldots + \varepsilon,$$

$$livsq + nonlivsq = totsq$$

Пример теоретической мультиколлинеарности

Ex.3.

$$\Pr ice = \beta_1 + \beta_2 D_I + \beta_3 D_{II} + \beta_4 D_{III} + \beta_5 D_{IV} + \ldots + \varepsilon,$$

$$D_I + D_{II} + D_{III} + D_{IV} = i$$

Dummy trap

Квазимультиколлинеарность

При работе с реальными данными часто имеет место квазимультиколлинеарность, когда между регрессорами существует почти линейная зависимость.

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\text{теоретическая мультиколлинеарность}:$$

$$\mathrm{rang}X < k + 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{rang}(X'X) < k + 1 \Rightarrow \det(X'X) = 0$$

$$\text{кваимультиколлинеарность}:$$

$$\det(X'X) \approx 0$$

Последствия мультиколлинеарности

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma_{\varepsilon}^{2} (X'X)^{-1},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}$$

Нестабильность оценок параметров регрессии и их дисперсий при малых изменениях исходных данных в случае мультиколлинеарности

Мультиколлинеарность, пример

$$Ex. \quad y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon,$$

$$x_1' x_1 = x_2' x_2 = 1, \sigma_\varepsilon^2 = 1,$$

$$x_1' x_2 = x_2' x_1 = r,$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon^2 (x' x)^{-1},$$

$$x' x = \begin{pmatrix} x_1' x_1 & x_1' x_2 \\ x_2' x_1 & x_2' x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \operatorname{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{1 - r^2}.$$

Признаки мультиколлинеарности

•Небольшие изменения в данных приводят к значительным изменениям в оценках коэффициентов регрессии.

•Многие коэффициенты по-отдельности не значимы, хотя в целом регрессия адекватная, R^2 может быть достаточно высоким.

•Оценки коэффициентов регрессии (обычно незначимых) могут иметь "неправильный" знак (с экономической точки зрения).

Индикаторы мультиколлинеарности

- **В корреляционной матрице факторов встречаются элементы, по модулю близкие к 1.**

- **Достаточно большое значение VIF – variance inflation factor хотя бы для одного фактора**

$$VIF(X_j) = \frac{1}{1 - R_j^2},$$

где R_j^2 – коэффициент множественной детерминации регрессора X_j на все остальные регрессоры.

$$(Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{TSS_j(1 - R_j^2)}, TSS_j = (X_j - \bar{X}_j \bar{i})'(X_j - \bar{X}_j \bar{i})).$$

Индикаторы мультиколлинеарности

CN (conditional number)

$$CN(X'X) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$$

CN – число обусловленности матрицы X’X.

Если этот показатель > 30, то это может свидетельствовать о мультиколлинеарности.

Пример мультиколлинеарности данных

$$EARNINGS = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 SVABC_1 + \beta_3 ASVABC_2 +$$

$$\beta_4 ASVABC_3 + \beta_5 ASVABC_4 + \varepsilon$$

reg EARNINGS S ASVAB01 ASVAB02 ASVAB03 ASVAB04

Source	SS	df	MS		
				Number of obs =	540
				F(5, 534) =	30.60
Model	24945.2724	5	4989.05448	Prob > F =	0.0000
Residual	87064.9587	534	163.042994	R-squared =	0.2227
				Adj R-squared =	0.2154
Total	112010.231	539	207.811189	Root MSE =	12.769

EARNINGS	Coef.	Std. Err.	t	P>t	[95% Conf.Interval]	
S	1.700556	.2781761	6.11	0.000	1.154102	2.247009
ASVAB01	.0640055	.0997875	0.64	0.522	-.1320188	.2600297
ASVAB02	.4385383	.091164	4.81	0.000	.2594542	.6176223
ASVAB03	-.1433842	.1202383	-1.19	0.234	-.3795824	.0928139
ASVAB04	-.0265344	.0985583	-0.27	0.788	-.2201438	.1670751
_cons	-20.48614	3.600184	-5.69	0.000	-27.5584	-13.41388

