

# **Лекция 1-5.11.21, 2 модуль часть 2, для самостоятельного изучения**

## **Прогнозирование по регрессионной модели и его точность**

Демидова О.А.  
E-mail: [demidova@hse.ru](mailto:demidova@hse.ru)

# Прогнозирование по модели множественной регрессии

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$x'_{n+1} = (1 \ X_{1n+1} \ \dots \ X_{kn+1})$  - для этого наблюдения хотим сделать предсказание

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1n+1} + \dots + \hat{\beta}_k X_{kn+1}$$

$$Y_{n+1} = x'_{n+1} \beta + \varepsilon_{n+1},$$

$$\varepsilon_{n+1} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n), \quad \text{cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

## Ошибка индивидуального прогноза

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = x'_{n+1}\beta + \varepsilon_{n+1} - x'_{n+1}\hat{\beta} = \\ &= \varepsilon_{n+1} - x'_{n+1}(\hat{\beta} - \beta) = \varepsilon_{n+1} - x'_{n+1}(X'X)^{-1}X'\varepsilon, \text{ т. к.} \\ \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\ \text{var}(e_{n+1}) &= \text{var}(\varepsilon_{n+1}) + x'_{n+1}(X'X)^{-1}X'\text{var}(\varepsilon)X(X'X)^{-1}x_{n+1} = \\ &= \sigma_\varepsilon^2(1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}) \end{aligned}$$

Напоминание:  $\text{Var}[AY] = A \text{Var}[Y] A'$ ,

где  $A$  – постоянная матрица,  $Y$  – случайный вектор.

## Доверительный интервал для индивидуального прогноза

$$1 - \alpha = P\{x'_{n+1}\hat{\beta} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n - k - 1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}} < Y_{n+1} < x'_{n+1}\hat{\beta} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n - k - 1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}}\}$$

## Ошибка для среднего прогноза

$$e_{n+1} = E(Y_{n+1}) - \hat{Y}_{n+1} = -x'_{n+1}(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\text{var}(e_{n+1}) &= x'_{n+1}(X'X)^{-1}X'\text{var}(\varepsilon)X(X'X)^{-1}x_{n+1} = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}\end{aligned}$$

## Доверительный интервал для среднего прогноза

$$1 - \alpha = P\{x'_{n+1}\hat{\beta} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n - k - 1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}} < E(Y_{n+1}) < x'_{n+1}\hat{\beta} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n - k - 1)\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}}\}$$



NATIONAL RESEARCH  
UNIVERSITY

# Thank you for your attention!

20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000  
Tel.: +7 (495) 628-8829, Fax: +7 (495) 628-7931  
[www.hse.ru](http://www.hse.ru)