# Смешанные топо-Крипке произведения модальных логик

Мирошниченко Лена

НИУ ВШЭ

2022

В этом докладе мы определим такой объект, как топо-Крипке произведение модальных логик и обсудим некоторые свойства такой конструкции. Всё это мы пройдём по статье P. Kremer "Topological-Frame Products of Modal Logics" [1]. Также отметим сразу деталь, что вместо "тогда и только тогда" мы будем использовать "согда" и $LIST = \{K, K4, D, D4, D5, D45, S4, S5\}$.

Сперва определим логики из $LIST$: $K$ – минимальная нормальная унимодальная логика, $D = K + \Diamond\top$, $K4 = K + (\Box p \to \Box\Box p)$, $D4 = D + (\Box p \to \Box\Box p)$, $D5 = D + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$, $D45 = D4 + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$, $T = K + (\Box p \to p)$, $S4 = T + (\Box p \to \Box\Box p)$, $S5 = S4 + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$.

**Определение**

В классическом языке первого уровня с равенством и бинарным предикатом $R$ формула называется положительной, если строится из атомов с использованием только $\vee$ и $\wedge$. Универсальное хорново предложение – формула вида $\forall x \forall y \forall z_1 \ldots \forall z_n (B \to Rxy)$, где $B$ – положительная формула. Формула $A$ называется хорновой, если существует $A_H$ – универсальное хорново предложение, такое, что для всякой 1-шкалы $\mathfrak{X}$ верно то, что $\mathfrak{X} \vDash A$ согда $\mathfrak{X} \vDash A_H$.

Сперва определим логики из *LIST*: $K$ – минимальная нормальная унимодальная логика, $D = K + \Diamond\top$, $K4 = K + (\Box p \to \Box\Box p)$, $D4 = D + (\Box p \to \Box\Box p)$, $D5 = D + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$, $D45 = D4 + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$, $T = K + (\Box p \to p)$, $S4 = T + (\Box p \to \Box\Box p)$, $S5 = S4 + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$.

**Определение**

В классическом языке первого уровня с равенством и бинарным предикатом $R$ формула называется положительной, если строится из атомов с использованием только $\vee$ и $\wedge$. Универсальное хорново предложение – формула вида $\forall x \forall y \forall z_1 \ldots \forall z_n (B \to Rxy)$, где $B$ – положительная формула. Формула $A$ называется хорновой, если существует $A_H$ – универсальное хорново предложение, такое, что для всякой 1-шкалы $\mathfrak{X}$ верно то, что $\mathfrak{X} \models A$ согда $\mathfrak{X} \models A_H$.
Итак, логика $L$ аксиоматизируема хорновыми формулами, когда в её аксиоматизации есть только хорновы формулы и формулы без переменных (в которых единственная атомарная формула – $\top$).

Сперва определим логики из $LIST$: $K$ – минимальная нормальная унимодальная логика, $D = K + \Diamond\top$, $K4 = K + (\Box p \to \Box\Box p)$, $D4 = D + (\Box p \to \Box\Box p)$, $D5 = D + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$, $D45 = D4 + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$, $T = K + (\Box p \to p)$, $S4 = T + (\Box p \to \Box\Box p)$, $S5 = S4 + (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$.

## Определение

В классическом языке первого уровня с равенством и бинарным предикатом $R$ формула называется положительной, если строится из атомов с использованием только $\vee$ и $\wedge$. Универсальное хорново предложение – формула вида $\forall x \forall y \forall z_1 \ldots \forall z_n (B \to Rxy)$, где $B$ – положительная формула. Формула $A$ называется хорновой, если существует $A_H$ – универсальное хорново предложение, такое, что для всякой 1-шкалы $\mathfrak{X}$ верно то, что $\mathfrak{X} \vDash A$ согда $\mathfrak{X} \vDash A_H$.
Итак, логика $L$ аксиоматизируема хорновыми формулами, когда в её аксиоматизации есть только хорновы формулы и формулы без переменных (в которых единственная атомарная формула – $\top$).