Много незначимых коэффициентов

Пример мультиколлинеарности данных

vif

Variable	VIF	1/VIF
ASVAB03	4.20	0.238017
ASVAB04	3.01	0.332532
ASVAB01	3.00	0.333805
ASVAB02	2.64	0.378371
S	1.52	0.657411
Mean VIF	2.87	

Методы борьбы с мультиколлинеарностью

- Переспецификация модели (функциональные преобразования переменных)
- Исключение одной или нескольких объясняющих переменных
- Метод главных компонент
- Использование ridge (гребневых), LASSO и т.п. оценок параметров

Метод главных компонент

$$X = [X_1, \dots, X_k], Var[X] = V, -$$

$$Z_1 = \alpha_{11} X_1 + \dots \alpha_{1k} X_k = \alpha_1 ' X, \quad \alpha_{11}^2 + \dots + \alpha_{1k}^2 = 1,$$

$$V\,\mathrm{ar}(Z_1) \to \max, \alpha_1 ' \alpha_1 = 1,$$

$$Var(Z_1) = \alpha_1 ' V \alpha_1,$$

$$L(\alpha_1) = \alpha_1 ' V \alpha_1 - \lambda_1 (\alpha_1 ' \alpha_1 - 1) \to \max,$$

$$V \alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1,$$

λ_1 *is the* max *characteristic root of* V,

α_1 *is the corresponding characteristic vector.*

Метод главных компонент

$$Let\ \lambda_1,\ldots,\lambda_k\ are\ the\ characteristic\ root\ of\ V\ (in\ decrea\sin g\ order),$$

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_k\ are\ the\ corresponding\ characteristic\ vectors.$$

$$Linear\ functions: Z_1 = \alpha_1{}' X,\ldots,Z_k = \alpha_k{}' X.$$

$$Then\ Var(Z_1) = \alpha_1{}' V\alpha_1 = \lambda_1,\ldots,Var(Z_k) = \alpha_k{}' V\alpha_k = \lambda_k.$$

$$Z_1,\ldots,Z_k\ are\ called\ the\ principal\ components\ of\ X_1,\ldots,X_k.$$

$$\Pr operties\ of\ principal\ components:$$

$$1) Var(Z_1)+\ldots+Var(Z_k) = \lambda_1+\ldots+\lambda_k =$$

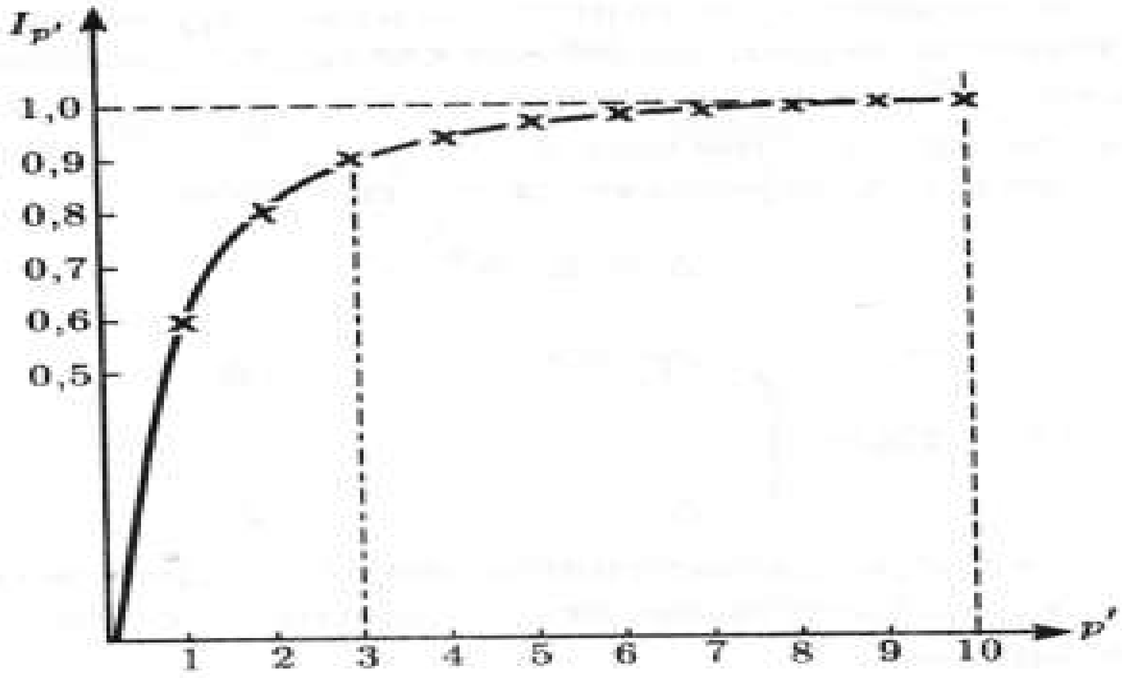
$$= trace(V) = Var(X_1)+\ldots+Var(X_k)$$

