Эконометрика, 2020-2021, 3 модуль
Семинар 8
01.03.21
Для Группы Э_Б2018_Э_3
Семинарист О.А.Демидова

Обобщенный метод моментов

Задача 1.

Величины $X_1, ..., X_{100}$ распределены независимо и равномерно на отрезке $[-3a; 5a]$. Оказалось, что $\sum_{i=1}^{100} X_i = 200$ и $\sum_{i=1}^{100} |X_i| = 500$.

а) Оцените параметр a методом моментов, используя момент $\mathbb{E}(X_i)$.

б) Оцените параметр a обобщённым методом моментов, используя моменты $\mathbb{E}(X_i)$ и $\mathbb{E}(|X_i|)$, и взвешивающую матрицу $W = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$.

Краткое решение (Б.Демешев)

Находим ожидания: $\mathbb{E}(X_i) = a$, $\mathbb{E}(|X_i|) = 1.5a \cdot 0.75 + 4a \cdot 0.25 = 2.125a$.

Отсюда получаем моментные условия. Первое: $g_1(X_i, a) = X_i - a$, следовательно, $\bar{g}_1 = \bar{X} - a$. Второй: $g_2(X_i, a) = |X_i| - a$, следовательно, $\bar{g}_2 = \sum |X_i|/n - 2.125a$.

Если нужна оценка метода моментов, то получаем, что $\bar{X} - \hat{a} = 0$, следовательно, $\hat{a}_{MM} = \bar{X}$.

Если нужна оценка обобщённого метода моментов, то нужно минимизировать функцию:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} - a & \sum |X_i|/n - 2.125a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} - a \\ \sum |X_i|/n - 2.125a \end{pmatrix}$$

В силу нулевых внедиагональных весов задача упрощается до

$$Q(a) = 3(\bar{X} - a)^2 + 64(\sum |X_i|/n - 2.125a)^2 \to \min_a$$

Задача 2.

Винни-Пух и Пятачок хотят оценить неизвестный параметр a обобщённым методом моментов. Винни-Пух наблюдает независимые и одинаково распределённые величины X_i с математическим ожиданием $\mathbb{E}(X_i) = a+3$. А Пяточку известны независимые и одинаково распределённые величины Y_i с ожиданием $\mathbb{E}(Y_i) = a - 1$.

По выборке из 100 величин X_i и из 100 величин Y_i оказалось, что $\sum X_i = 500$ и $\sum Y_i = -50$.

а) Найдите оценку обобщённого метода моментов для единичной взвешивающей матрицы.

б) Оцените оптимальную взвешивающую матрицу, если дополнительно известно, что $\text{Var}(X_i) = a^2 + 25$, $\text{Var}(Y_i) = 9$, $\text{Cov}(X_i, Y_i) = -4$.

Краткое решение (Б.Демешев)

а) Выпишем моментные условия:

$$g_1(X_i, a) = X_i - a - 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_1 = \bar{X} - a - 3 = 2 - a$$
$$g_2(Y_i, a) = Y_i - a + 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_2 = \bar{Y} - a + 1 = 0.5 - a$$

Решим задачу минимизации невязки:

$$Q = \begin{pmatrix} 2-a & 0.5-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-a \\ 0.5-a \end{pmatrix} =$$
$$= (2-a)^2 + (0.5-a)^2 \to \min_a$$
$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2(2-a) - 2(0.5-a)|_{a=\hat{a}} = 0$$
$$\hat{a} = 1.25$$

б) Сначала найдём теоретическую оптимальную взвешивающую матрицу:

$$W = \mathrm{Var}^{-1}(g) = \begin{pmatrix} a^2+25 & -4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9(a^2+25)-16} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & a^2+25 \end{pmatrix}$$

Общий множитель нам не важен, он не влияет на точку оптимума. С точностью до общего множителя найдём оценку матрицы весов:

$$\widehat{W} \propto \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1.25^2+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 26.5625 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

4) (Демешев, Борзых, 18.1)

Величины X_i равномерны на отрезке $[-a; 3a]$ и независимы. Есть несколько наблюдений, $X_1 = 0.5, X_2 = 0.7, X_3 = -0.1$.

1. Найдите $\mathbb{E}(X_i)$ и $\mathbb{E}(|X_i|)$.
2. Постройте оценку метода моментов, используя $\mathbb{E}(X_i)$.
3. Постройте оценку метода моментов, используя $\mathbb{E}(|X_i|)$.
4. Постройте оценку обобщёного метода моментов используя моменты $\mathbb{E}(X_i), \mathbb{E}(|X_i|)$ и взвешивающую матрицу.

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите оптимальную теоретическую взвешивающую матрицу для обобщённого метода моментов
6. Постройте двухшаговую оценку обобщённого метода моментов, начав со взвешивающей матрицы W