



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Лекция по эконометрике №1, модуль

Временные ряды - 1

Демидова

Ольга Анатольевна

https://www.hse.ru/staff/demidova_olga

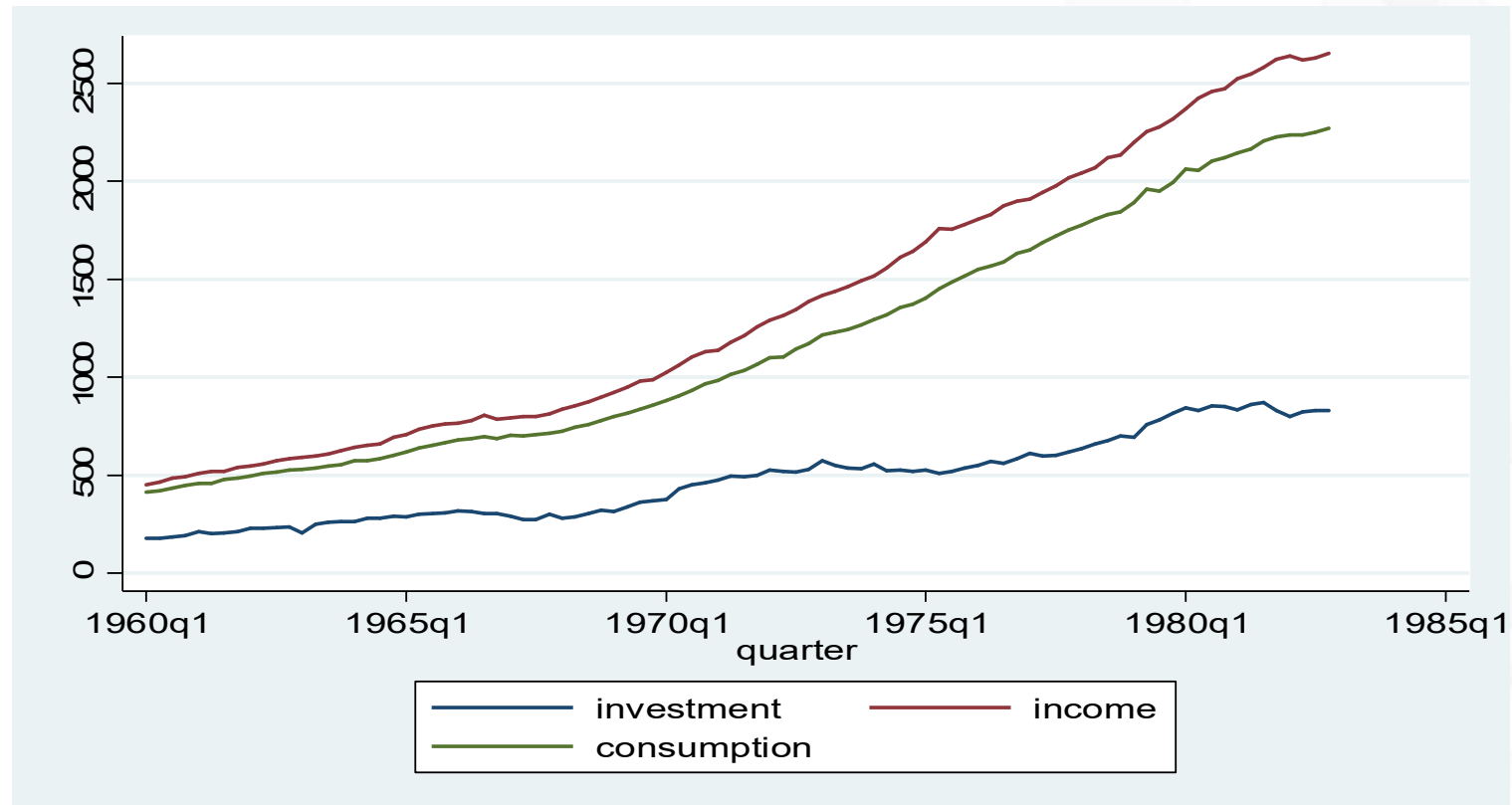
E-mail:demidova@hse.ru

05.04.2021

- 1) Компоненты временного ряда**
- 2) Стационарные и нестационарные временные ряды**
- 3) Виды нестационарных временных рядов**
- 4) Тестирование нестационарности временного ряда**

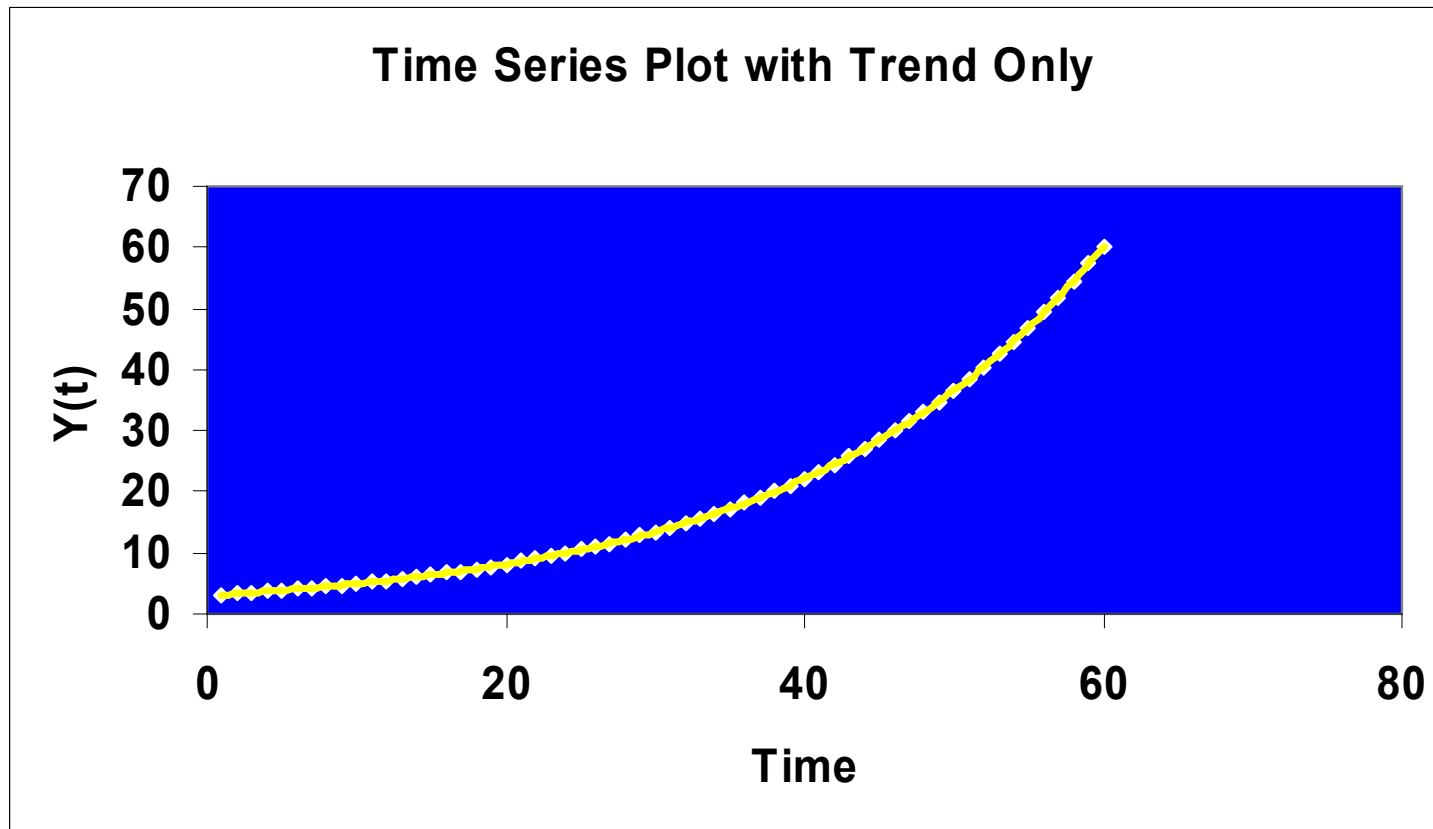
Временные ряды

$X_1, X_2, \dots, X_T$



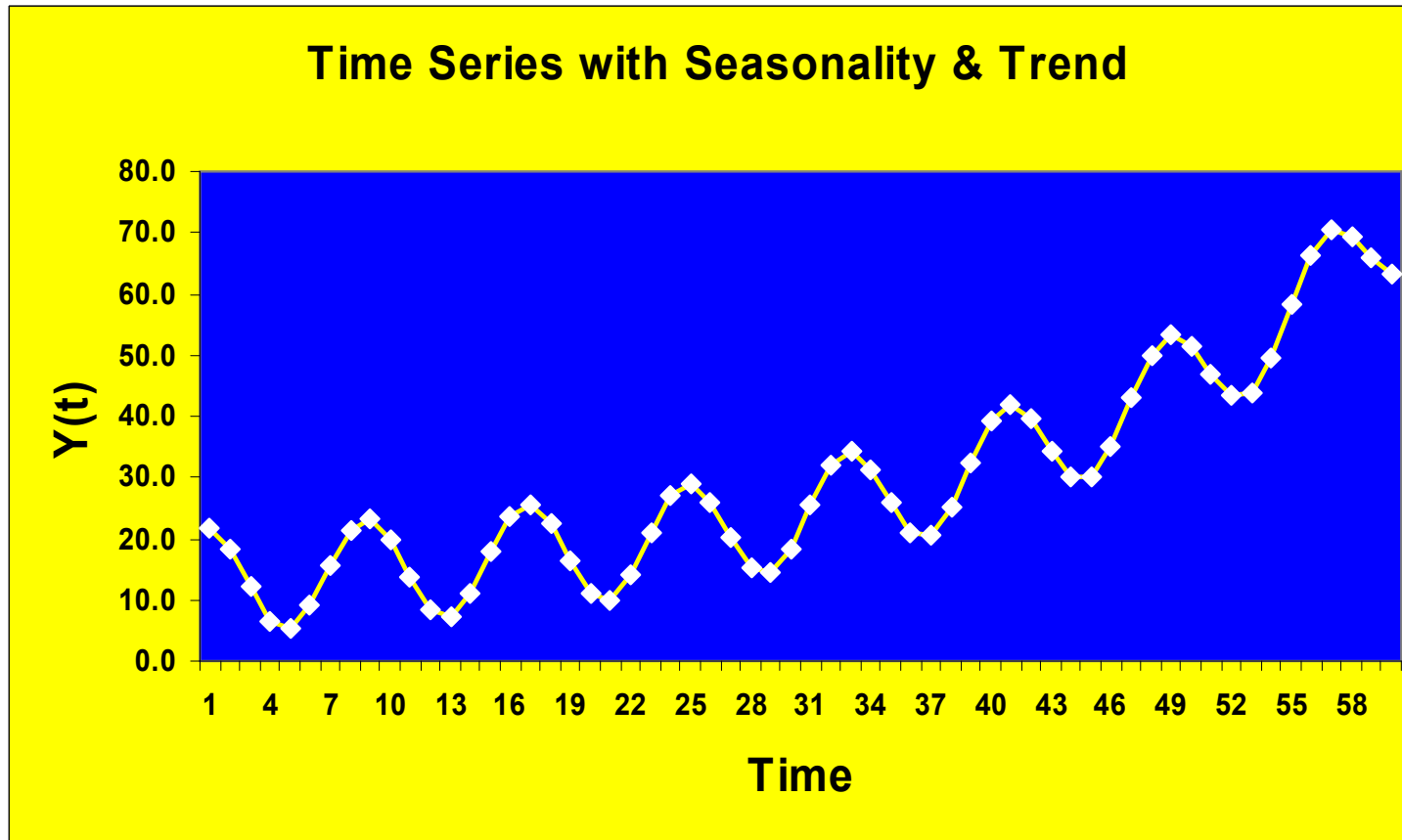
Временной ряд $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ - это последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве. Реализация части этой последовательности $X_1, X_2, \dots, X_T$ за промежуток времени $t = 1, \dots, T$ тоже обычно называется временным рядом и имеет то же обозначение.

