Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига» 2022
Методические рекомендации по направлению
«Прикладная математика и информатика»

1. Формат олимпиады

Общее положение

В 2022 году олимпиада «Высшая лига» пройдёт в два этапа. Первый этап (отборочный) представляет собой тест. По итогам первого отборочного этапа будет сформирован список участников второго заключительного этапа. На втором этапе вам будет предложен список задач, решение которых подразумевает предоставление связного математического текста. Подробнее о критериях оценивания задач 2-го этапа написано ниже.

Разделение на треки

В 2022 году общее направление «Прикладная математика и информатика» было разделено на три трека:

- «Анализ данных и искусственный интеллект»
- «Современные компьютерные науки»
- «Финансовые технологии»

Выбранный трек определяет тематику двух задач (из десяти), предлагаемых для решения на втором этапе олимпиады. Например, две задачи трека «Финансовые технологии» могут содержать элементы эконометрики, а две задачи трека «Анализ данных и искусственный интеллект» - элементы машинного обучении. Тем не менее, математический аппарат, необходимый для решения задач всех треков, полностью определяется перечнем тем из главы 3 и литературой из главы 4.

Несмотря на появление отдельных треков, формат и сложность задач олимпиады по направлению «Прикладная математика и информатика» в 2022 году не меняются относительно олимпиад предыдущих лет.

2. Предварительные критерии оценивания задач 2-го этапа

По каждой задаче выставляется балл от 0 до 10:

10	Задача решена абсолютно верно;
9	Задача решена абсолютно верно, но имеются незначительные ошибки, не влияющие на ход решения и ответ;
7-8	Решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным;
4-6	Либо решена половина задачи, либо недочёты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях);
2-3	Задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению;

1 Решение неверно;

0 Задача не решена;

\- Решение (т. е. любой текст, имеющий отношение к задаче, вплоть до её номера) отсутствует.

Уточнённые критерии проверки по каждой задаче публикуются одновременно с началом периода подачи апелляции.

Решение задачи должно быть связным математическим текстом, не переходящим при этом в «сочинение по русскому языку».

В решении должны присутствовать ссылки на теоретические факты с указанием названий и формулировок применяемых теорем. Если абитуриент ссылается на утверждение, не содержащееся в программе вступительных испытаний, то комиссия вправе считать это недочётом решения.

В случае, если для одной задачи даны несколько не зачёркнутых решений, проверяются все решения и выставляется минимальный бал.

Номер задания и ответ (если он требуется) должны чётко выделяться на фоне остального текста.

3. Перечень и содержание тем для подготовки

Линейная алгебра

1. Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение.
2. Определитель квадратной матрицы. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матриц.
3. Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.
4. Линейные преобразования векторных пространств и их матрицы. Изменение матрицы линейного преобразования и квадратичной формы при смене базиса.
5. Собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные и инвариантные подпространства.
6. Характеристический многочлен. Аннулирующий и минимальный многочлены. Теорема Гамильтона-Кэли.
7. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определённости квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Индексы инерции квадратичных форм.

Математический анализ

1. Числовые множества. Грани множеств. Множества в конечномерном действительном пространстве. Соответствие множеств. Счётные и несчётные множества.
2. Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы.

3. Функции одной переменной. Производные. Исследование свойств функций с помощью производных. Исследование и построение графика функций.
4. Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных. Задача на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Условия дополняющей нежёсткости.
5. Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа, её стационарные точки. Метод множителей Лагранжа.
6. Неопределённый интеграл и его вычисление. Определённый интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы и их вычисление.
7. Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена.

Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной. Понятие решения. Поле направлений. Изоклины. Интегральные кривые. Задачи Коши.
2. Уравнения в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли и Риккати.
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
4. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения по Ляпунову.
5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.
6. Системы линейных дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовый портрет. Понятие устойчивости решений динамической системы. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Дискретная математика

1. Множества и операции над ними. Алгебра множеств и её законы. Преобразования формул алгебры множеств.
2. Основные правила комбинаторики. Правило подсчёта количества комбинаторных объектов. Принцип Дирихле. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Сочетания с повторениями. Формула включений и исключений.
3. Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, транзитивность, симметричность). Отношение эквивалентности. Отношение порядка, частные, слабые и линейные порядки. Отношения предпочтения и функции полезности.

