Программа учебной дисциплины
«Математический анализ»
(подготовка бакалавров)

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № __от ___2020

Разработчик	Лебедев Владимир Владимирович, профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ
Число кредитов	1-й год 14; 2-й год 5
Контактная работа (час.)	1-й год 280; 2-й год 60
Самостоятельная работа (час.)	1-й год 212; 2-й год 130
Курс, Образовательная программа	1–2, Прикладная математика
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

Основой настоящей программы является программа учебной дисциплины «Математический анализ» для направления 01.03.04.62 «Прикладная математика» подготовки бакалавра, 2014 год, разработанная В.В. Лебедевым и А.В. Романовым.

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целями освоения дисциплины Математический анализ являются:

- ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории пределов, с элементарными асимптотическими методами, с теорией и методами числовых и функциональных рядов, с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одного и нескольких действительных переменных, с теорией поля;
- формирование естественнонаучного мировоззрения.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- **Знать:** основные положения теории пределов и непрерывных функций, элементарные асимптотические методы, основы теории числовых и функциональных рядов, теории интегралов, зависящих от параметра, теории неявных функций и её приложений к задачам на условный экстремум,; основные теоремы и методы дифференциального и интегрального исчисления функций одного и нескольких переменных, теории поля.

- **Уметь:** определять возможности применения теоретических положений и методов математического анализа для постановки и решения конкретных прикладных задач; решать основные задачи на вычисление пределов функций, их дифференцирование и интегрирование, на вычисление интегралов, на разложение функций в ряды.
- **Иметь навыки** использования стандартных методов и моделей математического анализа и их применения к решению прикладных задач.

Настоящая дисциплина относится к циклу естественнонаучных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих базовую подготовку.

Для того, чтобы начать освоение этой учебной дисциплины от студентов не требуется знаний и умений, выходящих за рамки школьной программы.

Основные положения дисциплины используются в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- «Дифференциальные уравнения»; «Теория функций комплексного переменного»; «Функциональный анализ»; «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов»; «Уравнения математической физики»; «Методы оптимизации»; «Исследование операций»; «Физика»; «Математическое моделирование»; «Численные методы»; «Теория управления»; «Случайные процессы и теория массового обслуживания».
- Дисциплина изучается полтора года. На первом курсе в модулях 1-4 на втором в модулях 1-2.

Формат изучения дисциплины: без использования онлайн курса.

2. Содержание учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
	Первый курс				
1	Множества и их отображения. Действительные числа (структура вещественной прямой). Последовательности и их пределы.	38	12	12	14
2	Пределы и непрерывность функций	72	20	20	32
3	Производная, основные теоремы и методы дифференциального исчисления. Элементарные асимптотические формулы. Исследование функций при помощи производных.	80	24	24	32
4	Неопределённый интеграл	33	10	9	14
5	Определённый интеграл	36	8	8	20
6	Несобственные интегралы	40	8	7	25
7	Числовые ряды	50	14	13	23
8	Функции нескольких переменных. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	94	30	30	34
9	Функциональные последовательности и ряды	30	8	10	12
10	Степенные ряды. Ряды Тейлора.	21	6	7	8
	Итого:	**492**	**140**	**140**	**214**

	Второй курс				
11	Ряды Фурье	52	9	9	34
12	Интегралы, зависящие от параметра	14	2	2	10
13	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля.	124	19	19	86
	Итого:	**190**	**30**	**30**	**130**

Изложение строится по разделам. Для освоения каждого из 13 разделов предусмотрено обсуждение фундаментальных понятий дисциплины, их взаимосвязей, решение теоретических и вычислительных задач.

1-й год обучения

Раздел 1. Множества и их отображения. Действительные числа (структура вещественной прямой). Последовательности и их пределы.

Понятие множества. Понятие отображения. Знаки включения, объединения и пересечения. Кванторы $\exists$ и $\forall$. Необходимые, достаточные и равносильные условия. Знаки импликации $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ и $\Leftrightarrow$. Действительные числа и числовая прямая. Модуль действительного числа и его свойства. Метод математической индукции. Определение и запись последовательности. Ограниченные и неограниченные множества на прямой. Понятие функции. График функции. Ограниченные функции, ограниченные последовательности. Окрестности точек и окрестности $\pm\infty$ и ∞. Предел последовательности. Верхняя и нижняя грань множества. Предел монотонной последовательности. Бесконечно малые последовательности. Бесконечно большие последовательности; их связь с бесконечно малыми.

Арифметические действия над сходящимися последовательностями. Переход к пределу в неравенствах. Число e.

Литература: [**1,** глава 1], [**2,** отдел 1, §§1-4].

<u>Раздел 2</u>. Пределы и непрерывность функций.

Проколотые окрестности и полуокрестности. Пределы функций (в том числе односторонние). Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Арифметические действия с пределами. Предельный переход в неравенствах. Теорема о замене переменной в пределах. Еще раз число e. Символ o. Эквивалентные функции. Символ O. Непрерывность в точке (в том числе односторонняя). Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Простейшие асимптотические формулы. Теорема Коши о промежуточном значении. Арифметические действия с непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Непрерывность обратной функции. Теорема о непрерывности элементарных функций. Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательность. Теорема Больцано–Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности). Верхняя (нижняя) грань функции. Теорема Вейерштрасса о наибольшем (наименьшем) значении. Равномерная непрерывность Теорема Кантора.

Литература: [**1,** глава 2; глава 1,§§ 3-4], [**2,** отдел 1, §§5-9].

<u>Раздел 3</u>. Производная, основные теоремы дифференциального исчисления. Элементарные асимптотические методы. Исследование функций при помощи производных.

Определение производной (в том числе односторонней). Производные основных элементарных функций. Геометрический и механический смысл производной. Касательная и нормаль к графику функции. Формула линеаризации. Связь дифференцируемости и непрерывности. Линейность операции дифференцирования. Производные произведения и отношения двух функций.

Производная суперпозиции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Производные высших порядков. Точки экстремума. Теорема Ферма. Задача о максимуме и минимуме функции на замкнутом интервале (отрезке). Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Условия постоянства и монотонности функции. Теорема Коши. Правила Лопиталя. Многочлен Тейлора. Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Формулы Тейлора для некоторых элементарных функций. Использование формулы Тейлора–Лагранжа в приближенных вычислениях. Использование формул Тейлора–Пеано для асимптотического исследования функций. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции. Исследование функций при помощи 2-й производной и производных высших порядков. Асимптоты графика функции.

***Литература*:** [**1,** главы 3-4], [**2,** отдел 2, §§1-13].

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов. Линейность неопределенных интегралов. Замена переменного. Дифференциал. Внесение под знак дифференциала. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегралы, сводящиеся к интегралам от рациональных функций. Эйлерова подстановка.

***Литература*:** [**1,** глава 8], [**2,** отдел 3].

Раздел 5. Определенный интеграл.