Компоненты временного ряда



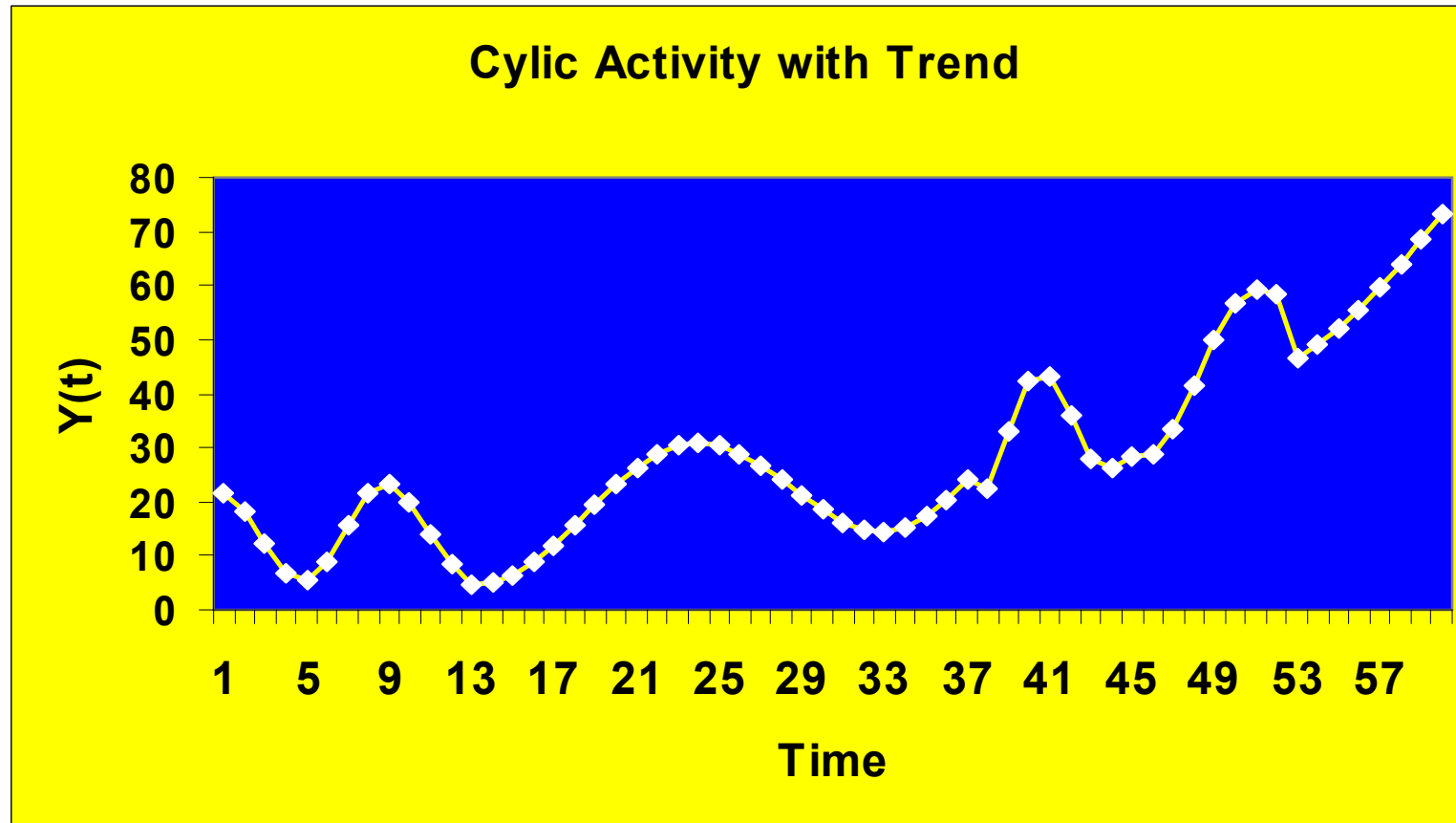
Временной ряд с трендом (Y монотонно изменяется со временем).

Компоненты временного ряда



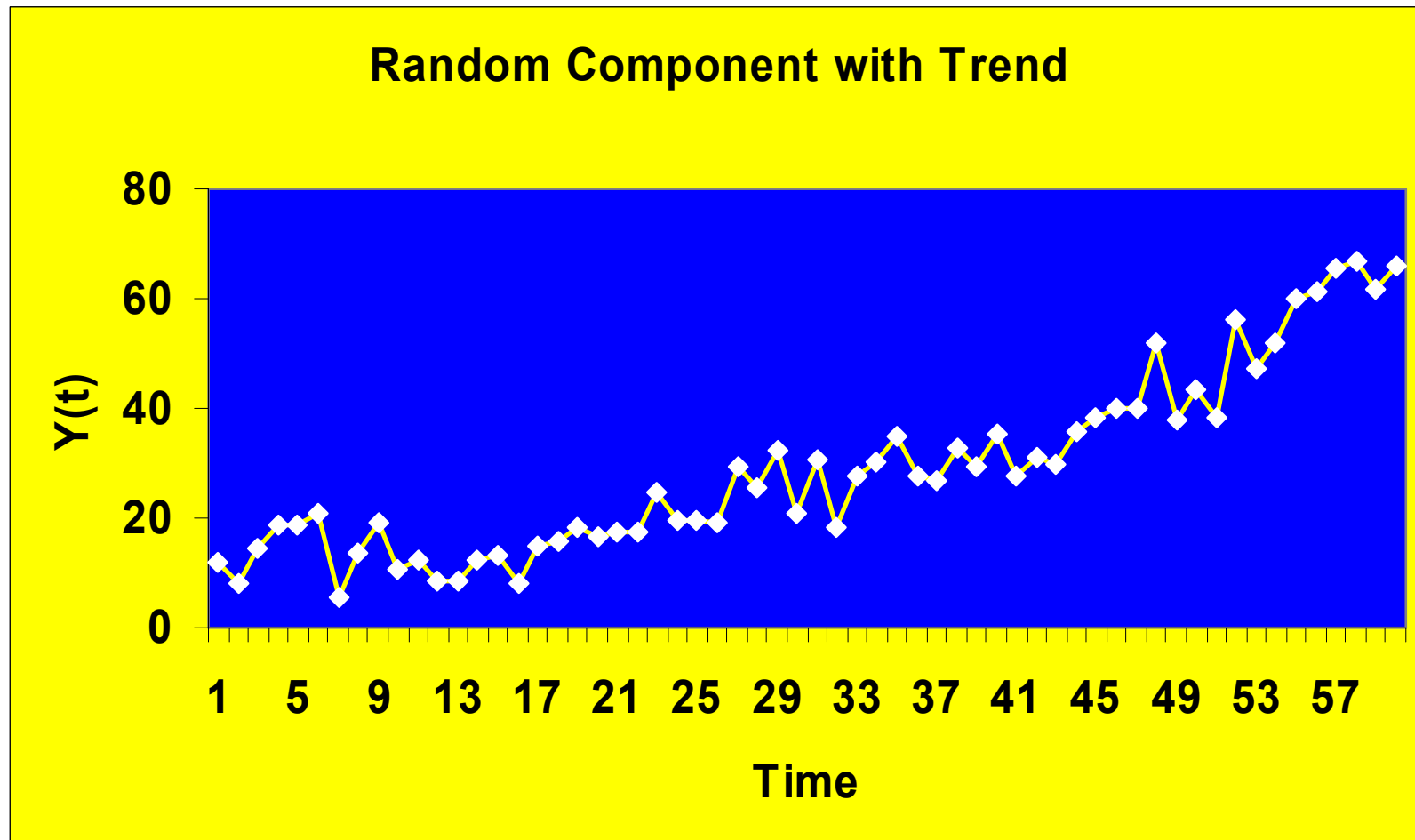
Временной ряд с трендом и сезонной компонентой.

Компоненты временного ряда



Временной ряд с трендом и циклической компонентой.

Компоненты временного ряда



Временной ряд с трендом и случайной компонентой.

Стационарные временные ряды

Ряд X_t называется стационарным в узком смысле, если

$F(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) = F(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_m+k})$ для любых моментов

$t_1, \dots, t_m$ и любого сдвига k .

Стационарные временные ряды

Ряд X_t называется стационарным (в широком смысле), если

- $E(X_t) = \mu$ при всех t ,
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ при всех t ,
- $\text{cov}(X_t, X_{t+s})$ зависит только от s (и не зависит от t)

Пример стационарного временного ряда

$$X_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2) - \text{белый шум}$$

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t,$$

$$\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t,$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \text{при } t \neq s$$

Это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Линейные временные ряды

Линейный временной ряд – это ряд, который может быть записан в виде:

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i},$$

$$\alpha_0 = 1, \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Пример AR модели временного ряда

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Проверка стационарности

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad -1 < \beta_1 < 1$$

$$X_{t-1} = \beta_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$\begin{aligned} X_t &= \beta_1 (\beta_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \beta_1^2 X_{t-2} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \beta_1^t X_0 + \beta_1^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$E(X_t) = \beta_1^t X_0 + \beta_1^{t-1} E(\varepsilon_1) + \dots + E(\varepsilon_t) = \beta_1^t X_0 \rightarrow 0$$

Проверка стационарности

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad -1 < \beta_1 < 1$$

$$X_t = \beta_1^t X_0 + \beta_1^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_{X_t}^2 = \text{Var}(\beta_1^t X_0 + \beta_1^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$= \text{Var}(\beta_1^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$= \beta_1^{2t-2} \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \beta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \frac{1 - \beta_1^{2t}}{1 - \beta_1^2} \sigma_\varepsilon^2 \rightarrow \frac{1}{1 - \beta_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

Проверка стационарности

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad -1 < \beta_1 < 1$$

$$X_t = \beta_1^t X_0 + \beta_1^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