4. Алгебра логики. Функции алгебры логики. Нормальные формы: (С)ДНФ, (С)КНФ, полином Жегалкина. Исчисление высказываний, логика предикатов первого порядка.
5. Графы. Изоморфизм графов. Подграфы, цепи, циклы. Связность графов. Компоненты связности. Двудольные графы. Планарные графы. Критерии планарности. Деревья и их свойства. Основные деревья. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Расстояние на графе. Диаметр, радиус и центры графа. Эйлеровы и гамильтоновы циклы.

Теория вероятностей и математическая статистика

1. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство: дискретное и непрерывное. Случайные события и случайные величины. Функция плотности распределения. Совместное распределение нескольких случайных величин. Условные распределения.
2. Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания и дисперсии. Условное математическое ожидание. Распределение дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, распределение Пуассона).
3. Нормальное и связанные с ним распределения. Их основные свойства.
4. Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещённость, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.
5. Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. Уровень доверия и проверка значимости. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.

4. Список литературы

[1] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. Учебник для вузов 4-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1999.
[2] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965
[3] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
[4] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Лань, 2010.

Математический анализ

[5] Бесов О. В. Курс лекций по математическому анализу. Учебное пособие, Часть 1, 2. М.: МФТИ, 2004.
[6] Демидович Б. П. (редактор) Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Издание 6-е, стереотипное. М.: Наука, 1968.
[7] Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Учебное пособие для вузов в 2-х т. М.: ВШ, 1970.
[8] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Учебник для вузов 7-е изд. М.: Физматлит, 2005.

[9] Фихтенгольц Г. М. Основы дифференциального и интегрального исчисления. т.1-3, 8-е изд. М.: Физматлит, 2003.

Дифференциальные уравнения

[10] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издание 4-е. М.: Наука, 1974.
[11] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-Пресс, 1998.

Дискретная математика

[12] Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. 2-е издание. М.: Физматлит, 2014.
[13] Берж К. Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962.
[14] Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
[15] Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.
[16] Макаров И. А., Токмакова Л. Р. УМК Дискретная математика. Издательский дом НИУ ВШЭ, 2014.

Теория алгоритмов

[17] Алексеев В., Таланов В. Графы и алгоритмы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009
[18] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦН-МО, 2000.
[19] Шень А. Программирование: теоремы и задачи. М.: МЦМНО, 2000.

Теория вероятностей и математическая статистика

[20] Боровков А. А. Теория вероятностей. Учебное пособие для вузов. 2-е издание. М.: Наука, 1986.
[21] Боровков А. А. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007.
[22] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 8-е издание. М.: ЕДИТОРИАЛ УРСС, 2005.
[23] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику. М.: Издательство ЛКИ, 2010.
[24] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
[25] Шведов А. С. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е издание. М.: ГУ ВШЭ, 2005.

Демонстрационный вариант: решение задач и критерии начисления баллов по направлению «Прикладная математика и информатика»

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, the maximum sum equals to 100 points.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ / GENERAL SECTION

1. Найти предел последовательности:

1. Find the limit:

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2n^2}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{x}{1+x^2n^2}=\frac{1}{x}\frac{1}{n^2+1/x^2}<\frac{1}{x}\frac{1}{n^2}.$$

Учитывая сходимость ряда от $1/n^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2n^2}\le\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\to 0.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2n^2}=0.$$

Критерии:
0-3 Неверное решение.
4-6 Получен верный ответ, но без должного обоснования. Например, отсутствует исследование равномерной сходимости ряда.
7-9 Верное решение с незначительными неточностями в формулировках и обосновании.
10 Верное решение.

2. Сколько существует натуральных чисел n таких, чтоa_n нацело делиться на 5?

