

Эконометрика, 2020-2021, 4 модуль
Семинар 2
12.04.2021
Группы Э_Б2018_Э_3
Семинарист О.А.Демидова

Одномерные временные ряды. Проверка на стационарность

Демидова, Малахов, Эконометрика,

12.1 Проверить на стационарность процесс:

$$Y_t = 1 + 1.3Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim wn(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad T \rightarrow \infty.$$

12.2 Проверить на стационарность и обратимость следующий процесс:

$$Y_t = 1.2 + 0.7Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim wn(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad T \rightarrow \infty.$$

Задание 12.2 Проверьте стационарность следующих процессов (во всех случаях

$$\varepsilon_t \sim wn(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad T \rightarrow \infty):$$

А) $Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2} + \varepsilon_t,$

Б) $Y_t = 1.21 - 0.1Y_{t-1} + 0.56Y_{t-2} + \varepsilon_t,$

В) $Y_t = 2.3 - Y_{t-2} + \varepsilon_t$

Задание 12.3 Проверьте, являются ли следующие процессы обратимыми (во всех случаях

$$\varepsilon_t \sim wn(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad T \rightarrow \infty):$$

А) $Y_t = 5.3 + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1} - 0.42\varepsilon_{t-2},$

Б) $Y_t = 1 + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2},$

В) $Y_t = 1.2Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.03\varepsilon_{t-2}.$

4)

1. Рассмотрим AR(2) процесс $Y_t = 4 + Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + u_t$, где u_t — белый шум с единичной дисперсией.

а) Является ли данный процесс стационарным?

б) Найдите $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}), \text{Cov}(Y_t, Y_{t-2})$.

Решение (Б.Демешев)

а) Выпишем характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$\lambda^2 - \lambda + 0.4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{0.6}i}{2}$$

$$|\lambda_1| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{0.6}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{0.6}{4}} = 0.2 < 1$$

$$|\lambda_2| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{0.6}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{0.6}{4}} = 0.2 < 1$$

Поскольку оба корня по модулю не превосходят единицы, то существует не смотрящее в будущее стационарное решение.

б) Прежде чем находить ковариации, заметим, что

$$\text{Cov}(y_t, u_t) = 1$$

$$\text{Cov}(y_{t-1}, u_t) = 0$$

$$\text{Cov}(y_{t-2}, u_t) = 0$$

Теперь составим систему уравнений:

$$\gamma_0 = \text{Cov}(Y_t, Y_t) = \text{Cov}(4 + Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + u_t, Y_t) = \gamma_1 - 0.4\gamma_2 + 1$$

$$\gamma_1 = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \text{Cov}(4 + Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + u_t, Y_{t-1}) = \gamma_0 - 0.4\gamma_1$$

$$\gamma_2 = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = \text{Cov}(4 + Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + u_t, Y_{t-2}) = \gamma_1 - 0.4\gamma_0$$

Решив её, получим следующие значения:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_1 - 0.4\gamma_2 + 1 \\ \gamma_1 = \gamma_0 - 0.4\gamma_1 \\ \gamma_2 = \gamma_1 - 0.4\gamma_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_0 = \frac{175}{72} \approx 2.4 \\ \gamma_1 = \frac{125}{72} \approx 1.7 \\ \gamma_2 = \frac{55}{72} \approx 0.8 \end{cases}$$

5)

Кролик считает, что процесс Y_i подчиняется уравнению:

$$Y_t = 2 + 0.2Y_{t-1} + u_t + 0.6u_{t-1},$$

где процесс u_t — белый шум с дисперсией $\text{Var}(u_t) = \sigma_u^2$.

а) Есть ли у этого уравнения стационарное решение (является ли данный процесс стационарным)? Если да, то найдите для него $\mathbb{E}(Y_t)$ и $\text{Var}(Y_t)$.