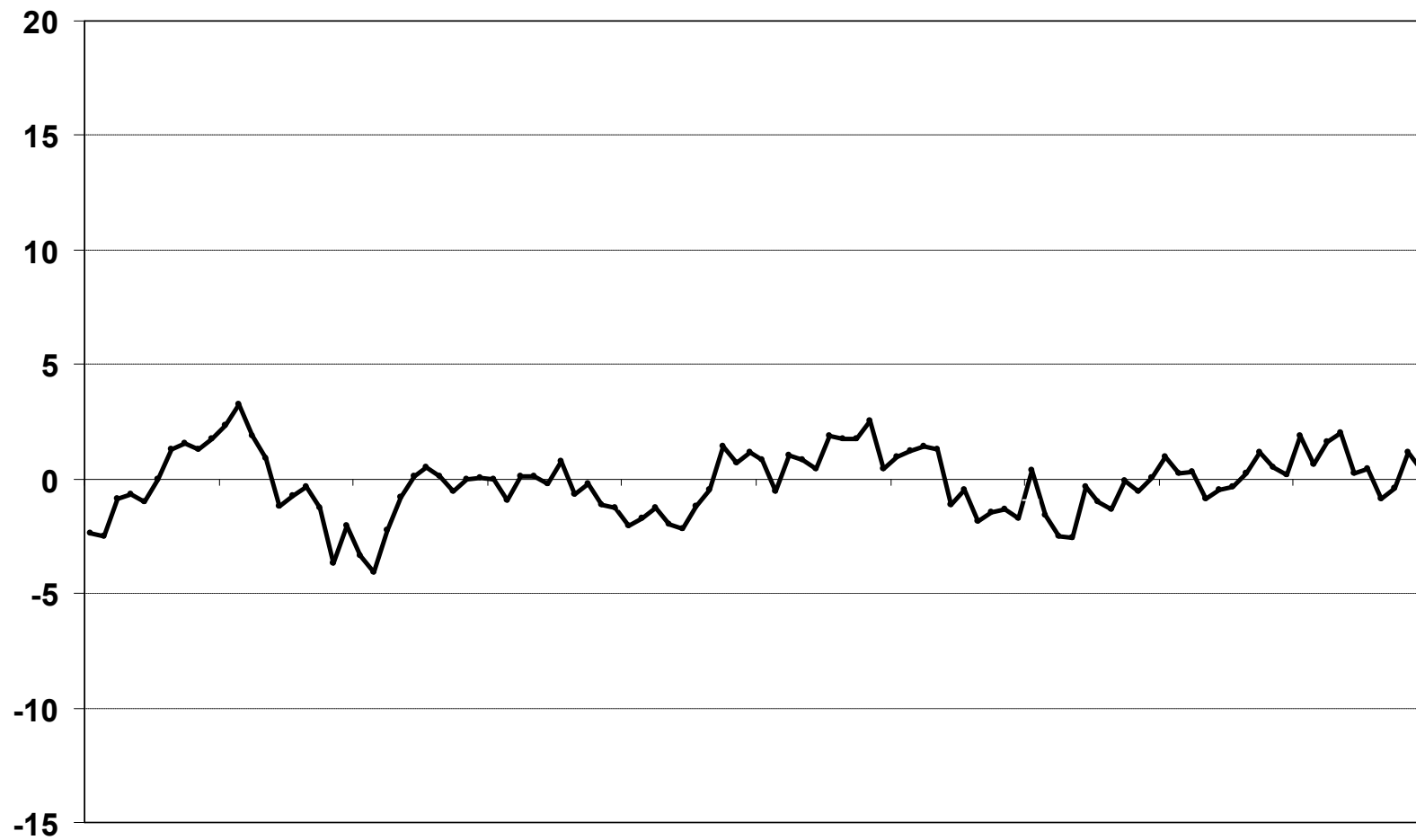
$$X_{t+1} = \beta_1^{t+1} X_0 + \beta_1^t \varepsilon_1 + \dots + \beta_1 \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$\text{cov}(X_t, X_{t+1}) = \text{cov}(\varepsilon_t, \beta_1 \varepsilon_t) + \text{cov}(\beta_1 \varepsilon_{t-1}, \beta_1^2 \varepsilon_{t-1}) + \dots + \text{cov}(\beta_1^{t-1} \varepsilon_1, \beta_1^t \varepsilon_1) =$$

$$= \beta_1 (1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_1^{2t-2}) \sigma_\varepsilon^2 \rightarrow \frac{\beta_1}{1 - \beta_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{Аналогично} \quad \text{cov}(X_t, X_{t+s}) \rightarrow \frac{\beta_1^s}{1 - \beta_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

График стационарного временного ряда



$$\beta_1 = 0.7$$

Пример нестационарного временного ряда

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t,$$

$$\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t,$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \text{при} \quad t \neq s$$

Пример нестационарного временного ряда

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

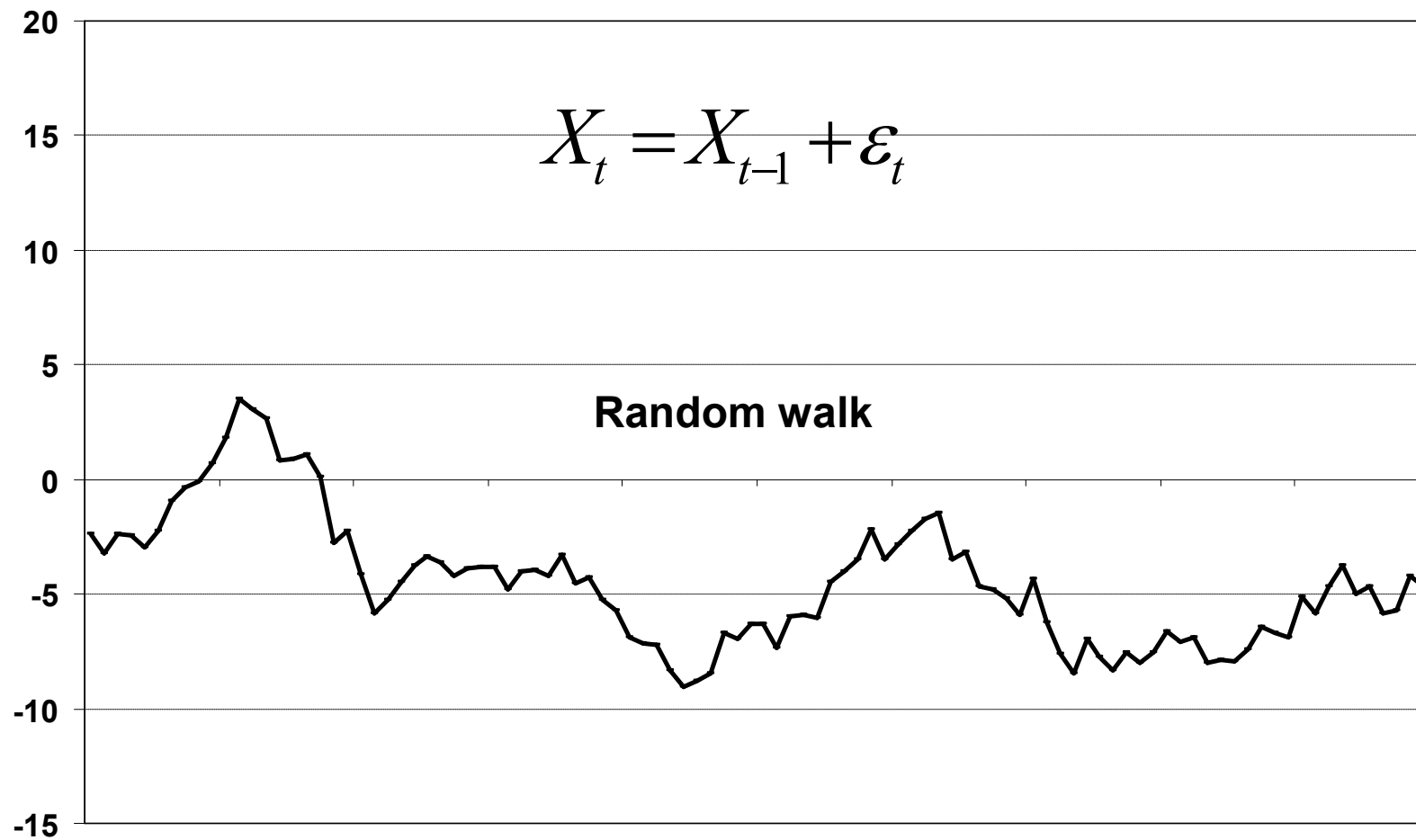
$$X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_t = X_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$$

$$\text{var}(X_t) = t\sigma_{\varepsilon}^2$$

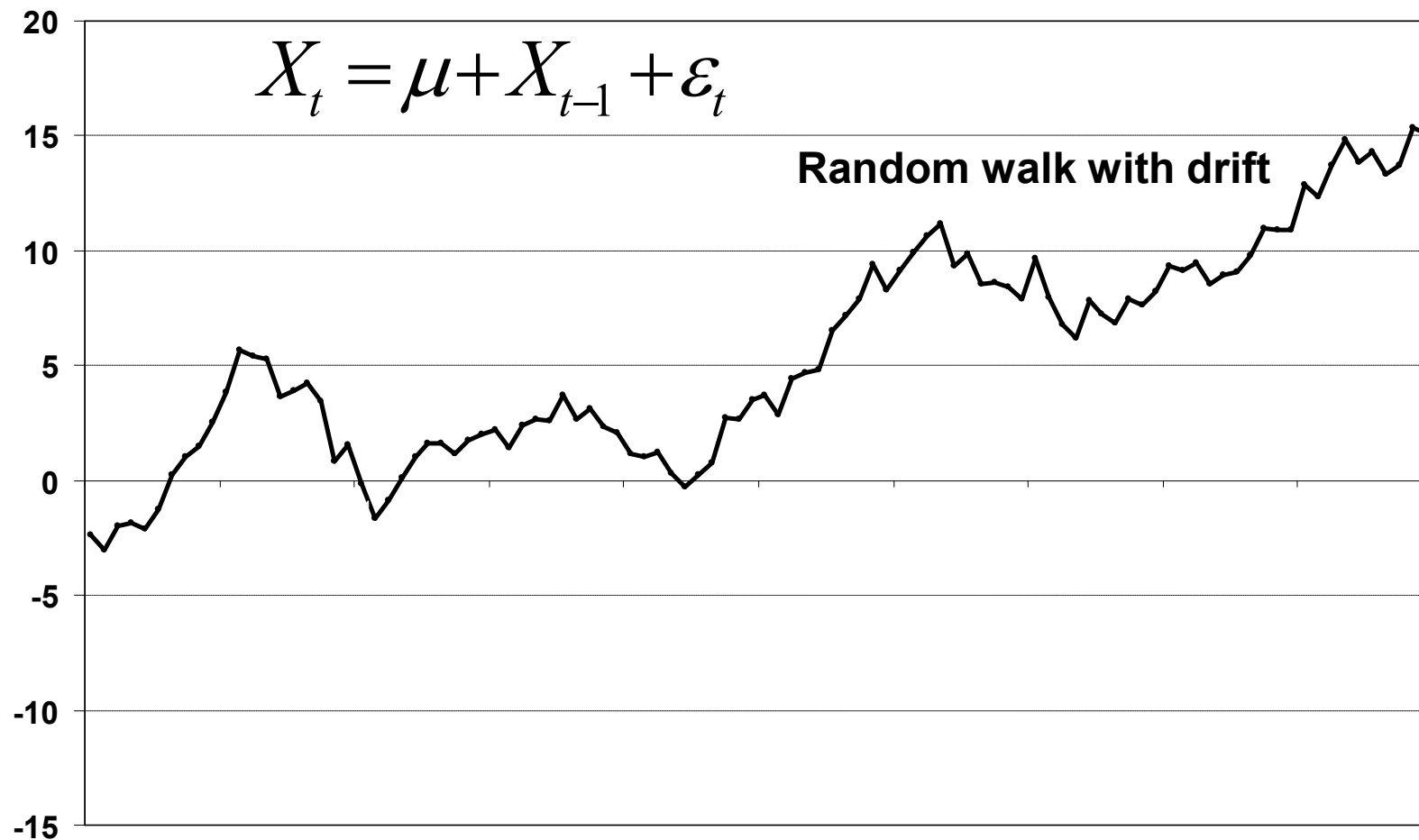
Это процесс случайного блуждания (Random walk)