2. Find all natural numbers n such that a_n is exactly divisible by 5?

$$a_n=3^{2n+1}-3^{n+1}+4.$$

Решение. Будем писать $a\equiv b(mod\,5)$, если $a-b$ делится нацело 5. Так как $3^4\equiv 1(mod\,5)$ то проще всего рассматривать числа n вида $4k+j$, так как $3^{4k}\equiv 1(mod\,5)$

(a) Пусть $n=4k$. Тогда

$$a_n=3^{8k+1}-3^{4k+1}+4\equiv 3-3+4(mod\,5)\equiv 4(mod\,5)$$

(b) Пусть $n=4k+1$. Тогда

$$a_n=3^{8k+3}-3^{4k+2}+4\equiv 27-9+4(mod\,5)\equiv 2(mod\,5)$$

(c) Пусть $n=4k+2$. Тогда

$$a_n=3^{8k+5}-3^{4k+3}+4\equiv 3-27+4(mod\,5)\equiv 0(mod\,5)$$

(d) Пусть $n=4k+3$. Тогда

$$a_n=3^{8k+7}-3^{4k+4}+4\equiv 27-1+4(mod\,5)\equiv 0(mod\,5)$$

Таким образом, получаем, что a_n делится на 5 только если $n=4k+2$ или $n=4k+3$, где k - натуральное.
Критерии:
1-3 Попытки решения.
4-5 Правильный ответ, но совершенно необоснованный.
6-7 Половина правильного ответа, при наличии почти правильного решения.
8-9 Правильный, почти полностью (за исключением несущественных пробелов) обоснованный ответ.
10 Правильный, полностью обоснованный ответ.

3. Случайная величина x распределена нормально с параметрами $(0,\sigma)$, где σ- среднеквадратическое отклонение. Найдите дисперсию случайной величины $y=x^4$.

3. A random variable x is normally distributed with mean 0 and standard deviation σ. Find variance of a random variable $y=x^4$.

Решение. Для решения задачи необходимо вычислить

$I_4(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{\frac{-\lambda x^2}{2}} dx$

$I_8(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^8 e^{\frac{-\lambda x^2}{2}} dx$

заметим, что $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$ (это одна их форм интеграла Гаусса, также называемого интегралом Эйлера -Пуассона). Любой интеграл вида

$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{\frac{-\lambda x^2}{2}} dx$может быть получен формальным дифференцирование по λ под знаком интеграла

$I_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{3/2}}$

$I_4(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{3\sqrt{2\pi}}{\lambda^{5/2}}$

$I_6(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{3\cdot 5\sqrt{2\pi}}{\lambda^{7/2}}$

$I_8(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^8 e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} dx = \frac{3\cdot 5\cdot 7\sqrt{2\pi}}{\lambda^{9/2}}$

Откуда следует

$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} I_4\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{3\sqrt{2\pi}}{(\sigma^{-2})^{5/2}} = 3\sigma^4$

$E\left(y^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^8 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\lambda x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} I_8\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{3\cdot 5\cdot 7\sqrt{2\pi}}{(\sigma^{-2})^{9/2}} = 105\sigma^8$

$Var[y] = E\left(y^2\right) - (E[y])^2 = 96\sigma^8$

Критерии:

0-4 Предприняты попытки найти решение, не приведшие к успеху, или допущены ошибки в формулах, повлиявшие на ход решения (например, неверно записана формула для мат. ожидания функции).

5- 6 Правильный ответ без необходимых пояснений.

7-9 Верные рассуждения, допущены ошибки в переходах, ответ неверный.

10 Верные рассуждения и правильный ответ.

4. Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, . . . , 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 14?

4. How many ways exist to fill the table 3×3 with numbers 0, 1, . . . , 9 (repetions are possible) with a sum over each column and each row equal to 14.

Решение.

Рассмотрим произвольную матрицу, удовлетворяющую условиям задачи.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Перечислим значения элемента b при фиксированном элементе a.

a	Возможные значения b	Число способов выбора b
0	5, 6, 7, 8, 9	5
1	4, 5, 6, 7, 8, 9	6
2	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	7
3	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	8
4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	9
5	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	10
6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	9
7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	7
9	0, 1, 2, 3, 4, 5	6

Аналогичную таблицы получим для элмента d в силу симметрии и независимости ограничений для первой строки и столбца.

При заданных b и d, имеем $a \in [\max(0, 5 - \min(b, d)), \min(9, 14 - \max(b, d))]$.