Решение (Б.Демешев)

Корень лагового многочлена

$$1 - 0.2L = 0$$

больше единицы, значит, уравнение имеет не заглядывающее в будущее стационарное решение. Тогда, пользуясь тем, что $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_{t-1})$, найдём матожидание:

$$\mathbb{E}(Y_t) = 2 + 0.2\mathbb{E}(Y_{t-1}) \Rightarrow \mathbb{E}(Y_t) = 2.5$$

Чтобы найти дисперсию, перепишем исходное уравнение с помощью оператора лага:

$$(1 - 0.2L)Y_t = 2 + u_t + 0.6u_{t-1}$$

$$\begin{aligned} Y_t &= 2.5 + \frac{1}{1 - 0.2L}(u_t + 0.6u_{t-1}) \\ &= 2.5 + u_t + (0.6 + 0.2)u_{t-1} + 0.2(0.6 + 0.2)u_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \sigma_u^2 (1 + (0.6 + 0.2)^2 + 0.2^2(0.6 + 0.2)^2 + 0.2^4(0.6 + 0.2)^2 + \dots)^2 \\ &= \sigma_u^2 \left(1 + \frac{(0.6 + 0.2)^2}{1 - 0.2^2}\right) \approx 1.67\sigma_u^2 \end{aligned}$$

6)

Рассмотрим стационарный процесс, удовлетворяющий уравнению $Y_t = 1 + 0.6Y_{t-1} + u_t - 0.3u_{t-1}$, где u_t — белый шум с $u_t \sim \mathcal{N}(0; 4)$.

а) Найдите $\mathbb{E}(Y_t)$, $\text{Var}(Y_t)$.

б) Найдите первые два значения автокорреляционной и частной автокорреляционной функций.

Решение (Б.Демешев)

а) $\mathbb{E}(Y_t) = 1 + 0.6\mathbb{E}(Y_{t-1})$, следовательно, $\mathbb{E}(Y_t) = 2.5$.

б) Расписываем Y_t через u_t , u_{t-1} и более ранние ошибки, получаем

$$Y_t = 1 + 0.6 \cdot 1 + u_t + 0.3u_{t-1} + \dots$$

Отсюда замечаем, что $\text{Cov}(Y_t, u_t) = 4$, $\text{Cov}(Y_t, u_{t-1}) = 0.3 \cdot 4 = 1.2$.

Находим систему на ковариации:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \text{Cov}(Y_t, Y_t) = \text{Cov}(Y_t, 1 + 0.6Y_{t-1} + u_t - 0.3u_{t-1}) = 0.6\gamma_1 + 4 - 0.3 \cdot 1.2 \\ \gamma_1 = \text{Cov}(Y_{t-1}, Y_t) = \text{Cov}(Y_{t-1}, 1 + 0.6Y_{t-1} + u_t - 0.3u_{t-1}) = 0.6\gamma_0 - 0.3 \cdot 4 \\ \gamma_2 = \text{Cov}(Y_{t-2}, Y_t) = \text{Cov}(Y_{t-2}, 1 + 0.6Y_{t-1} + u_t - 0.3u_{t-1}) = 0.6\gamma_1 \end{cases}$$

Корреляции находим по правилу $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

Решая систему, находим, что $\gamma_0 = 4.56$, $\rho_1 = 0.34$, $\rho_2 = 0.20$

в) Частную корреляцию находим из обычной с помощью соотношений, $\phi_{11} = \rho_1 = 0.34$, $\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = 0.10$.

Задачи из учебника Д.Борзых, Б.Демешев

Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta \hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4} y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7} \Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

1. Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы.
2. Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%.
3. Сделайте вывод о стационарности ряда.
4. Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу t -распределением?

11.12 Пусть y_t – стационарный процесс. Верно ли, что стационарны процессы:

1. $z_t = 2y_t$;
2. $z_t = y_t + 1$;
3. $z_t = \Delta y_t$;
4. $z_t = 2y_t + 3y_{t-1}$?