График нестационарного временного ряда

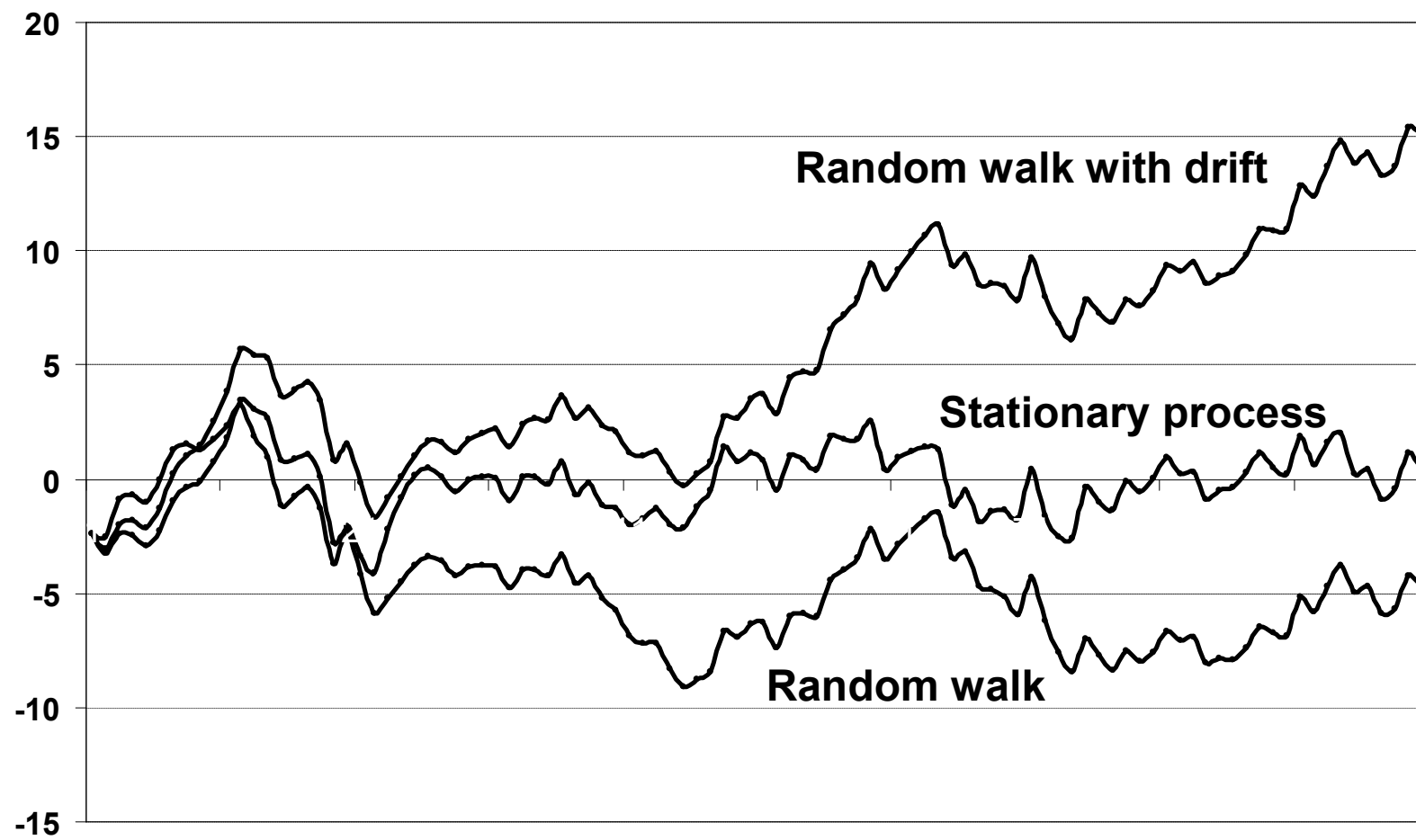


Это процесс случайного блуждания (Random walk)

График нестационарного временного ряда



Это процесс случайного блуждания с дрейфом (Random walk with drift)



Нестационарные временные ряды типа TS

TS – trend stationary

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad -1 < \beta_2 < 1$$

Этот ряд становится стационарным после выделения тренда.

Нестационарные временные ряды типа DS

DS – difference stationary

$$X_t = \beta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

**Этот ряд нельзя сделать стационарным, выделив тренд.
Этот ряд становится стационарным в разностях.**

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \beta_0 + \varepsilon_t$$

$$E(\Delta X_t) = \beta_0$$

$$\sigma_{\Delta X_t}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2$$

Тестирование нестационарности

Автокорреляционная функция (ACF)

$$\rho_k = \frac{E((X_t - \mu_X)(X_{t+k} - \mu_X))}{\sqrt{E((X_t - \mu_X)^2) E((X_{t+k} - \mu_X)^2)}} \quad \text{для } k = 1, \dots$$

Тестирование нестационарности

Выборочная автокорреляционная функция

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum ((X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}))}{\sqrt{(\sum (X_t - \bar{X})^2 \sum (X_{t+k} - \bar{X})^2)}}$$

График выборочной автокорреляционной функции называется коррелограммой.

Автокорреляционная функция

$$\rho_k = \frac{E((X_t - \mu_X)(X_{t+k} - \mu_X))}{\sqrt{E((X_t - \mu_X)^2) E((X_{t+k} - \mu_X)^2)}}$$

Автокорреляционная функция для процесса AR(1)

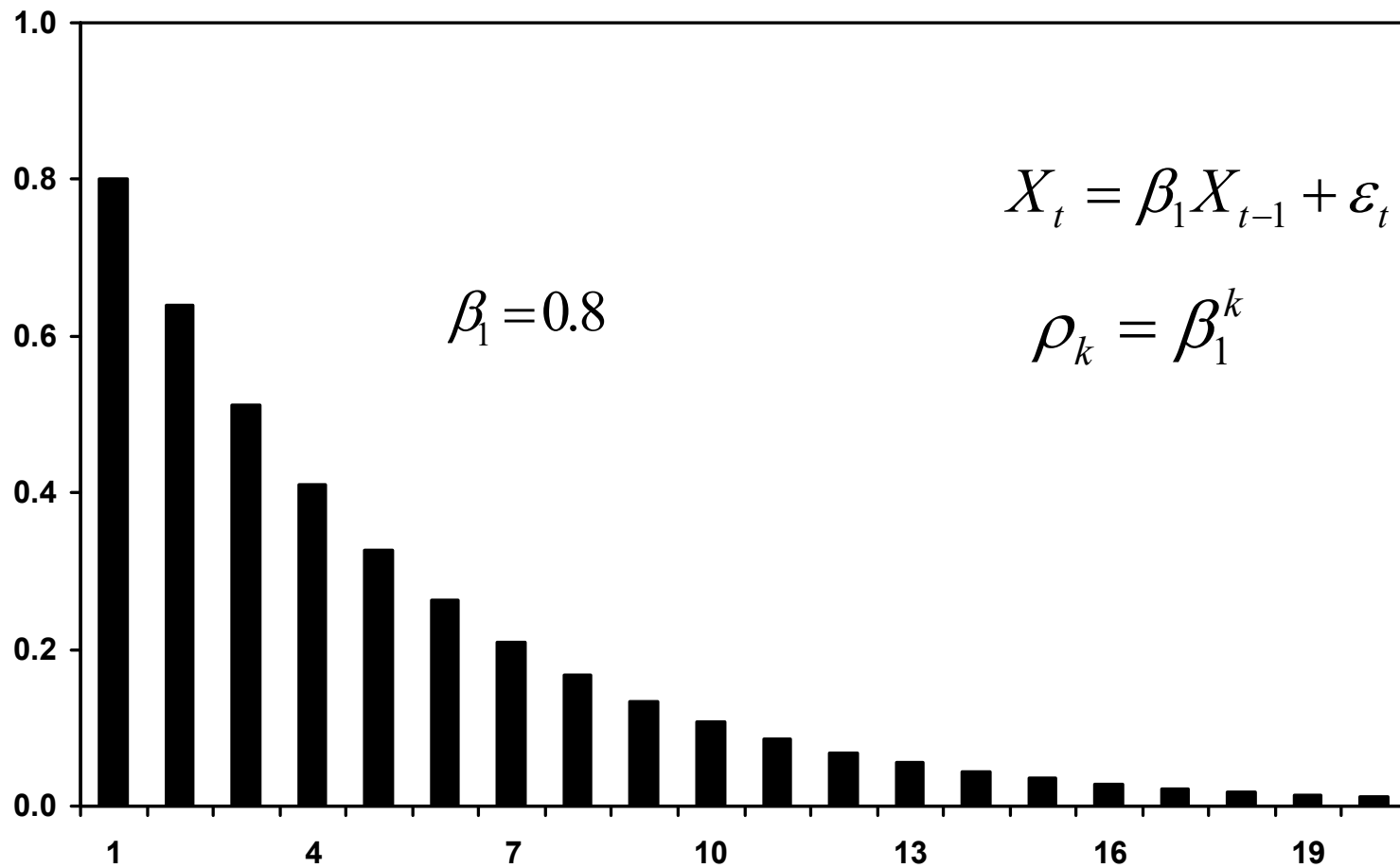
$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\rho_k = \beta_1^k$$

$$\text{т.к. } \text{cov}(X_t, X_{t+s}) = \frac{\beta_1^s}{1 - \beta_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