Составим матрицу подсчета числа способов выбора значений a при фиксированных b и d.

b/d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
0	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	40
1	5	6	6	6	6	6	5	4	3	2	49
2	5	6	7	7	7	7	6	5	4	3	57
3	5	6	7	8	8	8	7	6	5	4	64
4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	70
5	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	75
6	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	69
7	3	4	5	6	7	8	8	8	7	6	62
8	2	3	4	5	6	7	7	7	7	6	54
9	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6	45
											585

Подсчитаем число способов, которыми можно выбрать элемент e. Для этого найдем область допустимых значений e при выбранных a, b, d, выразив f, y и z через a, b, d, e: $f = 14-d-e$, $y = 14-b-e$ и $z = a+b+d+e-14$.

В силу $f, y, z \in \{0, 1, \dots 9\}$ получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 0 \leq 14 - d - e \leq 9 \\ 0 \leq 14 - b - e \leq 9 \\ 0 \leq a + b + d + e - 14 \leq 9 \end{cases}$$

или

$$\max(0, 5-d, 5-b, 14-(b+a+d)) \leq e \leq \min(9, 14-d, 14-b, 23-(b+a+d)).$$

Допустимые значения a находятся как номера строк, в которых присутствуют конкретные b и d. Например, для $b = 8$ и $d = 0$, $a \in \{5, 6\}$. Для каждой пары b и d составим таблицу числа способов выбора e (при всех допустимых a).

b/d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
0	15	19	22	24	25	25	16	9	4	1	
1	19	26	30	33	35	35	25	16	9	4	
2	22	30	39	43	45	45	35	25	16	9	
3	24	33	43	53	55	55	45	35	25	16	
4	25	35	45	55	65	65	55	45	35	25	
5	25	35	45	55	65	75	65	55	45	35	
6	16	25	35	45	55	65	63	53	43	33	
7	9	16	25	35	45	55	53	49	39	30	
8	4	9	16	25	35	45	43	39	34	26	
9	1	4	9	16	25	35	33	30	26	21	
											3300

Элементы f, y и z задаются единственным образом, исходя из равенств соответствющих сумм по строкам и столбцам 14, поэтому сумма числа всех способов выбора e дает искомый ответ.

Примечание: из дополнительных соображений, сокращающих перебор, можно использовать симметрию матрицы числа способов выбора e относительно главной диагонали, и факт равенства числа способов выбора e для конкретной пары b, d квадрату числа способов выбора a (при отстутствии дополнительных ограничений для e).

Ответ: 3300.

Критерии:

0–3 Попытки найти ответ, не приведшие к успеху.

4–5 Вычисления проведены с ошибкой, повлиявшей на ответ, или приведено рассуждение, дающее ошибочное решение.

6–7 Верное решение без достаточных пояснений (например, используется тот факт, что число e определяется значениями d и b, но это утверждение не обосновано).

8–9 Допущены арифметические ошибки, не влияющие на ответ или корректность решения.

10 Правильное решение (любым методом) и верный ответ.

5. Построив таблицы истинности соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы A и B:

5. Using truth tables for the respective functions, check the formulae A and B for equivalency:

$$A = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \to (y \to z))\,,\ B = \overline{y \to (x \vee z)};$$

Решение. Составим таблицу истинности формул $A = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \to (y \to z))$ и $B = \overline{y \to (x \vee z)}$, а также входящих в них операндов.

x	$\overline{x}$	y	$\overline{y}$	z	$x \vee \overline{y}$	$y \to z$	$\overline{x} \to (y \to z)$	A	$x \vee z$	$y \to (x \vee z)$	B
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0

Т.к. столбцы A и B одинаковы, то формулы эквивалентны.

Критерии:

0-2 Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования.

3-5 Приведено решение или частичное решение, но оно не верно или не достаточно объяснено или допущены существенные ошибки (например, в определении и свойствах свойстав логических операций) или по ходу решения даны верные ответы без объяснения. Неверно составлены таблицы истинности.

6-8 Правильное решение (любым методом), но допущены неточности в обосновании решения или опущены некоторые существенные переходы или абитуриент допустил незначительные ошибки и/или описки, которые не повлияли на общий ход решения.

9-10 Приведено корректное решение, доказательство, все шаги обоснованы, правильное решение (любым методом) и правильный ответ при допущенных описках или неточностях.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL SECTION

6. Пусть матрица A размера 3×3 такова, что для любого вектора столбца $v \in R^3$ вектора Av и v ортогональны. Доказать, что $A^T + A = 0$, где A^T - транспонированная матрица.