Определенный интеграл, его геометрический смысл. Функции, интегрируемые на отрезке. Линейность и аддитивность определенного интеграла. Ограниченность интегрируемой функции. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных и кусочно непрерывных функций. Интегрируемость модуля интегрируемой функции и соответствующее неравенство. Интегрирование неравенств. Интегральная теорема о среднем. Производная интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.

Геометрические и механические приложения определенных интегралов. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Литература: [**1,** главы 9-10], [**2,** отдел 4, §§1-3,5-11].

<u>Раздел 6</u>. Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы 1-го рода. Несобственные интегралы 2-го рода. Теоремы сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Абсолютная сходимость несобственных интегралов.

Литература: [**1,** глава 13], [**2,** отдел 4, §§4]

<u>Раздел 7</u>. Числовые ряды.

Числовые ряды. Свойства сходящихся рядов. Ряды с неотрицательными членами. Теоремы сравнения. Признак Даламбера и радикальный признак Коши. Интегральный признак сходимости. Абсолютная сходимость рядов. Перестановки членов в абсолютно сходящемся ряде. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

Литература: [1**,** глава 11], [**2,** отдел 5, §§1-3].

<u>Раздел 8</u>. Функции нескольких переменных. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Пространство R^n. Расстояние и шар в R^n. Окрестность и проколотая окрестность точки в R^n. Предел последовательности точек в R^n. Ограниченные, открытые, замкнутые множества в R^n. Граница множества, связное множество. Область. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Функции нескольких переменных. График. Множество уровня. Предел. Непрерывность. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывных функций. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении. Частные производные 1-го и высших порядков. Теорема Шварца о смешанных производных. Дифференцируемые функции. Связь дифференцируемости и непрерывности. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных. Градиент. Производная по направлению. Формула линеаризации. Касательная плоскость. Матрица Якоби и дифференцирование суперпозиции. Формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа второго порядка. Экстремумы функции нескольких переменных. Задача об условном экстремуме. Теорема о неявной функции, ее геометрический смысл. Дифференцирование неявной функции. Правило множителей Лагранжа. Задача о максимуме и минимуме функции в замкнутой области.

Литература: [**1,** главы 5-6], [**2,** отдел 6].

<u>Раздел 9</u>. Функциональные последовательности и ряды.

Поточечная сходимость функциональной последовательности и ее предел. Множество сходимости функциональной последовательности. Поточечная сходимость функционального ряда и его сумма. Множество сходимости функционального ряда. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды, их свойства. Критерий равномерной сходимости. Необходимое условие равномерной сходимости. Условие Вейерштрасса, достаточное для равномерной сходимости. Интегрирование и дифференцирование предельной функции. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

Литература: [**1,** глава 12], [**2,** отдел 5, §4].

<u>Раздел 10.</u> Степенные ряды. Ряды Тейлора.

Множество сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Теорема единственности для степенных рядов. Функции, являющиеся суммами степенных рядов. Ряд Тейлора; достаточное условие его сходимости к исходной функции. Ряды Тейлора основных элементарных функций. Использование рядов Тейлора для приближенного вычисления интегралов.

Литература: [**1,** глава 12], [**2,** отдел 5, §5].

2 -й год обучения

Раздел 11. Ряды Фурье.

Метрические, линейные нормированные и евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональность. Линейная оболочка. Ортогональная проекция. Задача о наилучшем приближении в евклидовом пространстве. Процедура ортогонализации. Всюду плотные множества в метрическом пространстве. Полнота системы векторов в евклидовом пространстве. Теорема о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе. Равенство Парсеваля. Пространство $C_2([-\pi,\pi])$. Среднеквадратичная сходимость. Связь поточечной, равномерной и среднеквадратичной сходимости. Пространство $C([-\pi,\pi])$. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими и тригонометрическими полиномами. Ортонормированность и полнота тригонометрической системы в $C_2([-\pi,\pi])$. Ряд Фурье по тригонометрической системе. Теорема о среднеквадратичной сходимости. Ряды по синусам и по косинусам. Теоремы о равномерной и поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме. Ряды Фурье на отрезке $[-l,l]$.

***Литература*:** [**1,** глава 19-20], [**2,** отдел 5, §6].

Раздел 12. Интегралы, зависящие от параметра.

Непрерывность и дифференцируемость функции, определенной с помощью интеграла, зависящего от параметра. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

***Литература*:** [**1,** глава 14], [**2,** отдел 7].

<u>Раздел 13</u>. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля.

Двойной интеграл. Определение, свойства. Сведение к повторному. Якобиан и замена переменной в двойном интеграле. Полярные координаты. Механические приложения. Интеграл от скалярной функции по плоской кривой. Интеграл плоского векторного поля по плоской кривой. Скалярный и векторный дифференциалы длины; их применения к вычислению интегралов по кривым. Формула Грина. Плоские потенциальные поля. Восстановление потенциала. Тройной интеграл. Сведение к повторному. Якобиан и замена переменной в тройном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты. Геометрические и механические приложения тройных интегралов. Интеграл от скалярной функции по кривой в R^3. Интеграл от векторного поля по кривой в R^3. Скалярный и векторный дифференциалы длины; их применения к вычислению интегралов по кривым. Интеграл от скалярной функции по поверхности. Поток векторного поля через поверхность. Векторный и скалярный дифференциалы площади; их применение к вычислению интегралов по поверхностям. Формула Остроградского–Гаусса. Дивергенция. Условие равенства нулю потока через любую замкнутую поверхность. Формула Стокса. Потенциальные поля в R^3. Восстановление потенциала.

Литература: [**1,** главы 15-18], [**2,** отдел 8].

3. Оценивание

Блокирующие элементы контроля отсутствуют.

Промежуточная аттестация студентов проводится в конце модулей 2, 4 первого года обучения, а окончательная аттестация – в конце модуля 2 второго года обучения. Всего за время обучения дисциплине проводятся пять контрольных работ, два коллоквиума и даётся два домашних задания. Накопленные оценки $O_{\text{нак}_{1-2}}$, $O_{\text{нак}_{3-4}}$ за модули 1–2, 3–4 первого года и $O_{нак_{5-6}}$ за модули 1–2 второго года выводятся как среднее арифметическое оценок за домашниеработы, контрольные работы и коллоквиумы в этих модулях.

В конце модуля 2 первого года проводится промежуточный экзамен. Оценка промежуточной аттестации выводится по правилу

$$O_{па1-2} \;=\; 0.5 \cdot O_{нак1-2} + 0.5 \cdot O_{\text{экз}}.$$

!!! В связи с переходом на дистанционную форму, вышеприведенная формула изменена: О*па*1-2=О*нак* 1-2 (автомат).