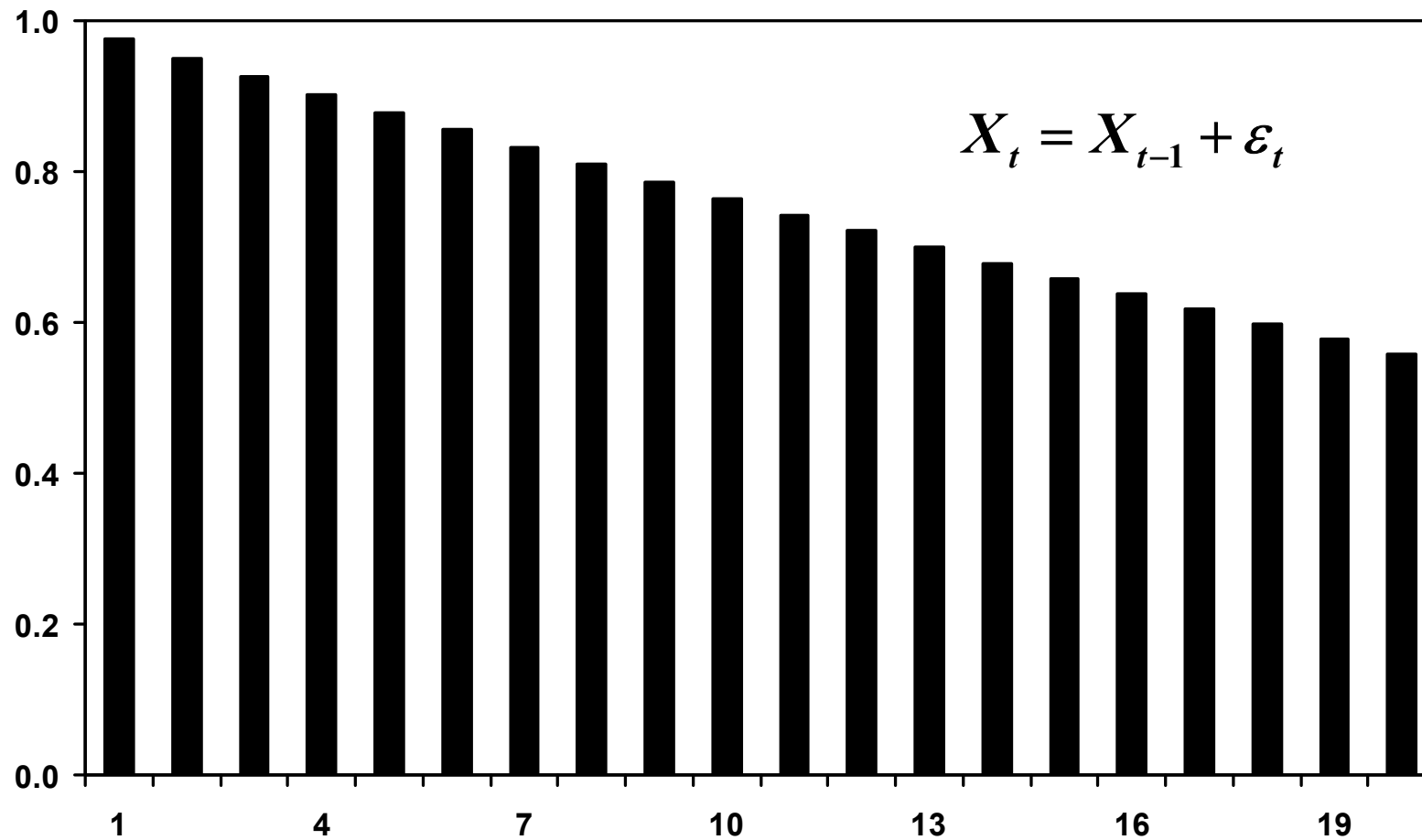
Автокорреляционные функции для других стационарных процессов также экспоненциально убывают.

Коррелограмма



Коррелограмма процесса AR(1). Коррелограмма стационарного временного ряда быстро убывает с ростом k .

Коррелограмма



Коррелограмма процесса случайного блуждания
(random walk).

Частная автокорреляционная функция

Частная автокорреляционная функция PACF (partial autocorrelation function).

PACF(k) – «чистая корреляция» между X_t и X_{t-k} при исключении влияния $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$.

PACF(k) вычисляется как МНК оценка коэффициента β_k в регрессии:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_k X_{t-k} + \varepsilon_t$$

Частные автокорреляционные функции для стационарных процессов также быстро убывают.

Тестирование нестационарности

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Более формальный метод проверки нестационарности временного ряда называется тестом на наличие единичного корня (unit root test).

Тестирование нестационарности

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \beta_1 = 1 \qquad \sigma_{X_t}^2 = t \sigma_\varepsilon^2 \qquad \beta_1 = 1$$

$$H_1 : \beta_1 < 1 \qquad \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \beta_1^2} \quad -1 < \beta_1 < 1$$

$$X_t - X_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} - X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + (\beta_1 - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \beta_1 + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Тест Дики и Фуллера (DFT)

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \delta X_{t-1} + \beta_2 t + \varepsilon_t \quad (3)$$

$$H_0 : \delta = 0 \quad (\text{нестационарность})$$

$$H_1 : \delta < 0 \quad (\text{стационарность})$$

или тренд - стационарность.

Тестовая статистика

$$t = \frac{\delta}{s.e.(\delta)}$$

Тест Дики и Фуллера

Тестовая статистика

$$t = \frac{\hat{\delta}}{s.e.(\hat{\delta})}$$

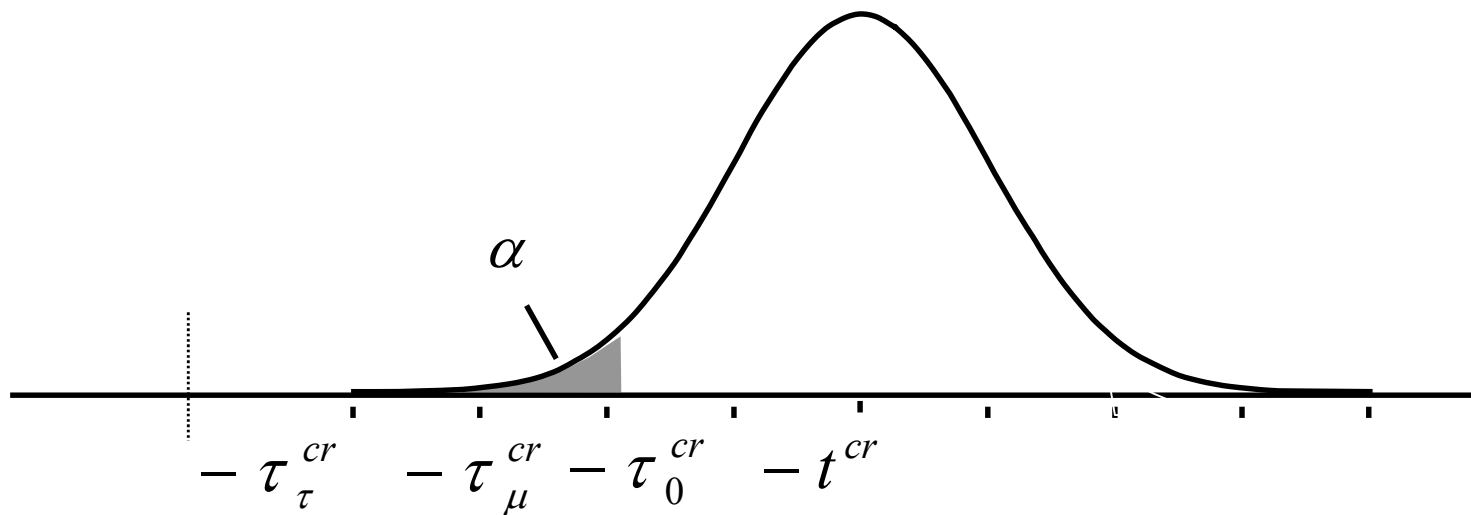
Распределение статистики Дики – Фуллера (tau statistics) не совпадает с распределением статистики Стьюдента. Нужно использовать специальные таблицы для случаев (1), (2), (3).

Правило принятия решения в тесте Дики и Фуллера

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1) \quad H_0 : \delta = 0$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \delta X_{t-1} + \beta_2 t + \varepsilon_t \quad (3)$$



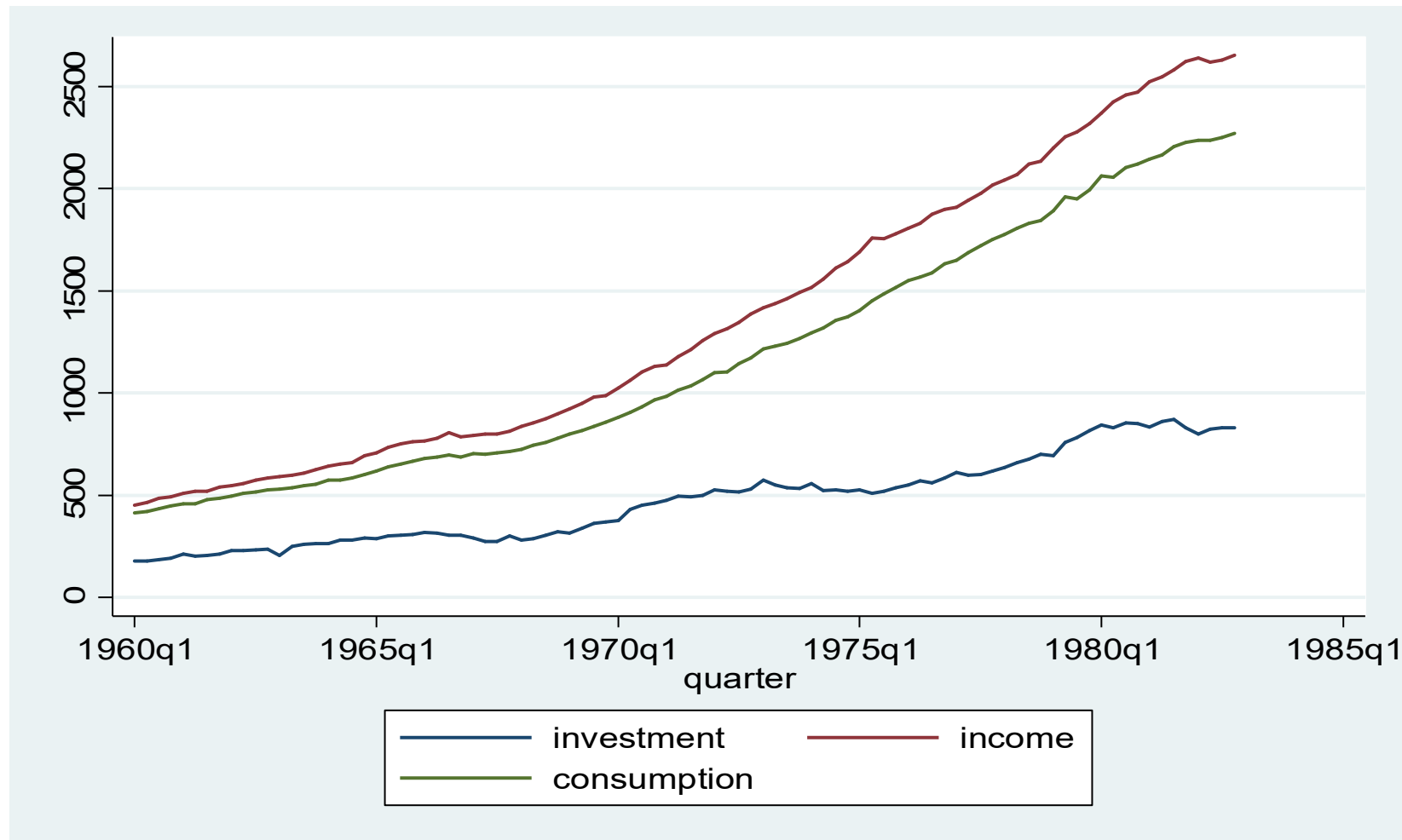
H_0 отвергается, если $t < \tau_0^{cr}$ в (1).

H_0 отвергается, если $t < \tau_\mu^{cr}$ в (2).

H_0 отвергается, если $t < \tau_\tau^{cr}$ в (3).