6. Given a matrix A 3×3 such that for an arbitrary column vector $v \in R^3$ vectors Av and v are orthogonal, prove that $A^T + A = 0$, where A^T is the transposed matrix for A.

Решение. Для $k = 1, 2, 3$ рассмотрим вектора $v_k = (v_{1,k}, v_{2,k}, v_{3,k})$ такие что $v_{i,k} = \delta_{i,k}$, где $\delta_{i,k}$ - дельта-символ Кронекера. Тогда по условию $(Av_k, v_k) = 0$, что влечёт $a_{k,k} = 0$. Далее, для $1 \leq k, m \leq 3$ опрелим вектора $v_{k,m} = (v_{1,k,m}, v_{2,k,m}, v_{3,k,m})$ такие что $v_{i,k,m} = \delta_{i,k} + \delta_{i,m}$. Тогда из $(Av_{k,m}, v_{k,m}) = 0$ следует

$$a_{k,k} + a_{m,k} + a_{k,m} + a_{m,m} = 0.$$

Следовательно, мы доказали $a_{k,k} = 0$ и $a_{m,k} = -a_{k,m}$, а значит $A^t + A = 0$.

Критерии:

1-4 Попытки решения. 5-7 Если доказано одно из свойств $a_{k,k} = 0$, $a_{m,k} = -a_{k,m}$. 8-10 Правильное обоснованное решение; в зависимости от полноты обоснования.

7. Слуга получил от императора задание надеть по одному кольцу на каждого из M карпов, обитающих в дворцовом пруду (считается, что до того как слуга приступил к работе ни на одном из карпе кольца не было, и кольца надеваются так надежно, что кольцо не может соскользнуть). Надев на карпа кольцо, слуга должен отпустить его обратно в пруд. Из-за слабого зрения он не может определить есть ли уже на карпе кольцо, пока не вытащит его на сушу. Найдите аналитическое выражение для математического ожидания числа карпов, которые слуга выловит до того, как впервые выловит первого карпа, на котором уже есть кольцо, если считается, что вероятность вылова для каждого из карпов одинакова и карп с кольцом не учитывается.

7. Emperor's servant is given the task of ringing each of M carps of a palace's pond. We assume that no carp had a ring before the servant starts working, and the rings cannot slip. The servant should release a carp into the pond after it recieves its ring. Due to his weak eyesight, the servant is unable to determine whether a carp has a ring before he fishes it out. Find (analytically) mathematical expectation for the number of carps the servant will fish out before he firstly fishes out a carp with a ring, provided the propabilities to fish out a carp are equal, and the ringed carps are discarded.

Решение. Найдем вероятность того, что первый уже окольцованный карп выловлен после iой попытки$M \geq i \geq 2$. Это возможно лишь в случае, если в ходе $i-1$ предыдущей попытки вылавливались только карпы без колец. Вероятность этого события равна $p_0 = \prod_{k=1}^{i-1} \left(\frac{M-k}{M}\right)$. Вероятность, того, что в ходе iой попытки будет выловлен уже окольцованный карп $p_1 = \frac{i}{M}$.Следовательно, искомая вероятность равна $p = \frac{i}{M} \prod_{k=1}^{i-1} \left(\frac{M-k}{M}\right)$, а математическое ожидание интересующей нас величины равно $E\left[i\right] = \sum_{i=2}^{M} (i-1) \frac{i}{M} \prod_{k=1}^{i-1} \left(\frac{M-k}{M}\right) = \sum_{i=2}^{M} \frac{i \cdot (i-1)}{M^i} \prod_{k=1}^{i-1} (M-k)$ где $i = 2 \ldots M$

Критерии:

0-4 Предприняты попытки найти решение, не приведшие к успеху или допущены ошибки в формулах, повлиявшие на ход решения (например, неверно записана формула для мат. ожидания функции).

5-6 Правильный ответ без необходимых пояснений.

7-9 Верные рассуждения, допущены ошибки в переходах, ответ неверный.
10 Верные рассуждения и правильный ответ.

8. Граф "волейбольная сетка" состоит из m рядов по n вершин в каждом. Соединены только соседние вершины в ряду или столбце. При каких m и n этот граф будет (а) двудольным; (б) содержать гамильтонов цикл?

8. A graph "a volleyball net"comprises m rows of n elements each. The vertices are linked if and only if they are neighbours either in row or in column. For which m and n this graph (a) is bipartite; (b) contains Hamiltonian cycle?

