



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Лекции по эконометрике № 6

3 модуль

Обобщенный метод моментов

Демидова

Ольга Анатольевна

https://www.hse.ru/staff/demidova_olga

E-mail: demidova@hse.ru

15.02.2021

- 1) Метод моментов**
- 2) Обобщенный метод моментов (GMM)**
- 3) Применение обобщенного метода моментов для оценки параметров уравнения регрессии**
- 4) Тестирование качества инструментов**
- 5) Пример применения рассмотренных тестов**

Метод моментов

Example (Ben Lambert).

$$X_1, \dots, X_n, \quad E(X) = \mu, \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

Method of moments

Analogy principle

$$E(X) = \mu, \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu},$$

$$\text{var}(X) = E(X - \mu)^2 = \sigma^2 \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2$$

2 неизвестных параметра и 2 уравнения.

Обобщенный метод моментов

Example (Ben Lambert). $X_1, \dots, X_n, \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(X) = \mu, \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu},$$

$$\text{var}(X) = E(X - \mu)^2 = \sigma^2 \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2$$

$$E(X - \mu)^3 = 0 \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^3 = 0$$

$$E(X - \mu)^4 = 3\sigma^4 \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^4 = 3\hat{\sigma}^4$$

**2 неизвестных параметра и 4 равенства.
Нет решения.**

Обобщенный метод моментов

$$g_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\mu},$$

$$g_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 - \hat{\sigma}^2$$

$$g_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^3$$

$$g_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^4 - 3\hat{\sigma}^4$$

Целевая функция

$$S = \sum_{j=1}^4 g_j^2$$

Обобщенный метод моментов

$$S = \sum_{j=1}^4 g_j^2$$

Это не лучший критерий, слагаемые могут быть с разными дисперсиями
Лучше критерий:

$$S' = \sum_{j=1}^4 w_j g_j^2, \quad w_j \propto \frac{1}{\text{var}(g_j)}$$

В общем случае:

$$g'Wg \rightarrow \min_{\theta},$$

Лучшая матрица W :

$$W_{\text{opt}} = \left(\text{var}(g(\hat{\theta}_{GMM})) \right)^{-1}, \text{ но } \hat{\theta}_{GMM} \text{ мы не знаем!}$$

Итерационная процедура

1^{ый} шаг

$$S = \sum_{i=1}^4 g_j^2 \longrightarrow \min_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2},$$

$$\hat{q}' = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_4)',$$

$$\text{var}^{-1}(\hat{q}) = W$$

2^{ой} шаг

$$S'' = q' W q \longrightarrow \min_{\hat{\mu}_{GMM}, \hat{\sigma}_{GMM}^2},$$

Обобщенный метод моментов для оценки параметров регрессии

**См слайды лекции Т.А.Ратниковой
«Обобщенный метод моментов»**

Упражнение из A. Colin Cameron and Pravin K. Trivedi,
"Microeconometrics Using Stata, Revised Edition", Chapter 6

Зависимая переменная `ldrugexp` – расходы на лекарства,

Независимые переменные:

`hi_emptunion` – индикатор наличия медицинской страховки от работодателя или профсоюза

`totchr` - количество хронических заболеваний

`age` – возраст

`female` – 1 для женщин и 0 для мужчин

`blhisp` – 1, если индивид афроамериканец или латиноамериканец,

`linc` – логарифм дохода

Переменная $hi_emrunion$ является эндогенной

Для нее предлагается использовать в качестве инструментов переменные

$ssratio$ - отношение социального дохода индивида к доходу индивида из всех источников