Пример

Quarterly SA West German macrodata, Bil DM, from Lutkepohl, 1993 Table E.1



Пример

```
. dfuller inv, nocons reg
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 91

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller					
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value			
Z(t)	3.424	-2.604	-1.950	-1.610		
D.inv	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
inv L1.	.0130315	.0038056	3.42	0.001	.005471	.0205919

$-\tau_0^{cr}$

```
. dfuller inv, reg
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 91

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller					
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value			
Z(t)	0.178	-3.523	-2.897	-2.584		

$-\tau_\mu^{cr}$

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.9710

D.inv	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
inv L1.	.0016621	.0093549	0.18	0.859	-.016926	.0202502
_cons	6.365024	4.788352	1.33	0.187	-3.14933	15.87938

```
. dfuller inv, trend reg
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 91

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller					
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value			
Z(t)	-1.945	-4.060	-3.459	-3.155		

$-\tau_\tau^{cr}$

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.6312

D.inv	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
inv L1.	-.0743076	.0382116	-1.94	0.055	-.1502451	.00163
_trend	.6177881	.3016147	2.05	0.044	.0183922	1.217184
_cons	13.49891	5.853557	2.31	0.023	1.866195	25.13162

Расширенный тест Дики и Фуллера (ADF).

Тест Дики – Фуллера можно провести только в том случае, если ошибки регрессии не коррелируют и в правой части только первый лаг X . В противном случае применяется расширенный тест Дики и Фуллера с использованием тех же критических значений тестовой статистики.

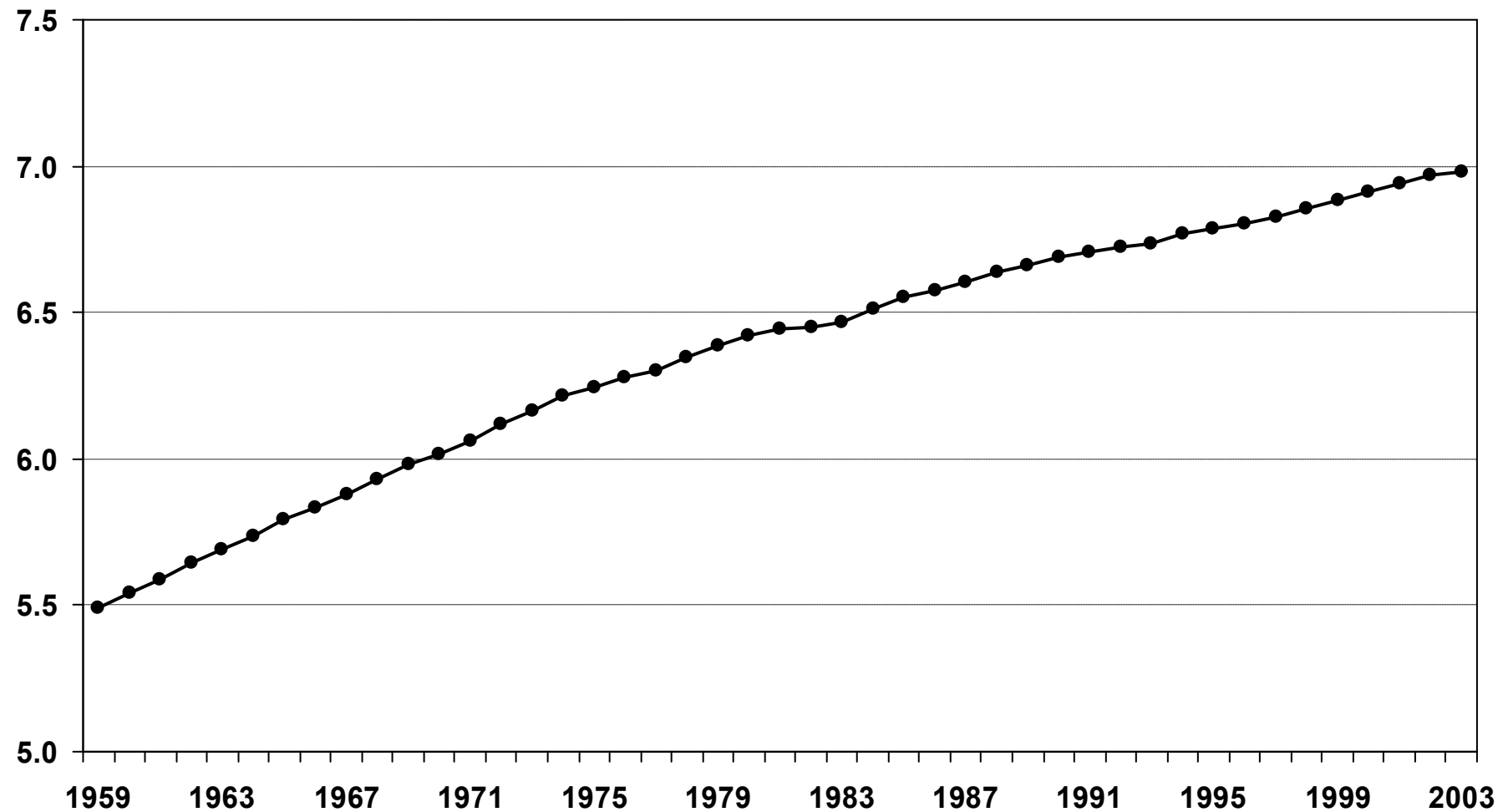
$$\Delta X_t = \beta_0 + \delta X_{t-1} + \beta_2 t + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \delta = 0 \quad (\text{нестационарность})$$

$$H_1 : \delta < 0 \quad (\text{стационарность})$$

Пример

LGHOUS



Логарифм расходов на аренду жилья. Очевидно, ряд нестационарен.

Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on LGHOUS

```
=====
Augmented Dickey-Fuller test statistic      -1.691709      0.7378
Test critical values1% level                -4.186481
                        5% level                -3.518090
                        10% level               -3.189732
=====
```

Dependent Variable: D(LGHOUS)

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 1961 2003