Решение.

а) Граф двудольный при всех m и n, не равных одновременно 0. Сопоставим каждой вершине пару ее координат по горизонтали (от 0 до n) и вертикали (от 0 до m). Тогда соединены будут вершины,у которых одна из координат совпадает, а другая отличается на 1. Т.е. при переходе по ребру четность суммы координат меняется. Поэтому две доли – вершины с четной суммой координат и вершины с нечетной суммой. Случай $m = n = 0$ рассматривается отдельно, т.к. при этом нет второй доли.

б) Если m или n равно 0, то гамильтонова цикла нет, поскольку сам граф ациклический (если $m = n = 0$, ответ зависит от используемых абитуриентом определений). Далее считаем m и n положительными.

Если m или n равно 1, то гамильтонов цикл существует (это внешняя граница сетки). Далее считаем, что $m, n > 1$.

Если n нечетно, то гамильтонов цикл существует. Предъявим его: $(0, 0) — (0, m) — (1, m) — (1, 1) — (2, 1) — (2, m) —. (3, m) — (3, 1) — (4, 1) — (4, m) — \ldots — (n − 1, m) — (n, m) — (n, 0) — (0, 0)$.

Аналогично, гамильтонов цикл существует, если m нечетно.

Если же оба числа четны, то в графе нечетное число вершин — $(m + 1)(n + 1)$. Т.е. гамильтонов цикл будет циклом нечетной длины. Но граф двудольный и по теореме Кенига, циклов нечетной длины в нем нет.

Итак, ответ пункта б): $m, n > 0$, хотя бы одно из m и n нечетно.

Критерии:

0-4 Предприняты попытки найти решение, не приведшие к успеху.
5-6 Правильный ответ без необходимых пояснений.
7-9 Один из пунктов задания выполнен верно. Для второго пункта задания приведены верные рассуждения, но допущены ошибки, ответ неверный.
10 Верные рассуждения и правильный ответ.

9. (a) Дан числовой массив длины n. Предложите алгоритм, находящий максимальное значение сумм отрезков этого массива. Оцените число операций (обращения к элементам массива, сравнения, арифметических операций и др.) и объём дополнительной памяти, требуемой для работы алгоритма. (b) Оптимизируйте алгоритм таким образом, чтобы он работал за $O(n)$ операций и требовал $O(1)$ дополнительной памяти.

9. For a given array of length n, propose algortihm that finds the maximum value of the sums of its intervals. (a) What are the estimated number of operations (use of array elements, arithmetical operations, comparisons and so on) and estimated required memory? (b) Improve the algorithm in such a manner that the estimated number of operations is about $O(n)$ and estimated memory about$O(1)$.

Решение. Обозначим рассматриваемый массив через `a`.

Будем по очереди рассматривать индексы `i` от `1` до `n`. На `i`-м шаге мы находим

- индекс `current_max_start`, для которого отрезок $a[$`current_max_start`$], \ldots, a[i]$ имеет максимальную сумму среди всех отрезков, заканчивающихся на `i`-й позиции
- соответствующую сумму `current_max_sum`
- индексы начала и конца `max_start` и `max_end`, а также сумму элементов `max_sum` отрезка с самой большой суммой среди всех отрезков, расположенных не правее `i`-го элемента.

Поясним, как это делается. Переменные инициализируются как `current_max_start = 0`, `current_max_sum = a[0]`. Допустим теперь мы знаем `current_max_start` и `current_max_sum` для `i`-го шага; опишем, как они обновляются на `(i + 1)`-м. Нетрудно видеть, что среди отрезков с концом в `(i + 1)`-м элементе, пересекающихся с отрезком, найденным нами на предыдущем шаге, максимальную сумму имеет отрезок $a[$`current_max_start`$], \ldots, a[i+1]$, то есть просто полученный добавлением $a[i + 1]$ к отрезку с предыдущего шага. Следовательно, мы можем сделать следующее:

- Если $a[$`current_max_start`$] + \ldots + a[i] + a[i + 1] \geqslant a[$`current_max_start`$] + \ldots + a[i]$, то мы не меняем `current_max_sum`, `current_max_start`, `max_sum` и `max_start`, а `max_end` полагаем равным `(i+1)`, если он был равен `i`, и оставляем прежним в противном случае;
- Если $a[$`current_max_start`$]+\ldots+a[i]+a[i+1] < a[$`current_max_start`$]+\ldots+a[i]$, то полагаем `current_max_sum = a[i+1]`, `current_max_start = (i+1)`, а `max_sum`, `max_start` и `max_end` не меняем, если `max_sum > a[i+1]` и обновляем в соответствии с параметрами нового отрезка в противном случае.