$lowincome$ – индикатор низкого дохода

$multlc$ – индикатор наличия филиалов у фирмы

$firmsz$ – размер фирмы

Проверка релевантности инструментов

reg hi_empunion ssiratio lowincome multlc firmsz if linc!=0

Source	SS	df	MS	Number of obs = 10389		
-----+-----				F(4, 10384) = 138.33 > 10		
инструменты		релевантны				
Model	123.792669	4	30.9481673	Prob > F	= 0.0000	
Residual	2323.17817	10384	.223726711	R-squared	= 0.0506	
-----+-----				Adj R-squared = 0.0502		
Total	2446.97083	10388	.235557454	Root MSE	= .473	
-----+-----						
hi_empunion	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
ssiratio	-.2129432	.0129737	-16.41	0.000	-.2383742	-.1875123
lowincome	-.085222	.012327	-6.91	0.000	-.1093853	-.0610588
multlc	.170205	.0201351	8.45	0.000	.1307364	.2096737
firmsz	.0032505	.0022089	1.47	0.141	-.0010794	.0075804
cons	.4957219	.0083119	59.64	0.000	.4794289	.5120148

Пример. Тест Хаусмана

. hausman ivreg ols, constant

---- Coefficients ----

	(b)	(B)	(b-B)	sqrt(diag(V_b-V_B))
	ivreg	ols	Difference	S.E.
-----+-----				
hi_empunion	-.8623417	.0738788	-.9362205	.1758671
totchr	.4499069	.4403807	.0095261	.0038483
age	-.0128661	-.0035295	-.0093366	.0018757
female	-.0175681	.0578055	-.0753736	.0167383
blhisp	-.2150253	-.1513068	-.0637185	.0169631
linc	.0842253	.0104815	.0737437	.014698
_cons	6.753569	5.861131	.8924384	.1760679

b = consistent under Ho and Ha; obtained from ivregress

B = inconsistent under Ha, efficient under Ho; obtained from regress

Test: Ho: difference in coefficients not systematic

$$\chi^2(7) = (b-B)'[(V_b-V_B)^{-1}](b-B) = 28.34$$

Prob>chi2 = 0.0002, т.е. есть разница в оценках OLS и IV

Пример. Тест Дарбина-Ву-Хаусмана

```
Instrumental variables (2SLS) regression ----- Number of obs = 10089
----- Wald chi2(6) = 1940.44
----- Prob > chi2 = 0.0000
----- R-squared = 0.0720
----- Root MSE = 1.312

+-----+
-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| ldrugexp | Coef. | Std. Err. | z | P>|z| | [95% Conf. Interval] |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| hi_empunion | .8623417 | .1777945 | -4.85 | 0.000 | -1.210813 | .5138708 |
| totchr | .4499069 | .0103177 | 43.61 | 0.000 | .4296846 | .4701291 |
| age | .0128661 | .00266 | -4.84 | 0.000 | .0180795 | .0076526 |
| female | .0175681 | .0302219 | -0.58 | 0.561 | -.076802 | .0416658 |
| blhisp | .2150253 | .0378252 | -5.68 | 0.000 | .2891614 | .1408892 |
| linc | .0842253 | .0202653 | 4.16 | 0.000 | .0445059 | .1239446 |
| _cons | -6.753569 | .2333782 | -28.94 | 0.000 | -6.296156 | -7.210982 |

+-----+
Instrumented: hi_empunion
Instruments: totchr age female blhisp linc ssratio lowincome multlc firmsz

+-----+
estat endogenous
+-----+
Tests of endogeneity
Ho: variables are exogenous
+-----+
Durbin (score) chi2(1) = 32.043 (p = 0.0000)
Wu-Hausman E(1,10081) = 32.1196 (p = 0.0000)
```

Пример. Тест на валидность инструментов

```
ivregress gmm ldrugexp (hi_empunion = ssiratio lowincome multlc firmsz) totchr age female blhisp linc,
wmatrix(robust)
```