```
=====
Variable      Coefficient Std. Error t-Statistic Prob.
=====
LGHOUS (-1)   -0.034904    0.020632   -1.691709    0.0987
D (LGHOUS (-1))  0.274772    0.149339    1.839923    0.0734
C              0.232945    0.117491    1.982662    0.0545
@TREND (1959)  0.000576    0.000672    0.855999    0.3972
=====
```

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} - \beta_3 \Delta X_{t-1} + \beta_1 + \beta_4 t + \varepsilon_t$$

Имеет место нестационарность (с трендом).

Пример

$D(LGHOUS)$

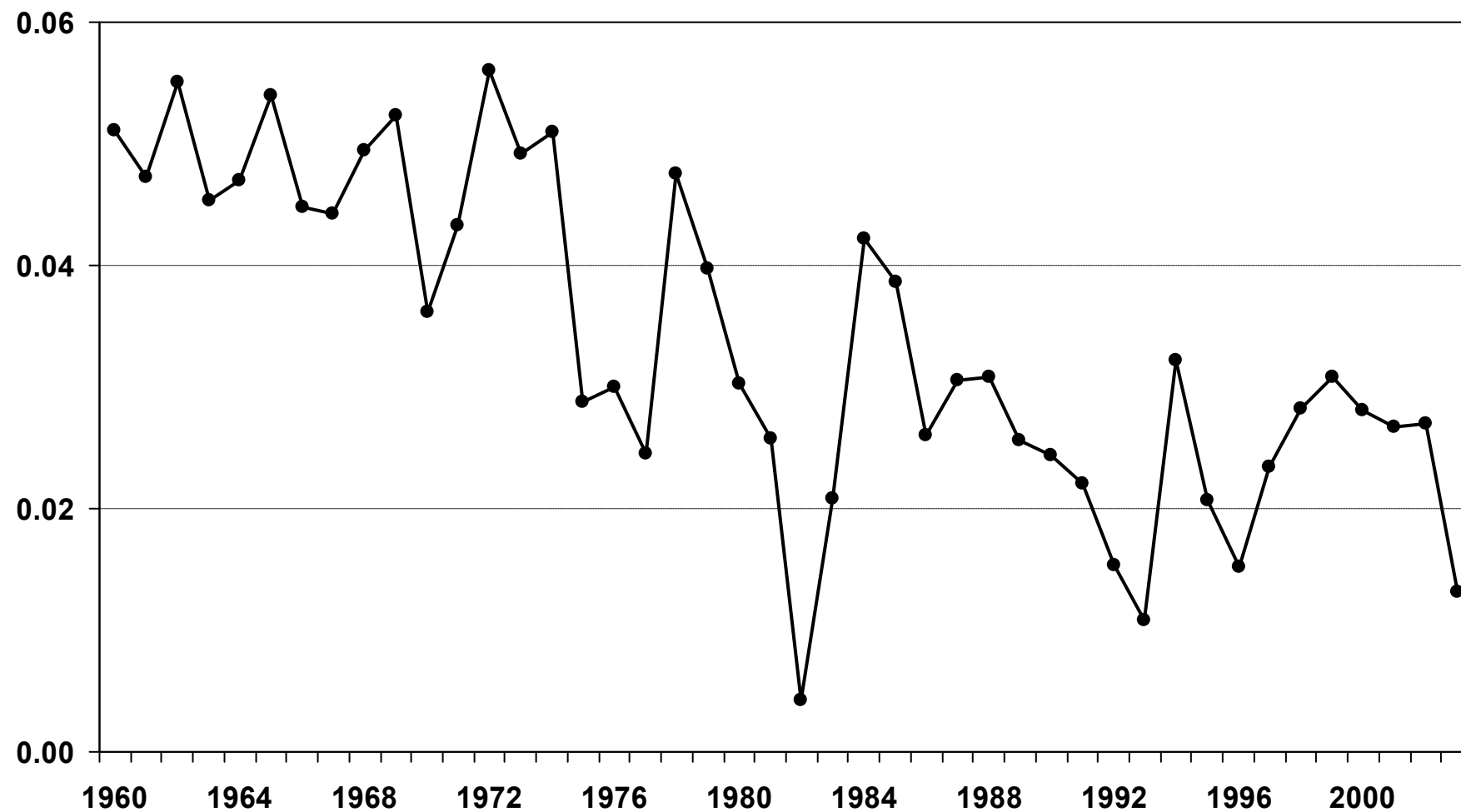


График первых разностей.

Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DLGHOUS				
=====				
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.518902	0.0042	
Test critical values1% level		-4.192337		
5% level		-3.520787		
10% level		-3.191277		
=====				
Dependent Variable: D(DLGHOUS)				
Method: Least Squares		Sample(adjusted): 1962 2003		
=====				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
=====				
DLGHOUS (-1)	-0.833121	0.184363	-4.518902	0.0001
D (DLGHOUS (-1))	0.232715	0.161176	1.443855	0.1570
C	0.043288	0.010121	4.277022	0.0001
@TREND (1959)	-0.000668	0.000181	-3.691100	0.0007
=====				

Гипотеза о нестационарности первых разностей не отвергается.

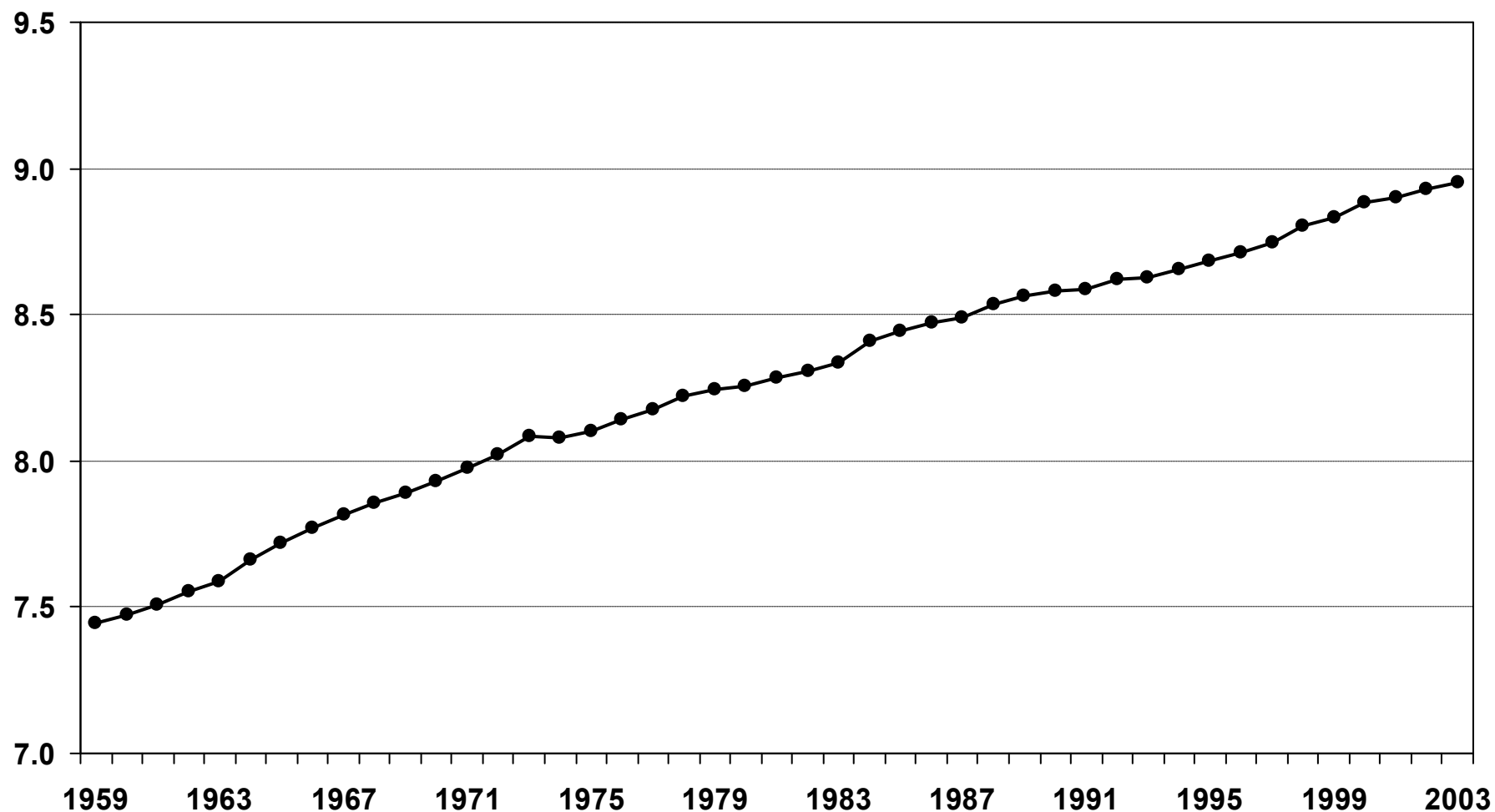
Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DLGHOUS				
=====				
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.518902	0.0042	
Test critical values1% level		-4.192337		
	5% level	-3.520787		
	10% level	-3.191277		
=====				
Dependent Variable: D(DLGHOUS)				
Method: Least Squares		Sample (adjusted): 1962 2003		
=====				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
=====				
DLGHOUS (-1)	-0.833121	0.184363	-4.518902	0.0001
D (DLGHOUS (-1))	0.232715	0.161176	1.443855	0.1570
C	0.043288	0.010121	4.277022	0.0001
@TREND (1959)	-0.000668	0.000181	-3.691100	0.0007
=====				

Следовательно, временной ряд *LGHOUS* является процессом типа $I(1)$.

Пример

LGDP



Этот временной ряд (располагаемый доход) тоже, очевидно, нестационарен.

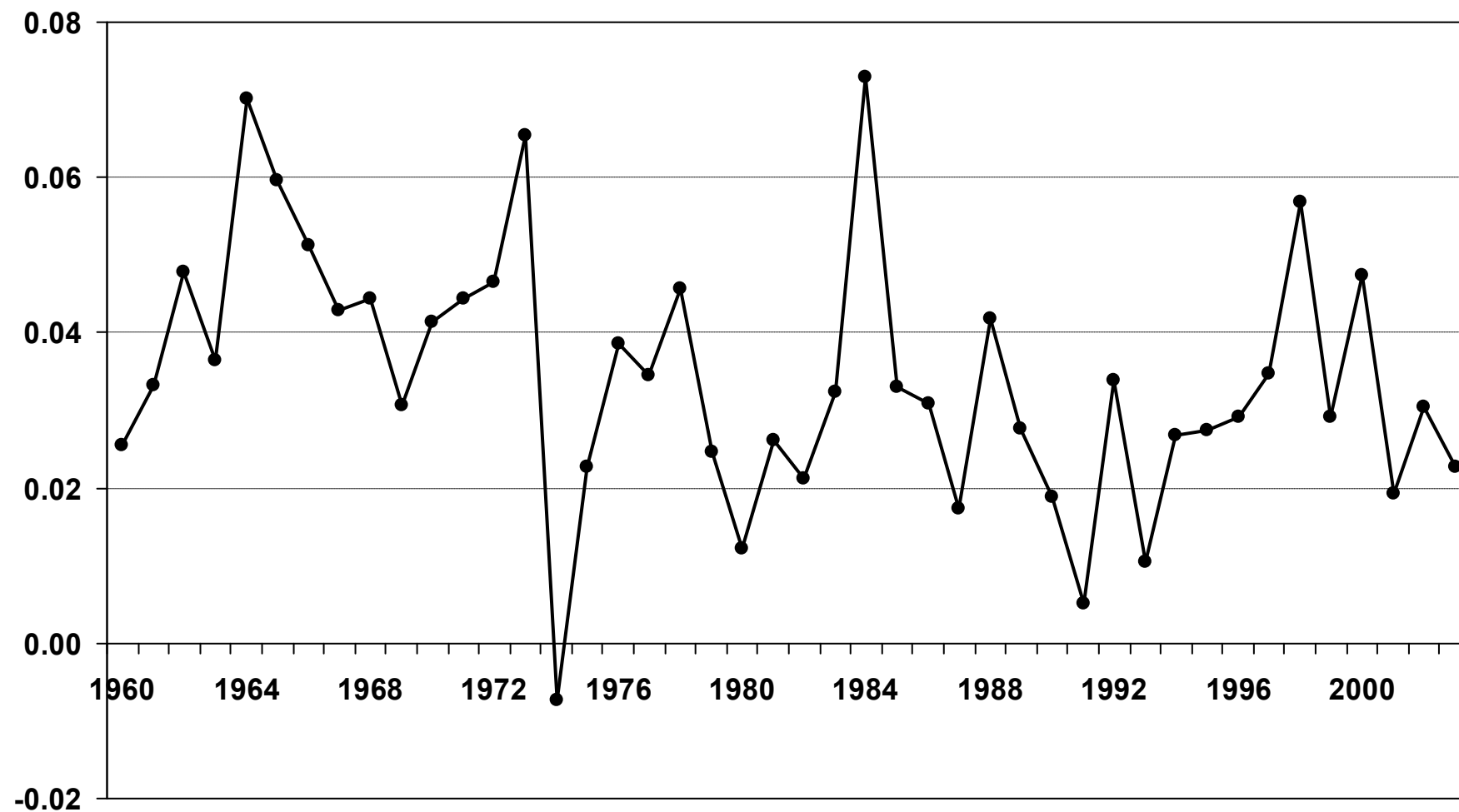
Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on LGDPI				
=====				
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.322310		0.4134	
Test critical values	1% level	-4.186481		
	5% level	-3.518090		
	10% level	-3.189732		
=====				
Dependent Variable: D(LGDPI)				
Method: Least Squares			ple(adjusted): 1961 2003	
=====				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
=====				
LGDPI (-1)	-0.120908	0.052064	-2.322310	0.0255
D(LGDPI (-1))	0.107910	0.147515	0.731520	0.4688
C	0.947906	0.390441	2.427787	0.0199
@TREND(1959)	0.003580	0.001737	2.061228	0.0460
=====				

Согласно расширенному тесту Дики и Фуллера, ряд нестационарен .

Пример

$D(LGDP)$



Временной ряд первых разностей.

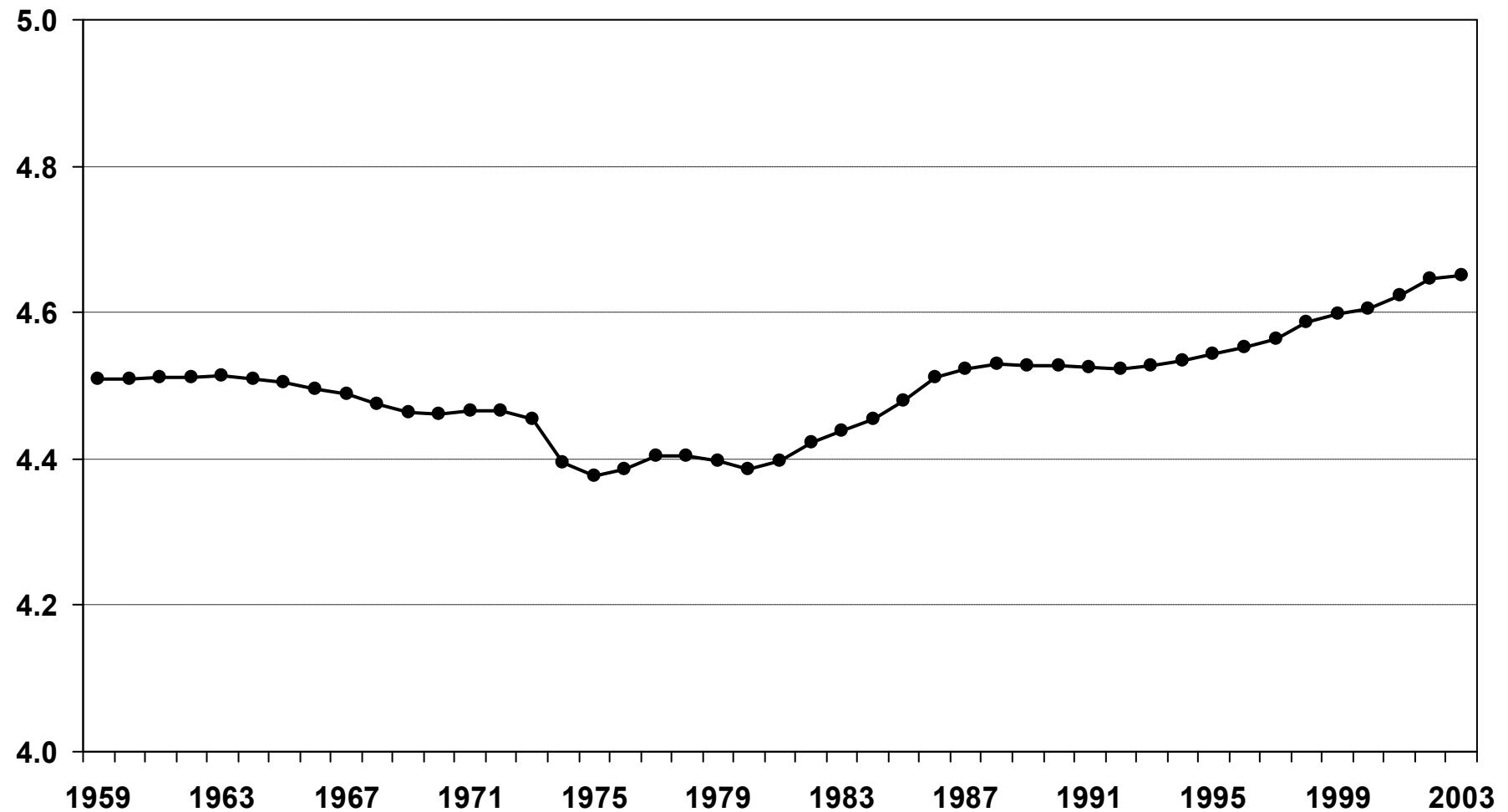
Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DLGDPI				
=====				
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.125167	0.0119		
Test critical values1% level	-4.192337			
5% level	-3.520787			
10% level	-3.191277			
=====				
Dependent Variable: D(DLGDPI)				
Method: Least Squares		Sample (adjusted): 1962 2003		
=====				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
=====				
DLGDPI (-1)	-0.892399	0.216330	-4.125167	0.0002
D (DLGDPI (-1))	-0.045015	0.158840	-0.283400	0.7784
