NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Лекция по эконометрике №2, модуль 4

Временные ряды - 2

Демидова
Ольга Анатольевна
https://www.hse.ru/staff/demidova_olga
E-mail:demidova@hse.ru
13.04.2021

План лекции

1) Теорема Вольда для стационарного ряда
2) AR(p), MA(q), ARMA(p,q) процессы
3) Стационарность процессов AR(p), ARMA(p,q)
4) Обратимость процессов MA(q)
5) Кореллограмма процессов AR(p), MA(q), ARMA(p,q)
6) Оценка моделей AR(p), MA(q), ARMA(p,q)
7) Информационные критерии Акаике и Шварца для выбора количества параметров

Стационарные временные ряды

Опр. Ряд X_t называется стационарным (в широком смысле), если

- **$E(X_t) = \mu$ при всех t,**
- **$Var(X_t) = \sigma^2$ при всех t,**
- **$cov(X_t , X_{t+s})$ зависит только от s (и не зависит от t).**
- **Теорема Вольда: Если X_t - стационарный ряд, то**

$X_t = d_t + \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha_\tau \varepsilon_{t-\tau}$, d_t – предсказуемый случайный процесс, ε_t – белый шум, $\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha_\tau^2 < \infty$

AR процессы

$$y_t = Y_t - \mu,$$

$$AR(p) \quad process:$$

$$\mathrm{y_t} = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \ldots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Оператор лага и AR процессы

$Lag \quad operator$:

$L(Y_t) = Y_{t-1}$

$L^s(Y_t) = Y_{t-s}$

$AR(1)\colon y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\theta L)y_t = \varepsilon_t$

$$AR(p)\colon \mathrm{y_t} = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \cdots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\theta(L)\mathrm{y_t} = \varepsilon_t,$$
$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_p L^p$$

MA процессы

$MA(q)$ process:

(moving averaging)

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q},$$

ε_t – белый шум.

Этот процесс всегда стационарный.

Стационарность AR(1) процесса

$AR(1){:}\, y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\theta L)y_t = \varepsilon_t,$

$(1-\theta L)^{-1}(1-\theta L)y_t = (1-\theta L)^{-1}\varepsilon_t,$

$$(1-\theta L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j L^j \quad if \quad |\theta| < 1,$$

$(|\theta| < 1$ — условие стационарности процесса $AR(1)$),

$y_t = (1-\theta L)^{-1}\varepsilon_t,$

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{t-j}.$$

$AR(1) \Leftrightarrow MA(\infty)$, если $|\theta| < 1$

(в этом случае процесс $AR(1)$ стационарный.

Стационарность AR(1) процесса

$$AR(1): y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - \theta L) y_t = \varepsilon_t,$$

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{t-j}.$$

$AR(1) \Leftrightarrow MA(\infty)$, если $|\theta| < 1$.

MA(∞) представление удобно для вычисления дисперсии и автоковариационной функции.

Стационарность AR(2) процесса

$AR(2)\colon y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$

$(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) y_t = \varepsilon_t,$

$(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L) y_t = \varepsilon_t,$

Условие обратимости $(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)$:

$(1 - \phi_1 L)$ и $(1 - \phi_2 L)$ должны быть обратимы.

Условие стационарности процесса $AR(2)$:

$|\phi_1| < 1,\ |\phi_2| < 1.$

Стационарность AR(2) процесса

$AR(2)\colon y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$
$(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) y_t = \varepsilon_t,$
$(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L) y_t = \varepsilon_t,$

$(1 - \phi_1 z)(1 - \phi_2 z) = 0$
называется обратным характеристическим уравнением. Его корни $z_1 = \dfrac{1}{\phi_1}, \ z_2 = \dfrac{1}{\phi_2}$
(в общем случае комплексные)

при обратимости процесса $AR(2)$ удовлетворяют условию $|z_i| > 1, \quad i = 1{,}2.$

Стационарность AR(2) процесса

$AR(2): y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$\lambda^2 - \theta_1\lambda - \theta_2 = 0,$
называется прямым характеристическим уравнением.

$(\lambda - \psi_1)(\lambda - \psi_2) = 0$
Его корни $\lambda_1 = \psi_1 = \dfrac{1}{\phi_1}, \ \lambda_2 = \psi_2 = \dfrac{1}{\phi_2}$
(в общем случае комплексные)

при стационарности процесса $AR(2)$

удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1{,}2.$

Стационарность AR(p) процесса

$AR(p)\colon y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \cdots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

$\lambda^p - \theta_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \theta_p = 0$,
называется прямым характеристическим уравнением для AR(p).