В конце модуля 4 первого года проводится промежуточный экзамен:

$$O_{па3-4} \;=\; 0.5 \cdot O_{нак3-4} + 0.5 \cdot O_{экз}.$$

!!! В связи с переходом на дистанционную форму, вышеприведенная формула изменена: О*па*3-4=О*нак* 3-4 (автомат).

В конце модуля 2 второго года проводится итоговый экзамен (по всему курсу). Окончательная (идущая в диплом) оценка по учебной дисциплине формируется следующим образом:

$$O_{окон} \;=\; 0.5 \cdot O'_{экз} + 0.2 \cdot O_{па1-2} + 0.2 \cdot O_{па3-4} + 0.1 \cdot O_{нак5-6}.$$

!!! В связи с переходом на дистанционную форму, вышеприведенная формула изменена: Оокон=1/3(Опа 1-2+Опа3-4+Онак5-6) (автомат)

Оценки по всем формам текущего, промежуточного и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале с округлением в пользу студента. Оценки $O_{нак}$ не округляются.

Контрольная работа состоит в решении стандартных задач по материалам курса, требующих технических навыков. Ошибки технического характера (в умеренном количестве) не влекут значительного снижения оценки. Наличие правильного подхода к решению задачи (даже при отсутствии его технической реализации) учитывается в пользу студента.

Домашнее задание подразумевает решение стандартных задач по материалам курса (на основе знания теории), требующих продолжительного времени для их решения.

На коллоквиуме проверяется: 1) умение студента формулировать основные определения курса; 2) умение формулировать основные утверждения курса без доказательств.

Выставляемая оценка за контрольную работу, домашнее задание, или коллоквиум равна среднему арифметическому полученных студентом оценок (по 10-ти балльной шкале) за отдельные задачи (вопросы на коллоквиуме).

Студент, получивший неудовлетворительную оценку (меньше 4 баллов по десятибалльной шкале) за контрольную работу или за коллоквиум может исправить свой результат, переписав (один раз) контрольную работу или пересдав (один раз) коллоквиум. Результат переписывания контрольной работы или пересдачи коллоквиума умножается на коэффициент 0.7, но первоначальная оценка не может ухудшиться.

На экзамене проверяется умение студента: 1) формулировать и доказывать теоремы курса (демонстрируя при этом знание соответствующих определений); 2) решать стандартные задачи курса. При доказательстве теорем допустимо пользоваться соображениями и понятиями, выходящими за рамки курса. При этом, однако, студент должен продемонстрировать знание соответствующих определений и методов.

Форма экзаменов – устная. На экзамене даётся два теоретических вопроса и две задачи, оценка выводится как среднее арифметическое.

При накопленной оценке не ниже 8 баллов и активной самостоятельной и аудиторной работе студент может (по его согласию!) быть освобождён преподавателем, ведущим семинары, или лектором от сдачи промежуточного экзамена; в этом случае результирующая оценка совпадает с округлённой накопленной.

4. Примеры оценочных средств

Типовые варианты контрольных работ и домашних заданий. Примерные вопросы к коллоквиумам.

1-й год обучения

Модули 1–2

Контрольная работа. Пределы функций

Найдите пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\mathrm{tg}^2 x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{3^{x^2}-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+9x^2}-\sqrt[5]{x^5-4x^3}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+\sin 3x^2-2}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$.

Коллоквиум. Пределы функций. Непрерывность функций

1. Сформулируйте лемму о предельном переходе в неравенствах.
2. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках.
3. Дайте определение функции равномерно непрерывной на промежутке.

Контрольная работа. Производные

1. Вычислите производные функций: $y=\frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}3x}}$; $y=\ln\cos e^{-2x}$; $y=\ln\ln\sin x$;

$y=(\arcsin 2x)\sqrt{\sin 3x}$; $y=\sqrt{1+\arccos x}$; $y=x^{x^2}$.

2. Проведите линеаризацию функции $f(x)=\sqrt[3]{6+\sqrt{x}}$ в точке $x_0=4$. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.
3. Для функции $f(x)=\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x-x^2)$ напишите формулу Тейлора–Пеано второго порядка в точке $x_0=0$ и схематично изобразите её график вблизи этой точки.

Модули 3–4

Коллоквиум. Неопределённый и определённый интеграл

1. Запишите формулу интегрирования по частям для неопределённого интеграла. Вычислите

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

2. Сформулируйте теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Изложите метод (центральных) прямоугольников для приближённого вычисления определённого интеграла. Запишите оценку для ошибки.

Контрольная работа. Числовые ряды.

1. Исследуйте на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n+\ln n}{n^5+ne^n+3n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1 \cos\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3+1/n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2}\right)^{-n^5}$$

.

2. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{10n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[13]{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} - 1\right).$$

Домашнее задание. Функции нескольких переменных.

1. Дана функция $f(x,y) = 1/\sqrt{4x^2 - y^2}$. На плоскости XOY изобразите множество, где функция f определена. Является ли это множество открытым, замкнутым, областью. Изобразите множества $f(x,y) > 0$, $f(x,y) < 0$, а также линии уровня $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = 2$, $f(x,y) = 3$.

2. Дана функция $f(x,y) = y^2 + \operatorname{arctg}(x/y) - \ln(x^2 + y^2)$. Найдите все производные первого и второго порядка этой функции и вычислите их значения в точке $(x_0, y_0) = (0,1)$.
3. Для функции $f(x,y) = e^{x \sin y}$. Запишите для этой функции формулу линеаризации в точке $(x_0, y_0) = (0,0)$. Запишите уравнение касательной плоскости к графику этой функции в соответствующей точке.
4. Функция $y = y(x)$ задана неявно условиями

$$4x^5 + x^3y^3 - 5y^2, \quad y(1) = 1.$$

Запишите для этой функции формулу Тейлора-Пеано второго порядка в точке $x_0 = 1$.

5. Исследуйте на экстремум функцию $z = 2x^2y + 3xy^2 - 18xy$.
6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $w = x + 2y^3 - z^3$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Контрольная работа. Общие функциональные последовательности и ряды.

1. Исследуйте на поточечную и равномерную сходимость заданную последовательность функций на указанном множестве:

а) $f_n(x) = ln\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad x > 1;$ б) $f_n(x) = sin\frac{x}{n}, \quad |x| \leq 1.$

2. Исследуйте на поточечную и равномерную сходимость заданный функциональный ряд на указанном множестве:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^4 e^{-nx}, \quad x > 0;$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{x+\sqrt{n}}{n^2+n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$

2-й год обучения

Модули 1–2

Контрольная работа. Ряды Фурье

1. Разложите функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \pi/2, \\ -1, & \pi/2 < x \leq \pi, \\ 2x - 1, & -\pi \leq x < -\pi/2 \end{cases}$$

в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Для полученного разложения запишите равенство Парсеваля.

2. Приблизьте наилучшим образом в $C_2([0,1])$ функцию $f(x) = x^3$ многочленом второй степени.

