Обобщенный метод моментов

Определение моментной функции

- Стандартный метод инструментальных переменных – это частный случай ОММ (обобщенного метода моментов)
- Если у нас имеется L инструментов, мы можем определить функцию

$$g_i(\beta) = Z_i \varepsilon_i = Z_i (Y_i - X_i' \beta)$$

которая называется моментом и представляет собой вектор размерности L, определенный для каждого наблюдения i=1,…, N

Моментное тождество

Если инструменты экзогенны, то должны быть выполнены условия

$$E(g_i(\beta)) = 0$$

Эти условия называют ***моментными тождествами*** или ***условиями ортогональности***

Эмпирическое моментное тождество

Выборочный аналог моментного тождества будет иметь вид:

$$\overline{g}(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i\left(Y_i - X_i'\beta\right) = \frac{1}{N} Z'\varepsilon$$

Оценка вектора коэффициентов $\widehat{\beta}$ будет решением уравнения (1)

$$\overline{g}(\beta) = 0$$

Оценка ОММ

- Если число моментных тождеств L (которое соответствует числу инструментов) совпадает с количеством регрессоров K,
- то решение уравнения (1) совпадает с оценкой метода инструментальных переменных $\widehat{\beta}_{IV}$

Оценка ОММ

- Если L>K, инструментов больше, чем регрессоров, то вместо уравнения (1) в рамках ОММ решают задачу оптимизации квадратичной формы вида:

$$J(\beta) = N(\overline{g}(\beta))' W \, \overline{g}(\beta)$$

где W – некая весовая матрица размера L*L

Оценка ОММ

- Из условия первого порядка:

$$\frac{\partial J(\beta)}{\partial \beta} = 0$$

находят оценку:

$$\widehat{\beta}_{OMM} = \left(X' Z W Z' X\right)^{-1} X' Z W Z' Y$$

- В зависимости от выбора весовой матрицы W таких оценок можно построить множество

Выбор весовой матрицы

- Существует, однако, некий оптимальный вариант выбора W.
- Пусть ковариационная матрица ошибки регрессии равна $V(\varepsilon) = \Omega$
- Рассмотрим матрицу

$$S = \frac{1}{N} E\left(Z'\,\varepsilon\varepsilon'\,Z\right) = \frac{1}{N}\left(Z'\,\Omega\,Z\right)$$

Выбор весовой матрицы

- Ковариационную матрицу оценки вектора коэффициентов $\widehat{\beta}_{OMM}$ можно записать следующим образом:

$$V\left(\widehat{\beta}_{OMM}\right)=\frac{1}{N}\left(X'ZW\,Z'X\right)^{-1}X'ZW\,SW\,Z'X\left(X'ZW\,Z'X\right)^{-1}$$

Если теперь выбрать $W_{opt}=S^{-1}$, то мы сможем получить оценку эффективного ОММ

Оценка эффективного ОММ

$$\hat{\beta}_{ЭОММ} = \left(X'ZS^{-1}Z'X\right)^{-1} X'ZS^{-1}Z'Y$$

с ковариационной матрицей

$$V\left(\hat{\beta}_{ЭОММ}\right) = \frac{1}{N}\left(X'ZS^{-1}Z'X\right)^{-1}$$

Оценивание матрицы Ώ

- Рассмотрим два случая:
  - гомоскедастичность

$$\Omega = \sigma^2 I$$

  - гетероскедастичность

$$\Omega \neq \sigma^2 I$$

Оценивание матрицы Ώ

- Гомоскедастичность

$$S = \frac{1}{N} E\left(Z'\varepsilon\varepsilon' Z\right) = \frac{1}{N} E\left(Z'\Omega Z\right) = \frac{\sigma^2}{N} E\left(Z'Z\right)$$

$$\hat{S} = \frac{\hat{\sigma}^2}{N} E\left(Z'Z\right)$$

$$\hat{W}_{opt} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{N} Z'Z\right)^{-1}$$