$(\lambda - \psi_1) \dots (\lambda - \psi_p) = 0$
Его корни $\lambda_1 = \psi_1, \dots, \lambda_p = \psi_p$
(в общем случае комплексные)

при стационарности процесса $AR(p)$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, p$.

ARMA процессы

$ARMA(p, q)$ модель:

$\mathrm{y_t} = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \cdots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}$

$\theta(L) y_t = \alpha(L) \varepsilon_t$,

где многочлены $\theta(L), \alpha(L)$ не имеют общих корней,

соответствует стационарному процессу

(в котором $\mathrm{y_t}$ не выражается через будущие шумы),

если корни обратного характеристического уравнения $\theta(z) = 0$

удовлетворяют условию: $|z_j| > 1 \quad \forall \quad j = 1, \ldots, p$,

$\Leftrightarrow$ корни прямого характеристического уравнения $\lambda^p - \theta_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \theta_p = 0$,

$\lambda_1 = \psi_1, \ldots, \lambda_p = \psi_p$

удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, p$.

Обратимость МА процесса

$MA(1): y_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} \Leftrightarrow$

$y_t = (1 + \alpha L)\varepsilon_t,$

$(1 + \alpha L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j L^j,$

$y_t = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j y_{t-j-1} + \varepsilon_t$

$MA(q): y_t = \alpha(L)\varepsilon_t.$

Необходимое условие $AR(\infty)$ представления:

обратимость $\alpha(L)$. Корни соответствующего прямого характеристического уравнения для MA части должны быть меньше 1 по модулю.

Диагностика моделей AR(p), MA(q) с помощью ACF и PACF

Автокорреляционная функция (ACF):

$$\rho_{\mathrm{k}} = \frac{\operatorname{cov}\{Y_t, Y_{t-k}\}}{\operatorname{var}\{Y_t\}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

γ_k – автоковариационная функция.

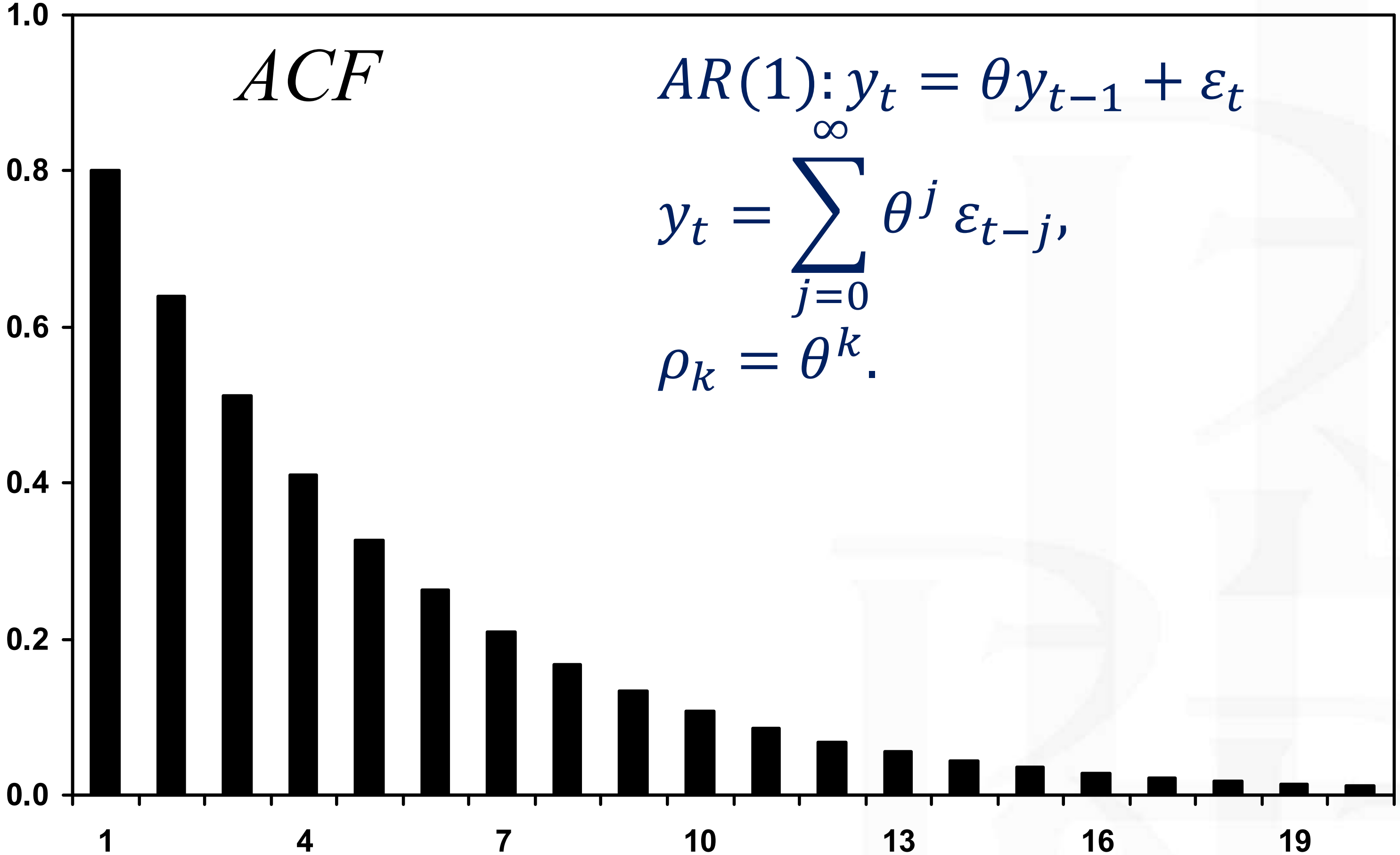
Частная автокорреляционная функция PACF (partial autocorrelation function).