Домашнее задание. Кратные интегралы и теория поля.

1. Найдите массу и центр тяжести эллипсоида $\rho = x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 16$, если плотность задана следующим образом: $\rho = |z|$.

2. Покажите, что векторное поле

$$\overline{F} = \left(\frac{1}{sin^2 x} - \frac{cos\,3\,y}{x}\right)\overline{i} \; + \; \left(3\,sin\,3\,y\,ln\,x \; + \; \frac{1}{2y+5}\right)\overline{j}$$

является потенциальным. Найдите потенциал и вычислите работу этого поля на пути от $A(1,2)$ до $B(2,3)$.

3. Вычислите площадь поверхности, являющейся графиком функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17},$$

заданной в области, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = -x$, $y = -3x$.

4. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, найдите поток векторного поля $\overline{F} = 7x\overline{i} + 9\pi y\overline{j} + \overline{k}$ через поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x + \tfrac{1}{3}y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Вычислите этот же поток непосредственно и убедитесь в совпадении результатов.

5. Найдите дивергенцию и ротор поля $\overline{F} = c \times \nabla u$, где $c = 2\overline{i} + \overline{k}$, $u = xy + yz$.

Примерный список вопросов к экзаменам (по всему курсу).

1-й год обучения. Модули 1–2.

1. Расскажите о числах: натуральных, целых, рациональных и иррациональных. Расскажите о числовой прямой R и отождествлении её точек с числами. Расскажите о модуле числа и о том, как измеряется расстояние между точками на прямой. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррациональное.

2. Докажите, что как рациональные так и иррациональные числа расположены на прямой всюду плотно, т.е. докажите, что любой интервал содержит и те и другие числа.

3. Расскажите о методе индукции. Докажите, что $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ делится на 19 при любом натуральном n.

4. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

5. Расскажите о понятии множества и отображения. Что такое суперпозиция отображений? Что такое обратное отображение?

6. В каком случае мы говорим, что множество на прямой является

ограниченным сверху (снизу)? Дайте определение ограниченного множества. Докажите, что конечное объединение ограниченных множеств является ограниченным множеством.

7. Расскажите о понятии функции, заданной на подмножестве прямой. Дайте определения функции ограниченной сверху (снизу), ограниченной функции, монотонной функции, суперпозиции функций и обратной функции. Дайте определение графика функции. Приведите примеры.

8. Дайте определение последовательности. Что такое монотонная последовательность? Что такое ограниченная сверху (снизу) последовательность? Что такое ограниченная последовательность?

9. Дайте определение окрестности $O(a)$ точки $a \in R$. Дайте определение окрестностей $O(+\infty)$, $O(-\infty)$, $O(\infty)$. Дайте определения соответствующих δ - окрестностей.

10. Дайте определение пределов $lim_{n\to\infty}\ a_n = a$, $lim_{n\to\infty}\ a_n = +\infty, -\infty, \infty$. Докажите теорему о единственности предела последовательности. Что такое сходящаяся последовательность?

11. Дайте определение верхней и нижней грани множества на вещественной прямой R. Сформулируйте теорему о существовании верхней (нижней) грани всякого множества, ограниченного сверху (снизу).

12. Докажите, что всякая последовательность, имеющая (конечный) предел, ограничена. Покажите на примере, что обратное неверно (рассмотрите последовательность $a_n = (-1)^n$, $n = 1,2,\ldots$). Докажите теорему о пределе монотонных последовательностей.

13. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Объясните связь между ними. Докажите, что $lim_{n\to\infty}\ a_n = a$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность.

14. Докажите, что сумма (двух) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Докажите, что произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.

15. Докажите арифметические свойства пределов последовательностей: пусть $lim_{n\to\infty} \ a_n = a$ и $lim_{n\to\infty} \ b_n = b$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b, \quad \text{если} \quad b \neq 0.$$

16. Докажите теорему о предельном переходе в неравенствах.

17. Докажите лемму "о двух милиционерах" (для последовательностей).

18. Запишите неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим и докажите, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Этот предел обозначается через e. Покажите, что $2 \leq e \leq 4$.

19. Дайте определение проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$ точки x_0 и ее левой и правой проколотой полуокрестности $\dot{O}^-(x_0)$, $\dot{O}^+(x_0)$. Дайте определения соответствующих проколотых δ -окрестностей.

20. Дайте определения пределов функции

$$\lim_{x\to x_0(+\infty,\ -\infty,\ \infty,\ x_0+0,\ x_0-0)} f(x) \ = \ a \ (+\infty, \ -\infty, \ \infty).$$

Приведите примеры. Докажите теорему о единственности предела функции.

21. Покажите, что $lim_{x\to x_0} f\,(x) \ = a$ тогда и только тогда, когда $lim_{x\to x_0+0} f\,(x) \ = \ lim_{x\to x_0-0} f\,(x) \ = a.$

22. Докажите, что не существует $lim_{x\to+\infty} \ \ sin\, x.$

23. Докажите, что функция, имеющая конечный предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки. Верно ли обратное? (Рассмотрите предел $lim_{x\to 0} \ \ sin\frac{1}{x}$.)

24. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой функции при $x \to x_0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$. Поясните связь между ними. Приведите примеры. Покажите, что произведение (локально) ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция. Покажите, что сумма (двух) бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

25. Докажите, что $lim_{x \to x_0} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

26. Докажите арифметические свойства конечных пределов функций: если $lim_{x \to x_0} f(x) = a$ и $lim_{x \to x_0} g(x) = b$, то

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b;$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab;$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = a/b, \quad \text{если} \quad b \neq 0.$$

Сформулируйте аналогичные утверждения для односторонних пределов.

27. Докажите лемму о сохранении знака: если, $lim_{x \to x_0} \ f(x) > 0\ (< 0)$, то в некоторой проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$ точки x_0 имеем $f(x) > 0\ (< 0)$.

28. Докажите, что если $f(x) \geq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и существуют $lim_{x \to x_0} f(x) = a, lim_{x \to x_0} g(x) = b$, то $a \geq b$ (теорема о предельном переходе в неравенствах для функций).

29. Докажите, что если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполнены неравенства $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ и существуют пределы $lim_{x \to x_0} \ g(x) = lim_{x \to x_0} \ h(x) = c$, то существует и равен c предел $lim_{x \to x_0} f(x)$ (лемма о "двух милиционерах" для функций).

30. Докажите теорему о замене переменной в пределах. Покажите, что $lim_{x \to \infty}(1 + 1/x)^x = e$.

31. Дайте определение эквивалентных функций при $x \to x_0$ (при $x \to x_0 \pm 0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$). Докажите, что если $a(x) \sim b(x)$ и $c(x) \sim d(x)$, то $a(x)c(x) \sim b(x)d(x)$ и $a(x)/c(x) \sim b(x)/d(x)$. Верно ли, что $a(x) + c(x) \sim b(x) + d(x)$?