Instrumental variables (GMM) regression Number of obs = 10089

Wald chi2(6) = 2042.12,

Prob > chi2 = 0.0000

R-squared = 0.0829

GMM weight matrix: Robust Root MSE = 1.3043

	Robust					
ldrugexp	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
hi_empunion	-.8124043	.1846433	-4.40	0.000	-1.174299	-.45051
totchr	.449488	.010047	44.74	0.000	.4297962	.4691799
age	-.0124598	.0027466	-4.54	0.000	-.0178432	-.0070765
female	-.0104528	.0306889	-0.34	0.733	-.0706019	.0496963
blhisp	-.2061018	.0382891	-5.38	0.000	-.2811471	-.1310566
linc	.0796532	.0203397	3.92	0.000	.0397882	.1195183
_cons	6.7126	.2425973	27.67	0.000	6.237118	7.188081

Instrumented: hi_empunion

Instruments: totchr age female blhisp linc ssiratio lowincome multlc firmsz

estat overid

Test of overidentifying restriction: Hansen's J chi2(3) = 11.5903 (p = 0.0089) – инструменты не валидны

Пример. Тест на валидность других инструментов

```
ivregress gmm ldrugexp (hi_empunion = ssiratio multlc ) totchr age female blhisp linc, wmatrix(robust)
```

Instrumental variables (GMM) regression Number of obs = 10089

Wald chi2(6) = 1952.65

Prob > chi2 = 0.0000

R-squared = 0.0406

GMM weight matrix: Robust Root MSE = 1.3341

Robust						
ldrugexp	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
-----+-----						
hi_empunion	-.9932795	.2046731	-4.85	0.000	-1.394431	-.5921275
totchr	.4509508	.0103104	43.74	0.000	.4307428	.4711588
age	-.0141509	.0029014	-4.88	0.000	-.0198375	-.0084644
female	-.0281716	.0321881	-0.88	0.381	-.0912592	.034916
blhisp	-.2231048	.0395972	-5.63	0.000	-.3007139	-.1454957
linc	.0944632	.0218959	4.31	0.000	.0515481	.1373783
cons	6.877821	.2579974	26.66	0.000	6.372155	7.383486

Instrumented: hi_empunion

Instruments: totchr age female blhisp linc ssiratio multlc

. estat overid

Test of overidentifying restriction:

Hansen's J chi2(1) = 1.04754 (p = 0.3061) – инструменты валидны

Пример. Проверка релевантности других инструментов

```
. reg hi_empunion ssiratio multlc
```

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	10,391
Model	112.446792	2	56.2233961	F(2, 10388)	=	250.15
Residual	2334.81237	10,388	.224760529	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.0459
				Adj R-squared	=	0.0458
Total	2447.25917	10,390	.235539862	Root MSE	=	.47409

hi_empunion	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
ssiratio	-.2345431	.0126097	-18.60	0.000	-.2592606	-.2098257
multlc	.178299	.0198357	8.99	0.000	.1394172	.2171808
_cons	.4910065	.0083007	59.15	0.000	.4747355	.5072776

$F(2, 10388) = 250.15 > 10$
инструменты релевантны

Пример. Сравнение с оценками МНК

```
. reg ldrugexp hi_empunion totchr age female blhisp linc
```

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	10,089
Model	3312.06802	6	552.011337	F(6, 10082)	=	361.32
Residual	15403.0482	10,082	1.52777705	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.1770
				Adj R-squared	=	0.1765
Total	18715.1162	10,088	1.85518599	Root MSE	=	1.236

ldrugexp	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
hi_empunion	.0738788	.0261088	2.83	0.005	.0227003	.1250573
totchr	.4403807	.0095731	46.00	0.000	.4216155	.459146
age	-.0035295	.001886	-1.87	0.061	-.0072265	.0001675
female	.0578055	.0251633	2.30	0.022	.0084803	.1071307
blhisp	-.1513068	.0338083	-4.48	0.000	-.2175778	-.0850358
linc	.0104815	.0139518	0.75	0.453	-.0168667	.0378298
_cons	5.861131	.1531845	38.26	0.000	5.560858	6.161403



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931
www.hse.ru