PACF(k) – «чистая корреляция» между Y_t и Y_{t-k} при исключении влияния $Y_{t-1},\ldots,Y_{t-k+1}$.

PACF(k) вычисляется как МНК оценка коэффициента β_k в регрессии:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \ldots + \beta_k Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Коррелограмма для процесса AR(1)

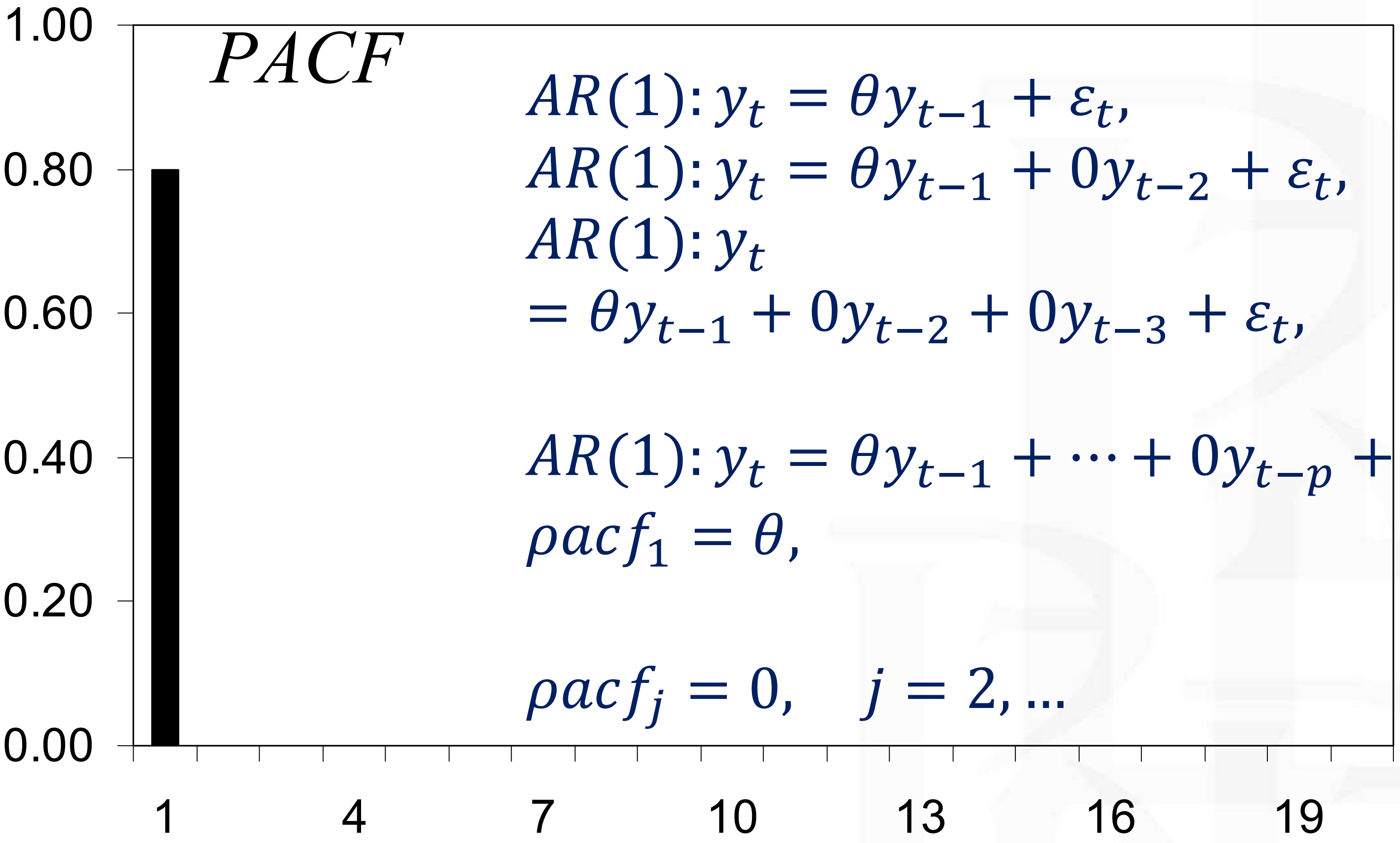


$$AR(1)\colon y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \, \varepsilon_{t-j},$$

$$\rho_k = \theta^k.$$

Коррелограмма для процесса AR(1)



$$AR(1): y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t,$$
$$AR(1): y_t = \theta y_{t-1} + 0y_{t-2} + \varepsilon_t,$$
$$AR(1): y_t$$
$$= \theta y_{t-1} + 0y_{t-2} + 0y_{t-3} + \varepsilon_t,$$

$$AR(1): y_t = \theta y_{t-1} + \cdots + 0y_{t-p} + \varepsilon_t,$$
$$\rho acf_1 = \theta,$$

$$\rho acf_j = 0, \quad j = 2, \ldots$$

Коррелограмма для процесса AR(2)

$AR(2) \quad process: \quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t.$

▻ Если процесс стационарный:

$\mu = \delta/(1 - \theta_1 - \theta_2).$

$y_t = Y_t - \mu,$
$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$y_t y_t = \theta_1 y_t y_{t-1} + \theta_2 y_t y_{t-2} + y_t \varepsilon_t,$

$E(y_t y_t) = \theta_1 E(y_t y_{t-1}) + \theta_2 E(y_t y_{t-2}) + E(y_t \varepsilon_t),$

$\gamma_0 = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$