32. Дайте определение соотношения $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$. Покажите, что

соотношения $f(x) \sim g\ (x),\ x \to x_0,$ и $f(x) = g\ (x) + o(g(x)),\ x \to x_0,$ означают одно и то же. Дайте определение соотношения $f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0.$

33. Дайте определение функции, непрерывной в точке; на интервале. Изложите классификацию точек разрыва. Дайте определение функции непрерывной слева (справа).

34. Что такое элементарная функция? Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций. Докажите её для какой-нибудь основной элементарной функции (например, докажите, что функция $sin\,x$ непрерывна на всей прямой)

35. Докажите, что при $x \to 0$ справедливы соотношения: $sin\,x \sim x,\ 1 - cos\,x \sim x^2/2,\ \ ln(1 + x) \sim x.$ Запишите эти эквивалентности в виде равенств (асимптотических формул).

36. Докажите, что при $x \to 0$ справедливы соотношения $e^x - 1 \sim x,\ \ (1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$ Запишите эти эквивалентности в виде равенств (асимптотических формул).

37. Докажите, что $log_a\,x = o(x^\alpha),\ \ x \to +\infty,$ в случае, когда $a > 1,\ \ \alpha > 0,$ т.е. докажите, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{log_a\,x}{x^\alpha} = 0, \quad a > 1, \quad \alpha > 0.$$

38. Докажите, что $x^\alpha = o(b^x),\ \ x \to +\infty,$ в случае, когда $\alpha > 0,\ \ b > 1,$ т.е. докажите, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0, \quad \alpha > 0, \quad b > 1.$$

39. Расскажите, как нарисовать набросок графика функции, выделяя главные части в особых точках и на бесконечности. Постройте набросок графика функции $y = ln|x + 1| + ln|x + 2| + 1/x - 1/(x + 1)^2.$

40. Докажите теорему Коши о промежуточном значении. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам.

41. Докажите арифметические свойства непрерывных функций: непрерывность суммы (разности), произведения и частного непрерывных функций.

42. Докажите теорему о непрерывности суперпозиции (двух) непрерывных функций.

43. Докажите теорему о непрерывности обратной функции.

44. Получите теорему о непрерывности элементарных функций.

45. Докажите лемму о вложенных отрезках.

46. Дайте определение подпоследовательности. Докажите лемму Больцано–Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности).

47. Дайте определение верхней (нижней) грани функции, заданной на некотором множестве. Сформулируйте теорему о существовании верхней (нижней) грани функции, ограниченной сверху (снизу). Докажите теорему Вейерштрасса о максимальном (минимальном) значении непрерывной функции на отрезке. Покажите на примерах, что все условия этой теоремы являются существенными.

48. Дайте определение функции равномерно непрерывной на промежутке. Докажите, что равномерная непрерывность влечет непрерывность. Верно ли обратное? (Рассмотрите функцию $\frac{1}{x}$ на интервале $(0,\ 1)$.)

49. Докажите теорему Кантора: если функция непрерывна на отрезке I, то она равномерно непрерывна на I.

50. Дайте определение модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ функции f на промежутке I. Покажите, что функция f равномерно непрерывна на I тогда и только тогда когда $\omega_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

51. Являются ли равномерно непрерывными функции x, $\sin x$, x^2, $\sin x^2$ на $\mathbb{R}$?

52. Являются ли равномерно непрерывными функции x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sin\frac{1}{x}$ на интервале $(0,\ 1)$?

53. Дайте определение производной и односторонней производной. Вычислите по определению производные следующих функций: $y = C$, $y = x$, $y = x^\alpha$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \ln x$, $y = e^x$. Определите старшие

производные функций.

54. Объясните геометрический смысл производной функции в точке. Дайте определение касательной к кривой, являющейся графиком функции, и выведите ее уравнение. Выведите уравнение нормали.

55. Выведите формулу линеаризации, поясните ее геометрический смысл.

56. Докажите, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке. Верно ли обратное?

57. Докажите теоремы о производной линейной комбинации и произведения функций. Приведите примеры.

58. Докажите теорему о производной частного. Найдите $(tg\,x)'$, $(ctg\,x)'$.

59. Докажите теорему о производной суперпозиции функций. Приведите примеры.

60. Докажите теорему о производной обратной функции. Вычислите $(arcsin\,x)'$, $(arccos\,x)'$, $(arctg\,x)'$, $(arcctg\,x)'$.

61. Дайте определение точки локального экстремума. Докажите теорему Ферма. Дайте определение критической точки. Приведите примеры. Расскажите, как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

62. Докажите теорему Ролля. Объясните ее геометрический смысл. Приведите примеры.

63. Выведите формулу Лагранжа. Объясните ее геометрический смысл. Докажите, что если $f'(x) = 0$ при всех x из некоторого интервала, то f постоянна на этом интервале.

64. Выведите необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке в терминах ее первой производной. Выведите условие (в терминах первой производной), достаточное для того, чтобы в точке функция имела экстремум.

65. Выведите формулу Коши.

66. Сформулируйте правило Лопиталя, докажите его в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

67. Дайте определение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 и выведите формулу Тейлора–Пеано.

68. Выведите формулу Тейлора–Лагранжа.

69. Запишите многочлен Тейлора для функций $y = e^x$, $y = ln(1+x)$ $(x_0 = 0)$. Запишите соответствующие асимптотические формулы (формулу Тейлора–Пеано).

70. Запишите многочлен Тейлора для функций $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, $y = (1+x)^\alpha$ (при $x_0 = 0$). Запишите соответствующие асимптотические формулы (формулу Тейлора–Пеано).

71. Определите при малых значениях $x \neq 0$ знак функции

$$f(x) = ln(1 + x + x^2) + ln(1 - x - x^2).$$

72. Вычислите e с точностью 0,01.

73. Вычислите $sin\, 1$ с точностью 0,01.

74. Докажите, что число e иррационально.

75. Выведите достаточное условие локального экстремума функции с использованием второй производной. Приведите пример. Расскажите, что делать, если в критической точке вторая производная обращается в 0.

76. Когда говорят, что функция выпукла (вогнута) на интервале? Выведите достаточные условия выпуклости (вогнутости). Приведите примеры.

77. Дайте определения точки перегиба графика функции. Выведите условие, гарантирующее, что в точке имеется перегиб. Приведите пример.

78. Дайте определения вертикальной и наклонной асимптот функции. Выведите условия существования наклонной асимптоты. Выведите формулы для её нахождения. Приведите пример.

1-й год обучения. Модули 3–4.

1. Дайте определение неопределенного интеграла (первообразной) и укажите его основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных.

2 Расскажите о замене переменной. дайте определение дифференциала

функции и расскажите о внесении под знак дифференциала в неопределенных интегралах. Вычислите

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int \frac{ln\, x}{x}dx.$$

3. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x\, dx$.