Оценивание матрицы $\acute{\Omega}$

- Гетероскедастичность

В качестве $\acute{\Omega}$ можно использовать

$$\widehat{\Omega} = \begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_1^{\,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \widehat{\varepsilon}_N^{\,2} \end{pmatrix}$$

и тогда

$$\widehat{S} = \frac{1}{N}\left(Z'\widehat{\Omega}Z\right)$$

Оценивание матрицы $\acute{\Omega}$ в случае гетероскедастичности

На практике в случае гетероскедастичности оценивание осуществляется в три шага:

1. Оценивается исходное уравнение $Y=X\beta+\varepsilon$ методом инструментальных переменных
2. На основании остатков $\widehat{\varepsilon} = Y - X\widehat{\beta}_{IV}$ строится

$$\widehat{W}_{opt} = \widehat{S}^{-1} = \left(\frac{1}{N}\left(Z'\widehat{\Omega}Z\right)\right)^{-1}$$

Оценивание матрицы $\acute{\Omega}$ в случае гетероскедастичности

3. Вычисляется

$$\widehat{\beta}_{ЭОММ} = \left(X'Z\left(Z'\widehat{\Omega}Z\right)^{-1} Z'X \right)^{-1} X'Z\left(Z'\widehat{\Omega}Z\right)^{-1} Z'Y$$

с ковариационной матрицей

$$V\left(\widehat{\beta}_{ЭОММ}\right) = \frac{1}{N}\left(X'Z\,S^{-1}\,Z'X\right)^{-1}$$

- Эту процедуру можно сделать итерационной для повышения точности оценок

Достоинства и недостатки ОММ

- Достоинства:
  - в отсутствии гетероскедастичности $\widehat{\beta}_{OMM}$ асимптотически не хуже $\widehat{\beta}_{IV}$
  - при наличии гетероскедастичности $\widehat{\beta}_{OMM}$ эффективнее, чем $\widehat{\beta}_{IV}$
- Недостатки
  - неэффективность на малых выборках

Тестирование качества инструментов

1. Проверка коррелированности эндогенных регрессоров и инструментов

Если $Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$

X1 – эндогенны, Z – инструменты, то

необходимо построить регрессии каждого столбца из X1 на Z и посмотреть на R2 или на F-статистику, которая должна быть >10, иначе Z – слабые инструменты

Тестирование качества инструментов

- 2. Проверка экзогенности инструментов

  Тест Хансена:

$$J\left(\widehat{\beta}_{ЭОММ}\right) = N\left(\overline{g}\left(\widehat{\beta}\right)\right)' \widehat{S}^{-1}\, \overline{g}\left(\widehat{\beta}\right) \sim \chi^2_{L-K}$$

Его модификация при гетероскедастичности

$$J\left(\widehat{\beta}_{ЭОММ}\right) = \widehat{\varepsilon}'\, Z\left(Z'\widehat{\Omega}Z\right)^{-1} Z'\, \widehat{\varepsilon} \sim \chi^2_{L-K}$$

Его модификация при гомоскедастичности (тест Саргана)

$$J\left(\widehat{\beta}_{ЭОММ}\right) = \frac{1}{\widehat{\sigma}^2_{\varepsilon}}\, \widehat{\varepsilon}'\, Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\, \widehat{\varepsilon} \sim \chi^2_{L-K}$$

Тестирование эндогенности регрессоров

Вместо теста Хаусмана можно проводить процедуру Дарбина-Ву:

пусть в модели $Y = X_1\beta_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

X_2 - единственный эндогенный регрессор, тогда процедура осуществляется в следующие три шага:

Тестирование эндогенности регрессоров

1. Строится вспомогательная регрессия

$$X_2 = X_1\alpha_1 + \gamma Z + \nu \quad \rightarrow \quad \hat{\nu}$$

Теперь необходимо выяснить, будет ли X_2 ортогонален ε, но это то же самое, что выяснение ортогональности ν и ε

2. Для этого строится регрессия

$$Y = X_1\beta_1 + \beta_2 X_2 + \delta\hat{\nu} + \varepsilon$$

3. Проверяется значимость $\hat{\nu}$