Коррелограмма для процесса AR(2)

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$y_{t-1} y_t = \theta_1 y_{t-1} y_{t-1} + \theta_2 y_{t-1} y_{t-2} + y_{t-1}\varepsilon_t,$$
$$E(y_{t-1} y_t) = \theta_1 E(y_{t-1} y_{t-1}) + \theta_2 E(y_{t-1} y_{t-2}) + E(y_{t-1}\varepsilon_t),$$
$$\gamma_1 = \theta_1 \gamma_0 + \theta_2 \gamma_1,$$

$$y_{t-2} y_t = \theta_1 y_{t-2} y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} y_{t-2} + y_{t-2}\varepsilon_t,$$
$$E(y_{t-2} y_t) = \theta_1 E(y_{t-2} y_{t-1}) + \theta_2 E(y_{t-2} y_{t-2}) + E(y_{t-2}\varepsilon_t),$$
$$\gamma_2 = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_0$$

$$y_{t-3} y_t = \theta_1 y_{t-3} y_{t-1} + \theta_2 y_{t-3} y_{t-2} + y_{t-3}\varepsilon_t,$$
$$E(y_{t-3} y_t) = \theta_1 E(y_{t-3} y_{t-1}) + \theta_2 E(y_{t-3} y_{t-2}) + E(y_{t-3}\varepsilon_t),$$
$$\gamma_3 = \theta_1 \gamma_2 + \theta_2 \gamma_1 \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Коррелограмма для процесса AR(2)

$$\begin{cases} \gamma_0 = \theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2, \\ \gamma_1 = \theta_1\gamma_0 + \theta_2\gamma_1, \\ \gamma_2 = \theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_0, \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \frac{(1-\gamma_2)\sigma_\varepsilon^2,}{(1+\gamma_2)(1-\gamma_1-\gamma_2)(1+\gamma_1-\gamma_2)}$$

Условие стационарности для $AR(2)$:

$\gamma_1 + \gamma_2 < 1,$

$\gamma_2 - \gamma_1 < 1,$

$|\gamma_2| < 1$

Коррелограмма для процесса AR(2)

$$\begin{cases}\gamma_1 = \theta_1\gamma_0 + \theta_2\gamma_1, \\ \gamma_2 = \theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\rho_1 = \theta_1 + \theta_2\rho_1, \\ \rho_2 = \theta_1\rho_1 + \theta_2\end{cases} - Yule - Wal\text{ker} \quad equations\ \ for \quad AR(2),$$

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \quad \rho_2 = \frac{\theta_1^2}{1-\theta_2} + \theta_2,$$

$$\rho_k = \theta_1\rho_{k-1} + \theta_2\rho_{k-2}, \quad k = 3,4,\ldots$$

Это разностное уравнение

второго порядка.

Коррелограмма для процесса AR(2)

$\rho_k = \theta_1 \rho_{k-1} + \theta_2 \rho_{k-2}, \quad k = 3,4,\dots$
Это разностное уравнение второго порядка.

Его решение:
$\rho_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k,$
где λ_1, λ_2 – корни уравнения:
$\lambda^2 - \theta_1 \lambda - \theta_2 = 0.$
Для стационарного процесса $|\lambda_i| < 1, \quad 1 = 1,2.$

ACF для $AR(2)$ будет exp убывающей.
Аналогично можно показать, что ACF для $AR(p)$ будет exp убывающей.

Коррелограмма для процесса AR(2)

$AR(2) \quad process: \quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t,$

Оценка $\quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad$ дает $\quad pacf_1 = \hat{\theta}_1,$

оценка $\quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad$ дает $\quad pacf_2 = \hat{\theta}_2,$

$\rho acf_j = 0, \quad j = 3, \dots$

Коррелограмма для процесса AR(p)

$AR(p) \quad process: \quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \cdots + \theta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t,$

ACF для $AR(p)$ будет exp убывающей.

Оценка $\quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad$ дает $\quad pacf_1 = \hat{\theta}_1,$

оценка $\quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad$ дает $\quad pacf_2 = \hat{\theta}_2,$

оценка $\quad Y_t = \delta + \theta_1 Y_{t-1} + \cdots + \theta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad$ дает $\quad pacf_p = \hat{\theta}_p,$

$\rho acf_j = 0, \quad j = p + 1, \ldots$

Коррелограмма для процесса MA(q)

$MA(1) \quad process\colon Y_t = \mu + \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1}.$

$\rhd\ \gamma_0 = (1 + \alpha^2)\sigma_\varepsilon^2,$

$\gamma_1 = \operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-1}) =$

$= \operatorname{cov}(\mu + \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1}, \mu + \varepsilon_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-2})$

$= \alpha\sigma_\varepsilon^2,$

$\gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = 0$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2},$$

$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = 0. \lhd$

Аналогично для $MA(q)$:

$\rho_j = 0, \quad j > q.$

Коррелограмма для процесса MA(q)

$MA(1)\colon y_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} \Leftrightarrow$

$AR(\infty)$ представление:

$$y_t = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \, y_{t-j-1} + \varepsilon_t.$$

Если $|\alpha| < 1$, то

PACF является exp убывающей.
Аналогично для $MA(q)$.

Коррелограмма для процесса ARMA(p,q)

Процесс	ACF	PACF
AR(p)	Exp убывает	=0 при $k > p$
MA(q)	=0 при $k > q$	Exp убывает
ARMA(p,q)	Exp убывает	Exp убывает

Если элементы ACF, PACF не превышают $2/\sqrt{T}$

То они статистически неотличимы от 0.

Способы оценки параметров

$AR(p)$

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \cdots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$MA(q)$

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}$$

$ARMA(p,q)$

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \cdots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}$$

AR (p) оценивается с помощью МНК

MA(q), ARMA(p, q) оцениваются с помощью ММП.

Критерии выбора (p,q) в модели ARMA (p,q)

ARMA(p, q), ARMA(p + 1, q), ARMA(p, q + 1) или ???

1) **Проверка, что ошибки в модели являются белым шумом.**

2) **Информационные критерии выбора количества лагов (параметры p и q)**

Информационные критерии для выбора параметров

$$ARMA(p,q)$$

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \ldots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}$$

Akaike's Information Criterion (AIC):

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + 2\frac{p+q}{T}.$$

Schwarz's Bayesian Information Criterion (BIC):

$$BIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{p+q}{T}\ln T.$$

Параметры p и q выбирают так, чтобы минимизировать AIC и BIC.

NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931
www.hse.ru