$$2) \alpha_1,\ldots,\alpha_k\ are\ orthogonal\ vectors \Rightarrow$$

$$Z_1,\ldots,Z_k\ are\ orthogonal\ or\ uncorrelated.$$

Пример

Доля общей дисперсии признаков, объясняемая одной, двумя, тремя и тд главными компотентами



Изменение относительной доли суммарной дисперсии исследуемых признаков, обусловленной первыми p' главными компонентами, в зависимости от p' (случай $p = 10$)

Примеры

1) См. примеры 4.1, 4.2 из книги «Прикладная статистика в задачах и упражнениях», авторы С.А.Айвазян, В.С.Мхитарян

2) См. кластеризацию регионов в пространстве двух главных компонент в статье

«Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП», авторы С. А. Айвазян, М. Ю. Афанасьев, А. В. Кудров

Пример 4.1

4.Б. Примеры решения типовых задач и упражнений

П р и м е р 4.1 (з а д а ч а). При формировании типообразующих признаков предприятий отрасли были обследованы 24 предприятия ($n = 24$) по трем технико-экономическим показателям: объему выпускаемой продукции $x^{(1)}$ (тыс.условных денежных единиц), основным фон-

дам $x^{(2)}$ (тыс.у.д.е.) и фонду оплаты труда $x^{(3)}$ (тыс.у.д.е.). По полученным в результате обследования исходным статистическим данным $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)})$, — $i = 1, 2, \ldots, 24$, — были получены оценки вектора средних значений $\hat{a} = (\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \hat{a}^{(3)})^\top = (420;\ 240;\ 85)^\top$ и ковариационной матрицы

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 451{,}39 & 271{,}17 & 168{,}70 \\ 271{,}17 & 171{,}73 & 103{,}29 \\ 168{,}70 & 103{,}29 & 66{,}65 \end{pmatrix}$$

Т р е б у е т с я:

1) *вывести уравнения для вычисления главных компонент* $z^{(1)}, z^{(2)}$ *и* $z^{(3)}$ *по заданным значениям исходных технико-экономических показателей* $x^{(1)}, x^{(2)}$ *и* $x^{(3)}$;
2) *определить относительные доли суммарной дисперсии, обусловленные одной и двумя главными компонентами*;

Пример 4.1

Р е ш е н и е

1) Для определения коэффициентов линейного преобразования (4.5), с помощью которого осуществляется переход к главным компонентам, необходимо решить вначале характеристическое уравнение (4.8), а затем использовать найденные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ для подстановки в системы уравнений (4.7), решения которых и дают коэффициенты $l_j = (l_{j1}, l_{j2}, \ldots, l_{jp})$. В данной задаче

$$|\widehat{\Sigma} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 451{,}39 - \lambda & 217{,}17 & 168{,}70 \\ 271{,}17 & 171{,}73 - \lambda & 103{,}29 \\ 168{,}70 & 101{,}29 & 66{,}65 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим $\lambda_1 = 680{,}40$, $\lambda_2 = 6{,}50$, $\lambda_3 = 2{,}86$.