C	0.041368	0.011109	3.723927	0.0006
@TREND (1959)	-0.000453	0.000225	-2.007941	0.0518
=====				

Ряд в первых разностях стационарен.

Пример

LGPRHOUS



Стационарен ли этот ряд (относительная цена аренды жилья)?

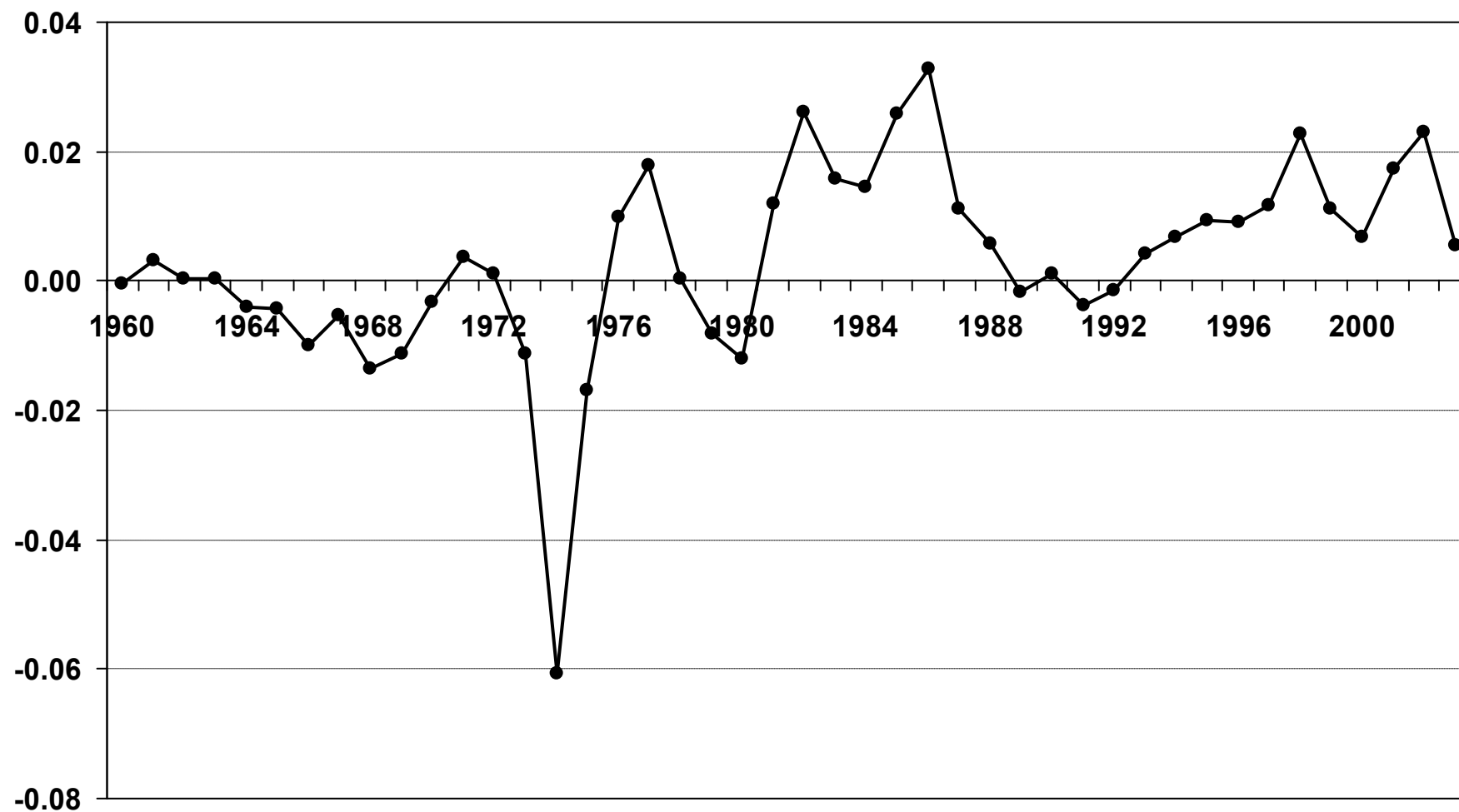
Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on LGPRHOUS				
=====				
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.420016	0.8408		
Test critical values1% level	-4.186481			
5% level	-3.518090			
10% level	-3.189732			
=====				
Dependent Variable: D(LGPRHOUS)				
Method: Least Squares		Sample(adjusted): 1961 2003		
=====				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
=====				
LGPRHOUS (-1)	-0.048259	0.033985	-1.420016	0.1635
D(LGPRHOUS (-1))	0.504742	0.140567	3.590749	0.0009
C	0.209124	0.150738	1.387337	0.1732
@TREND(1959)	0.000410	0.000189	2.170909	0.0361
=====				

Согласно расширенному тесту Дики – Фуллера, этот ряд нестационарен.

Пример

$D(LGPRHOUS)$



Ряд первых разностей.

Пример

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DLPRHOUS				
=====				
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.611691	0.0033		
Test critical values1% level	-4.192337			
5% level	-3.520787			
10% level	-3.191277			
=====				
Dependent Variable: D(DLPRHOUS)				
Method: Least Squares		Sample(adjusted): 1962 2003		
=====				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
=====				
DLPRHOUS (-1)	-0.720856	0.156311	-4.611691	0.0000
D(DLPRHOUS (-1))	0.349962	0.153860	2.274546	0.0287
C	-0.007368	0.004294	-1.716005	0.0943
@TREND(1959)	0.000407	0.000174	2.335997	0.0249
=====				

Ряд первых разностей стационарен.

KPSS тест на проверку стационарности

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?. *Journal of econometrics*, 54(1), 159-178.

$$y_t = \beta t + r_t + \varepsilon_t$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t$$

$$H_0: \sigma_u^2 = 0 \text{ (Стационарность)}$$

$$H_1: \sigma_u^2 \neq 0 \text{ (Нестационарность)},$$

KPSS тест на проверку стационарности

$H_0: \sigma_u^2 = 0$ (*stationarity*)

$H_1: \sigma_u^2 \neq 0$ (*non stationarity*),

OLS, residuals e_t , $S_t = \sum_{s=1}^t e_s$,

$$KPSS = \sum_{s=1}^T S_t^2 / \hat{\sigma}^2.$$

*The asymptotic distribution is non
— standard.*

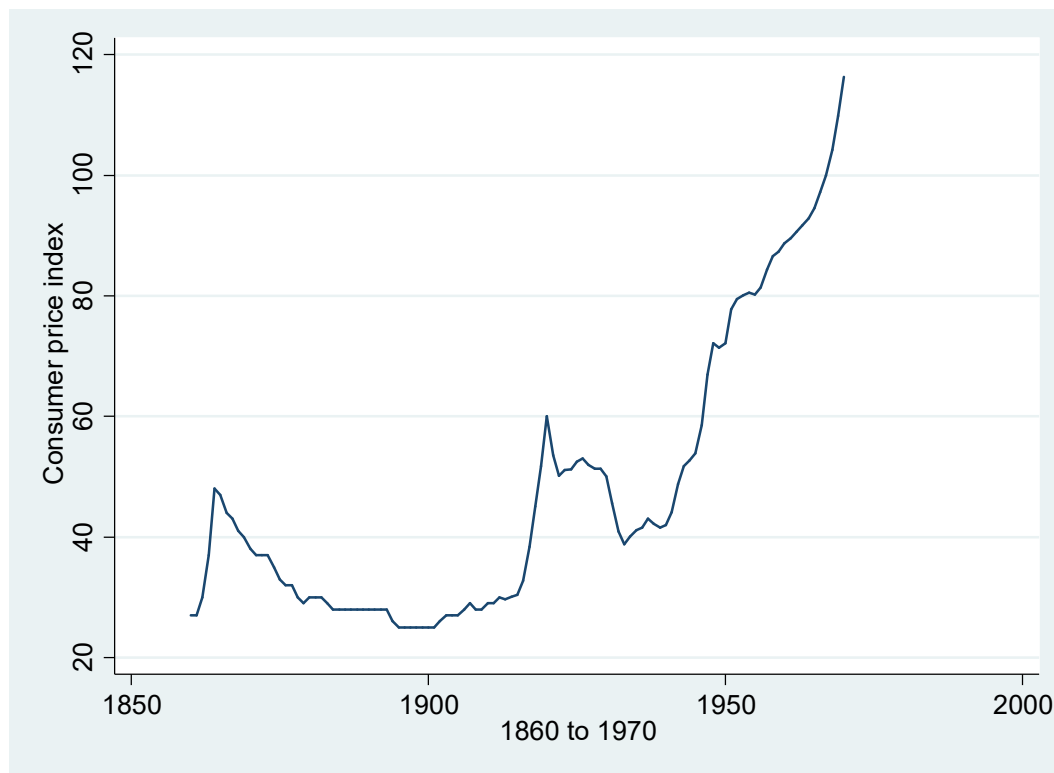
KPSS тест на проверку стационарности

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_T^2)$$

$$s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^T e_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s, l) \sum_{t=s+1}^T e_t e_{t-s}.$$

Последняя формула дает состоятельную оценку дисперсии,
l – количество лагов, w(s, l) – веса.

KPSS тест на проверку стационарности. Пример



KPSS тест на проверку стационарности. Пример

KPSS test for cpi

Maxlag = 4 chosen by Schwert criterion

Autocovariances weighted by Bartlett kernel

Critical values for H0: cpi is trend stationary

10%: 0.119 5% : 0.146 2.5%: 0.176 1% : 0.216

Lag order	Test statistic
0	2.06
1	1.05
2	.72
3	.552
4	.452

. dfuller cpi

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 110

		Interpolated Dickey-Fuller		
Test Statistic		1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	2.888	-3.507	-2.889	-2.579

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 1.0000



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931
www.hse.ru