Алгоритм требует лишь одного прохода по массиву, и работает за $O(n)$ операций. Также легко видеть, что используется $O(1)$ памяти.

Критерии:

- описан неверный алгоритм — **0** баллов за всю задачу вне зависимости от остального;
- придуман верный алгоритм, не удовлетворяющий ограничениям по числу операций или объёму дополнительной памяти — **1** балл;
- придуман верный алгоритм, удовлетворяющий ограничениям по числу операций, но не по объёму дополнительной памяти — **3** балла;
- придуман верный алгоритм, удовлетворяющий ограничениям по объёму дополнительной памяти, но не по числу операций — **3** балла;
- придуман верный алгоритм, удовлетворяющий ограничениям как по числу операций, так и по объёму дополнительной памяти — **6** баллов;
- оценка числа операций — **1** балла;
- то же с оценкой асимптотики с помощью o-символики — **2** балла;
- оценка объёма дополнительной памяти — **1** балл;
- то же с оценкой асимптотики с помощью o-символики — **2** балла;

10. Даны две выборки $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ ($n > 10000$) из нормальных распределений с неизвестными математическими ожиданиями m_x и m_y и соответственно. Пусть также оба распределения имеют известную и одинаковую дисперсию. Известно, что гипотеза “$m_x = m_y$” была отвергнута против одной из альтернатив “$m_x > m_y$” или “$m_x < m_y$” на уровне значимости 5%. Верно ли, что гипотеза “$m_x = m_y$” против альтернативы “$m_x \neq m_y$” будет отвергнута на уровне значимости 5%? Ответ объясните.

10. $x_1, \dots, x_n$ and $y_1, \dots, y_n$ ($n > 10000$) are samples generated by two normally distributed random variables with unknown mathematical expectations, m_x and m_y, and known variances, which are equal. Given the hypothesis $m_x = m_y$ has been rejected against "$m_x > m_y$"or "$m_x < m_y$" with 5 percent significance level, whether the hypothesis "$m_x = m_y$"against "$m_x \neq m_y$"can be rejected with the same significance level. Explain your answer.

Решение. Для проверки такого рода гипотез можно использовать z-критерий Фишера. Обозначим через σ^2 дисперсию рассматриваемых случайных величин. Построим z-статистику

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{2\frac{\sigma^2}{n}}}$$

Известно, что z имеет в этом случае стандартное нормальное распределение.

Обозначим через q_α квантиль уровня α стандартного нормального распределения (иными словами такое число, для которого, $P\{z \leqslant q_\alpha\} = \alpha$).

Гипотеза “$m_x = m_y$” отвергается против альтернативы “$m_x > m_y$” на уровне значимости α, если $z > q_{1-\alpha}$. Гипотеза “$m_x = m_y$” отвергается против альтернативы “$m_x < m_y$” значимости α, если $z < q_\alpha$. Наконец, гипотеза “$m_x = m_y$” отвергается против альтернативы “$m_x \neq m_y$” на уровне значимости α, если $z < q_{\frac{\alpha}{2}}$ или $z > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Как нетрудно убедиться, из одного из первых двух условий не следует третье.

Критерии:

- дан неверный ответ на вопрос задачи — **0** баллов за всю задачу вне зависимости от остального;
- просто верный ответ без объяснений — **0** баллов;
- дан верный ответ, но в обосновании существенная ошибка, обнаруживающая непонимание того, как работать с аппаратом проверки гипотез в целом — **2** балла;
- дан верный ответ и обоснование, в целом, верно, но в решении не указано явно, какой критерий или какая статистика используется для проверки гипотезы или же упоминается неправильный критерий или статистика — **7** баллов;
- дан верный ответ и приведены верные обоснования с упоминанием подходящего в рассматриваемой ситуации критерия или статистики — **1** балл.