Последовательно подставляя эти значения в систему (4.7) и решая эти системы относительно $l_j = (l_{j1}, l_{j2}, l_{j3})$, $-j = 1, 2, 3$, — получаем: $l_1 = (0{,}813; 0{,}496; 0{,}307)$; $l_2 = (-0{,}545; 0{,}832; 0{,}101)$, $l_3 = (-0{,}205; -0{,}249; 0{,}947)$, так что уравнения для вычисления главных компонент $z^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= 0{,}81(x^{(1)} - 420) + 0{,}50(x^{(2)} - 240) + 0{,}31(x^{(3)} - 85), \\ z^{(2)} &= -0{,}55(x^{(1)} - 420) + 0{,}83(x^{(2)} - 240) + 0{,}10(x^{(3)} - 85), \\ z^{(3)} &= -0{,}21(x^{(1)} - 420) - 0{,}25(x^{(2)} - 240) + 0{,}95(x^{(3)} - 85). \end{aligned} \qquad (4.20)$$

Пример 4.1

2) В соответствии с равенствами (4.10) и (4.10′) и вытекающим из них представлением $I_{p'}(Z)$ в виде (4.4′) имеем:

$$I_1(Z(X)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 0{,}9864;$$

$$I_2(Z(X)) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 0{,}9958;$$

что свидетельствует о том, что почти вся информация (а именно, 98,64%) о специфике предприятия данного типа, описанной с помощью переменных $x^{(1)}, x^{(2)}$ и $x^{(3)}$, *содержится в одной лишь первой главной компоненте* $z^{(1)}$.

Пример 4.2

Пример 4.2 (упражнение). Компонентный анализ проведен по данным двадцати сельскохозяйственных районов ($n = 20$) области, которые содержат результаты измерений следующих показателей: $x^{(1)}$ — число колесных тракторов на 100 га; $x^{(2)}$ — число зерноуборочных комбайнов на 100 га; $x^{(3)}$ — число орудий поверхностной обработки почвы на 100 га; $x^{(4)}$ — количество удобрений, расходуемых на гектар; $x^{(5)}$ — количество средств защиты растений, расходуемых на гектар (исходные статистические данные $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)} x_i^{(4)}, x_i^{(5)}$, — $i = 1, 2, \ldots, 20$, — приведены в табл. П2.1 Приложения 2).

Расчеты проводились по *нормированным данным* вида $(4.1')$ и представлены в следующей таблице:

Главные компоненты $z^{(i)}$	$z^{(1)}$	$z^{(2)}$	$z^{(3)}$	$z^{(4)}$	$z^{(5)}$
Собственные значения λ_i	3,04	1,41	0,43	0,10	0,02
Вклад i-й главной компоненты (%) в суммарную дисперсию	60,8	28,2	8,6	2,0	0,4
Суммарный вклад первых главных компонент (%)	60,8	89,0	97,6	99,6	100,0

При расчете относительного вклада главных компонент учитывалось, что $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = p = 5$. Для анализа были оставлены две первые главные компоненты ($p' = 2$), на которые приходится 89% суммарной вариации.

Для интерпретации главных компонент построена матрица факторных нагрузок

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}95^* & 0{,}97^* & 0{,}94^* & 0{,}24 & 0{,}56 \\ -0{,}19 & -0{,}17 & -0{,}28 & 0{,}88^* & 0{,}67^* \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Пример 4.2

Звездочкой (*) отмечены элементы, удовлетворяющие условию $|a_{ij}| > 0{,}6$, т. е. те, которые следует учитывать при интерпретации главных компонент $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$.

Требуется:

дать содержательную интерпретацию первых двух главных компонент.

Решение

Из вида матрицы **A** следует, что первая главная компонента наиболее тесно связана с показателями: $x^{(1)}$ — число колесных тракторов ($a_{11} = r(x^{(1)}, z^{(1)}) = 0{,}95$); $x^{(2)}$ — число зерноуборочных комбайнов ($a_{21} = r(x^{(2)}, z^{(1)}) = 0{,}97$); $x^{(3)}$ — число орудий поверхностей обработки почвы на 100 га ($a_{31} = r(x^{(3)}, z^{(1)}) = 0{,}94$). Поэтому *первая главная компонента $z^{(1)}$ интерпретирована как уровень механизации работ.*

Вторая главная компонента $z^{(2)}$ тесно связана с количествами удобрения ($x^{(4)}$) и средств защиты растений ($x^{(5)}$), расходуемых на гектар ($a_{42} = r(x^{(4)}, z^{(2)}) = 0{,}88$; $a_{52} = r(x^{(5)}, z^{(2)}) = 0{,}67$). Соответственно $z^{(2)}$ *интерпретируется как уровень химизации растениеводства.*