4. Выведите рекуррентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

5. Перечислите простейшие рациональные функции, расскажите об их интегрировании.

6. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простейших. Вычислите

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx.$$

7. Расскажите, как следующие интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций ($R(\ )$обозначает рациональное выражение от соответствующих переменных):

$$\int R\big(x^\alpha,\ x^\beta,\ x^\gamma,\ \ldots\big)dx, \quad \int R\big(e^{\alpha x},\ e^{\beta x},\ e^{\gamma x},\ \ldots\big)dx,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – рациональные числа. Вычислите

$$\int \frac{e^x + e^{\frac{x}{2}}}{e^{2x}+1}dx.$$

8. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x\,,\ \sin x)dx$$

и об их сведении к интегралам от рациональных функций (при помощи универсальной тригонометрической замены переменной). Вычислите

$$\int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx.$$

9. Расскажите о вычислении интегралов

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

(при помощи эйлеровой подстановки).

10. Дайте определение функции интегрируемой на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла.

11. Докажите, что функция Дирихле не интегрируема.

12. Выведите свойство линейности и свойство аддитивности определенного интеграла.

13. Докажите, что всякая интегрируемая функция – ограничена.

14. Сформулируйте критерий интегрируемости.

15. Докажите, что всякая функция непрерывная на отрезке – интегрируема. Докажите, интегрируемость кусочно непрерывной функции.

16. Докажите теорему об интегрируемости модуля интегрируемой функции и докажите, что если функция f – интегрируема на $[a,\ b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ \le\ \int_a^b |f(x)|dx.$$

17. Докажите теоремы об интегрировании неравенств и об оценке определенного интеграла.

18. Докажите теорему о среднем значении для определенного интеграла.

19. Докажите теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона–Лейбница.

20. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле. Вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

21. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^2 x\, ln\, x\, dx.$$

22. Дайте определение кривой на плоскости и ее длины. Выведите формулу для

вычисления длины дуги графика гладкой функции. Найдите длину дуги параболы $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$.

23. Выведите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения массы.

24. Выведите формулу работы переменной силы на прямолинейном пути.

25. Выведите формулу для вычисления объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Выведите формулу для вычисления объема тела вращения. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$ ("параболическая чашка").

26. Изложите метод (центральных) прямоугольников для приближенного вычисления определенных интегралов. Выведите оценку ошибки.

27. Дайте определение несобственного интеграла 1-го рода (по бесконечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

28. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченной функции по конечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

29. Расскажите о вычислении несобственных интегралов при помощи замены переменной, внесения под знак дифференциала, интегрировании по частям. Вычислите интегралы

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx\,, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

29. Расскажите с обоснованием о поведении несобственных интегралов

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

30. Выведите признак сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Выведите предельный признак сравнения (интегралы от эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно).

31. Дайте определение абсолютной сходимости несобственных интегралов и докажите теорему об абсолютной сходимости. Покажите, что несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{sin\, x}{x^\alpha} dx\,, \quad \int_1^\infty \frac{cos\, x}{x^\alpha} dx$$

сходятся абсолютно при $\alpha > 1$.

32. Покажите, что несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{sin\, x}{x^\alpha} dx\,, \quad \int_1^\infty \frac{cos\, x}{x^\alpha} dx$$

сходятся при $0 < \alpha \leq 1$, но абсолютной сходимости нет.

33. Дайте определение частичной суммы числового ряда. Дайте определение сходящегося числового ряда и его суммы. Сформулируйте основные свойства числовых рядов. Покажите, что если ряд сходится, то его члены стремятся к 0. Укажите пример, показывающий, что обратное не верно.

34. Докажите, что ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

35. Выведите признак сравнения для числовых рядов с неотрицательными членами. Выведите предельный признак сравнения (ряды с эквивалентными членами сходятся или расходятся одновременно).

36. Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши. Докажите один из них. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$?

37. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. При каких значениях α сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(log\, n)^\alpha}$?

38. Дайте определение абсолютно сходящегося числового ряда и докажите теорему об абсолютной сходимости. Приведите пример сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда.

39. Докажите теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Сформулируйте теорему о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда.

40. Докажите теорему Лейбница о знакочередующихся рядах. Для рядов Лейбница выведите оценку уклонения частичной суммы от суммы ряда.

41. Что такое расстояние в $\mathbb{R}^n$? Что такое шар в $\mathbb{R}^n$? Дайте определение окрестности и проколотой окрестности точки в $\mathbb{R}^n$, предела последовательности точек в $\mathbb{R}^n$. Дайте определения ограниченного множества, открытого и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$, границы множества, связного множества, области.

42. Докажите лемму Больцано–Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности из любой ограниченной последовательности).

43. Расскажите о понятии функции нескольких переменных. Что такое график функции (на примере функции 2-х переменных). Что такое множество уровня. Дайте определение предела функции. Существует ли

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{xy}{x^2+y^2}?$$

44. Дайте определение непрерывности функции (нескольких переменных) в точке и перечислите основные свойства непрерывных функций.

45. Докажите теорему Коши о промежуточном значении в многомерном случае. Изложите и обоснуйте метод "пробных точек" решения неравенств вида $f(x, y) > 0$. Найдите область определения функции $z = ln\frac{xy-1}{x^2+y^2-1}$.

46. Докажите теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении (для функций нескольких переменных).

47. Дайте определение частных производных. Сформулируйте теорему Шварца о смешанных производных. Дайте определение дифференцируемости функции многих переменных. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и непрерывности. Докажите достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

48. Дайте определение градиента. Дайте определение производной по направлению и выведите формулу для ее вычисления.

49. Выведите формулу линеаризации (для функций нескольких переменных).

50. Дайте определение касательной плоскости к графику функции двух

переменных. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и существования касательной плоскости. Выведите уравнение касательной плоскости.

51. Дайте определение матрицы Якоби. Выведите формулу дифференцирования суперпозиции функций нескольких переменных.

52. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом Лагранжа второго порядка (для функций нескольких переменных).

53. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

54. Выведите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Укажите эквивалентную форму достаточного условия в случае функций двух переменных (в терминах вторых производных). Найдите точки локального экстремума функции $z = x^3 - y^2 + x^2 y$ и укажите, к какому типу они относятся.

55. Дайте определение точки условного локального экстремума функции нескольких переменных.

56. Расскажите о способах задания кривых и поверхностей в пространстве. Сформулируйте теорему о неявной функции и поясните ее геометрически.

57. Как дифференцировать неявную функцию? Запишите формулу Тейлора–Пеано второго порядка при $x \to 0$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $xy^3 + y^2 - 1 = 0,\ y(0) = 1$.

58. Сформулируйте необходимое условие локального условного экстремума (правило множителей Лагранжа). Поясните его в случае функции двух переменных и одного условия; функции трех переменных и одного условия; функции трех переменных и двух условий.

59. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 + z^3$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

60. Изложите с обоснованием метод, позволяющий найти наибольшее и

наименьшее значение гладкой функции в ограниченной замкнутой области с "хорошей" (кусочно-гладкой) границей. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 - z^3$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

61. Дайте определения поточечно сходящейся функциональной последовательности на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и ее предела (предельной функции). Дайте определение множества сходимости функциональной последовательности. Найдите множество сходимости и предел последовательности $f_n(x) = x^n$, $n = 1,2,\dots$.

62. Дайте определение поточечно сходящегося функционального ряда на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и его суммы. Дайте определение множества сходимости функционального ряда. Найдите множество сходимости и суму ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

63. Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда.

64. Покажите, что равномерная сходимость последовательности функций f_n, $n = 1,2,\dots$, к функции f на множестве E равносильна условию

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

(критерий равномерной сходимости).

65. Покажите, что равномерная сходимость влечет поточечную сходимость (к тому же пределу). Приведите пример показывающий, что из поточечной сходимости не следует равномерная.

66. Исследуйте на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = nxe^{-x^2n^2}$ на всей прямой R, на отрезке $[1,2]$.

67. Исследуйте на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + x^2}$$

на всей прямой $\mathbb{R}$ (воспользуйтесь оценкой остатка для рядов Лейбница).

68. Покажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. Докажите непрерывность

суммы равномерно сходящегося ряда, члены которого непрерывны.

69. Выведите необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда (равномерная сходимость членов ряда к нулю).

70. Выведите достаточный признак (признак Вейерштрасса) равномерной сходимости функционального ряда.

71. Исследуйте на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x + 1}$$

на луче $[1, +\infty)$, на отрезке $[0,1]$.

72. Выведите достаточное условие, обеспечивающее равенство

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

73. Выведите достаточное условие, обеспечивающее возможность почленного интегрирования ряда:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

74. Выведите достаточное условие, обеспечивающее равенство

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

75. Выведите достаточное условие, обеспечивающее возможность почленного дифференцирования ряда:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

76. Дайте определение степенного ряда. Сформулируйте теоремы о множестве сходимости степенного ряда и его равномерной сходимости. Выведите формулы для радиуса сходимости.

77. Сформулируйте теорему о радиусе сходимости продифференцированного и проинтегрированного степенного ряда. Дайте иллюстрацию этой теоремы в случае, когда существует предел (конечный или бесконечный)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

78. Покажите, что внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать. Найдите сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

79. Докажите, что два разных степенных ряда с одинаковым центром не могут иметь одинаковую сумму (теорема единственности).

80. Получите условие необходимое для того, чтобы заданная функция являлась суммой некоторого степенного ряда. Получите соответствующее достаточное условие и запишите этот ряд – ряд Тейлора.

81. Разложите в ряд Тейлора функции e^x, $\sin x$, $\cos x$.

82. Разложите в ряд Тейлора функции $\ln(1 + x)$, $\mathrm{arctg} x$.

83. Разложите в ряд Тейлора функцию $(1 + x)^\alpha$.

84. Сформулируйте теорему о ряде Тейлора суммы, произведения и суперпозиции функций. Выпишите четыре ненулевых члена ряда Тейлора функций $(\sin x) \cdot \ln(1 + x)$ и $e^{\sin x}$.

85. Используя ряд Тейлора для e^x, вычислите с точностью 10^{-5} интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

2-й год обучения. Модули 1–2.

1. Дайте определение метрического пространства. Приведите примеры. Дайте определение сходящейся последовательности в метрическом пространстве и ее предела. Докажите, что предел (если он существует) – единственен.

2. Дайте определение линейного нормированного пространства. Приведите примеры. Покажите, что соотношение $\rho(x, y) = \|x - y\|$ определяет расстояние (метрику). Дайте определение сходящегося ряда в линейном нормированном пространстве и его суммы.

3. Дайте определение евклидова пространства (можно ограничиться вещественным случаем). Приведите примеры.

4. Выведите неравенство Коши–Буняковского. Покажите, что в евклидовом

пространстве соотношение $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ определяет норму.

5. Когда говорят, что два вектора евклидова пространства ортогональны? Дайте определение ортонормированной системы векторов. Дайте определение линейной оболочки системы векторов.

6. Дайте определение ортогональной проекции вектора на подпространство. Докажите единственность ортогональной проекции и выведите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство $\Pi = \langle e_1, e_2, \dots, e_N \rangle$, являющееся линейной оболочкой конечной системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_N$, образующих ортонормированную систему.

7. Сформулируйте задачу о наилучшем приближении заданного вектора евклидова пространства при помощи вектора из заданного подпространства Π. Сформулируйте и докажите теорему о связи ортогональной проекции и вектора наилучшего приближения в случае, когда $\Pi = \langle e_1, e_2, \dots, e_N \rangle$, где векторы $e_1, e_2, \dots, e_N$ образуют ортонормированную систему.

8. Изложите процедуру ортогонализации.

9. Дайте определение всюду плотного множества в метрическом пространстве. Дайте определение полной системы векторов в линейном нормированном пространстве. Приведите примеры.

10. Докажите теорему о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе в евклидовом пространстве.

11. Выведите равенство Парсеваля.

12. Определите пространство $C_2([-\pi, \pi])$, указав его элементы и скалярное произведение в нем. Выпишите явно формулы для нормы и расстояния в $C_2([-\pi, \pi])$, порожденных указанным скалярным произведением. Дайте определение среднеквадратичной сходимости. Как связаны между собой равномерная, среднеквадратичная и поточечная сходимости?

13. Покажите, что тригонометрическая система

$$\{1/\sqrt{2},\ cos\,k\,t,\ sin\,k\,t;\ k = 1,2,\dots\}$$

образует ортонормированную систему в $C_2([-\pi,\pi])$.

14. Дайте определение пространства $C([-\pi,\pi])$. Выведите оценку нормы в C_2 через норму в C. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими полиномами в $C([-\pi,\pi])$. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими полиномами в $C([-\pi,\pi])$ и докажите, что тригонометрическая система полна в $C_2([-\pi,\pi])$.

15. Для интегрируемой функции f на $[-\pi,\pi]$ запишите её ряд Фурье по тригонометрической системе. Докажите, что если f – функция из C_2, то этот ряд сходится к ней в среднеквадратичном.

16. Выведите формулы для коэффициентов Фурье четной и нечетной функции. Изложите, с обоснованием, способ разложения интегрируемой функции f на $[0,\pi]$ в тригонометрический ряд по одним синусам или по одним косинусам. Установите среднеквадратичную сходимость (на $[0,\pi]$) этих рядов к f.

17. Разложите в ряд Фурье функцию $\mathrm{sign}x$. Записав равенство Парсеваля для этой функции, выведите равенство

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

18. Для функции f, имеющей непрерывную производную на отрезке $[-\pi,\pi]$ и принимающей равные значения на концах этого отрезка, выведите формулы, связывающие коэффициенты Фурье функции f и ее производной f'.

19. Покажите, что если функция f имеет непрерывную производную на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно. Сформулируйте утверждение о сумме ряда Фурье кусочно непрерывно-дифференцируемой функции.

20. Запишите ряд Фурье в комплексной форме. Расскажите о рядах Фурье на отрезке $[-l,l]$.

21. Дайте определение интеграла, зависящего от параметра. Докажите теорему о его непрерывности.

22. Докажите теоремы о дифференцировании и интегрировании интеграла,

зависящего от параметра.

23. Дайте определение двойного интеграла

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

от функции по плоской (ограниченной) области. Укажите его основные свойства и поясните его геометрический смысл. Чему равен $\int\int_D f(x,y)dxdy$?

24. Выведите формулу, сводящую вычисление двойного интеграла к повторному.

25. Определите якобиан отображения $\phi: D \to \mathbb{R}^2$ плоской области D и поясните его геометрический смысл. Запишите с обоснованием формулу замены переменной в двойном интеграле.

26. Вычислите якобиан перехода к полярным координатам и вычислите

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} x^2y^2dxdy\,.$$

27. Выведите формулы для вычисления массы и координат центра тяжести плоской пластины с заданным законом изменения плотности.

28. Дайте определение интеграла от функции f по плоской кривой l,

$$\int_l fdl.$$

Поясните его физический смысл (масса кривой). Чему равен $\int_l 1dl$?

29. Дайте определение интеграла плоского векторного поля $\overline{F}$ по плоской кривой l,

$$\int_l(\overline{F},\overline{dl}).$$

Поясните его физический смысл (работа поля вдоль кривой).

30. Запишите и поясните формулы для вычисления векторного и скалярного дифференциалов длины $\overline{dl}$ и $dl = |\overline{dl}|$ в случае, когда l – гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, заданная параметрически, и выведите формулы для вычисления интегралов $\int_l fdl$ и $\int_l(\overline{F},\overline{dl})$.

31. Выведите формулу Грина.

32. Дайте определение плоского потенциального поля и его потенциала. Докажите теорему об эквивалентности следующих четырех условий (для односвязной области): а) поле $\overline{F} = (P, Q)$ – потенциально; б) $P'_y = Q'_x$; в) работа поля $\overline{F}$ по любому (плоскому) замкнутому контуру равна нулю; г) работа поля $\overline{F}$ зависит лишь от начальной и конечной точки пути.

33. Покажите, что работа плоского потенциального поля вдоль (плоской) кривой равна разности потенциалов в конечной и начальной точках кривой. Укажите метод восстановления потенциала.

34. Дайте определение тройного интеграла

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

от функции f по (ограниченной) области $D \subset \mathbb{R}^3$. Чему равен $\int\int\int_D 1dxdydz$?

35. Изложите метод вычисления тройных интегралов путем сведения к повторному. Вычислите

$$\int\int\int_D zdxdydz,$$

где D – область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 = z$ и плоскостью $z = 1$.

36. Определите якобиан отображения $\phi: D \to \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^3$ и поясните его геометрический смысл. Запишите с обоснованием формулу замены переменной в тройном интеграле.

37. Вычислите якобиан перехода к сферическим координатам и найдите

$$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le 1} z^2dxdydz.$$

38. Вычислите якобиан перехода к цилиндрическим координатам и найдите

$$\int\int\int_{x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1} z^2dxdydz.$$

39. Выведите формулы для вычисления массы и координат центра тяжести тела в $\mathbb{R}^3$ с заданным законом изменения плотности.

40. Дайте определение интеграла от функции f по кривой l в $\mathbb{R}^3$. Поясните его

физический смысл. Чему равен $\int_l 1dl$?

41. Дайте определение интеграла векторного поля $\overline{F}$ в $\mathbb{R}^3$ по кривой $l \subset \mathbb{R}^3$. Поясните его физический смысл.

42. Запишите и поясните формулы для вычисления векторного и скалярного дифференциалов длины $\overline{dl}$ и $dl = |\overline{dl}|$ в случае, когда l – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически, и выведите формулы для вычисления интегралов $\int_l f dl$ и $\int_l (\overline{F}, \overline{dl})$.

43. Дайте определение интеграла от функции f по поверхности S в $\mathbb{R}^3$:

$$\int\int_S f dS.$$

Поясните его физический смысл (масса поверхности). Чему равен $\int\int_S 1dS$?

44. Дайте определение потока векторного поля $\overline{F}$ через поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int\int_S (\overline{F}, \overline{dS}).$$

Поясните его физический смысл (на примере поля скорости течения жидкости).

45. Запишите и поясните формулы для вычисления векторного и скалярного дифференциалов площади $\overline{dS}$ и $dS = |\overline{dS}|$ в случае, когда S – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически, и выведите формулы для вычисления интегралов $\int\int_S f dS$ и $\int\int_S (\overline{F}, \overline{dS})$.

45. Дайте определение дивергенции поля в $\mathbb{R}^3$. Запишите с обоснованием формулу Остроградского–Гаусса.

46. Докажите эквивалентность следующих условий: а) $\text{div}\overline{F} = 0$; б) поток поля $\overline{F}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю.

47. Дайте определение ротора поля в $\mathbb{R}^3$. Запишите с обоснованием формулу Стокса.

48. Дайте определение потенциального поля в $\mathbb{R}^3$ и его потенциала. Докажите эквивалентность следующих условий (для односвязной области): а) поле $\overline{F}$ – потенциально; б) $\text{rot}\overline{F} = 0$; в) работа поля $\overline{F}$ по любому замкнутому контуру

равна нулю; г) работа поля $\overline{F}$ зависит лишь от начальной и конечной точки пути.

49. Покажите, что (как и в плоском случае) работа потенциального поля по кривой в $\mathbb{R}^3$ равна разности потенциалов в конечной и начальной точках кривой. Укажите метод восстановления потенциала в трехмерном случае. Потенциально ли поле $\overline{F} = (x, y, z)$? Если да – найдите потенциал.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

[1] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (*в 3 -х томах*), 8-е изд., М.: Физматлит, 2006. [Доступна электронная версия]

[2] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу* (*учебное пособие для вузов*), М.: АСТ: Астрель, 2007. [Доступна электронная версия]

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

[3] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. *Избранные задачи по вещественному анализу*: *учеб. пособие для вузов*, М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1992. [Доступна электронная версия]

[4] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика*? М.: МЦНМО, 2001. [Доступна электронная версия]

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы) не предусмотрены.

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины не предусмотрено.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.2. *для лиц с нарушениями слуха*: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата*: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения

Дополнительные сведения отсутствуют.