Полезно отметить, что все логики из $LIST$ аксиоматизируемы хорновыми формулами.

Также будем называть логику $L$ Крипке-полной, если она полна по Крипке, то есть для любой формулы $A$ имеет место эквивалентность $L \vdash A$ согда $L \vDash A$ (то есть формула выводится в данной логике согда она общезначима во всех шкалах данной логики).

Итак, для определения сначала следует взять две унимодальные логики $L_1$ и $L_2$. Тогда напомним, каким же образом их можно скомбинировать:

Итак, для определения сначала следует взять две унимодальные логики $L_1$ и $L_2$. Тогда напомним, каким же образом их можно скомбинировать:

**Определение**

Соединение (fusion) двух логик $L_1 \otimes L_2 = K_2 + L_{1(\Box \to \Box_1)} + L_{2(\Box \to \Box_2)}$

Итак, для определения сначала следует взять две унимодальные логики $L_1$ и $L_2$. Тогда напомним, каким же образом их можно скомбинировать:

**Определение**

Соединение (fusion) двух логик $L_1 \otimes L_2 = K_2 + L_{1(\Box \to \Box_1)} + L_{2(\Box \to \Box_2)}$

**Определение**

Произведение Крипке двух логик
$L_1 \times L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log\, Fr(L_1) \times Fr(L_2)$ (где $F_1$ и $F_2$ – шкалы Крипке)

Итак, для определения сначала следует взять две унимодальные логики $L_1$ и $L_2$. Тогда напомним, каким же образом их можно скомбинировать:

**Определение**

Соединение (fusion) двух логик $L_1 \otimes L_2 = K_2 + L_{1(\Box\to\Box_1)} + L_{2(\Box\to\Box_2)}$

**Определение**

Произведение Крипке двух логик $L_1 \times L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log\, Fr(L_1) \times Fr(L_2)$ (где $F_1$ и $F_2$ – шкалы Крипке)

**Определение**

Топологическое произведение двух логик $L_1 \times_t L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Top(L_2))$ (где $F_1$ и $F_2$ – топологические шкалы)

Для лучшего понимания сперва стоит определить так называемое произведение двух унимодальных топошкал – $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$, где $R_1$ и $R_2$ – либо топология, либо отношение на $W_1$ и $W_2$, соответственно:

Для лучшего понимания сперва стоит определить так называемое произведение двух унимодальных топошкал – $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$, где $R_1$ и $R_2$ – либо топология, либо отношение на $W_1$ и $W_2$, соответственно:

**Определение**

$F_1 \times F_2 = (W_1 \times W_2, R_1^*, R_2^*)$ , где

- если $R_1$ – отношение, то $(a, b)R_1^*(c, d)$ согда $aR_1c$ и $b = d$
- если $R_2$ – отношение, то $(a, b)R_2^*(c, d)$ согда $bR_2d$ и $a = c$
- если $R_1$ – топология, то $\{\{O \times \{a\}\} : O \in R_1$ и $a \in W_2\}$ – база топологии $R_1^*$
- если $R_2$ – топология, то $\{\{\{a\} \times O\} : O \in R_2$ и $a \in W_1\}$ – база топологии $R_2^*$

Для лучшего понимания сперва стоит определить так называемое произведение двух унимодальных топошкал – $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$, где $R_1$ и $R_2$ – либо топология, либо отношение на $W_1$ и $W_2$, соответственно:

**Определение**

$F_1 \times F_2 = (W_1 \times W_2, R_1^*, R_2^*)$ , где

- если $R_1$ – отношение, то $(a, b)R_1^*(c, d)$ согда $aR_1c$ и $b = d$
- если $R_2$ – отношение, то $(a, b)R_2^*(c, d)$ согда $bR_2d$ и $a = c$
- если $R_1$ – топология, то $\{\{O \times \{a\}\} : O \in R_1$ и $a \in W_2\}$ – база топологии $R_1^*$
- если $R_2$ – топология, то $\{\{\{a\} \times O\} : O \in R_2$ и $a \in W_1\}$ – база топологии $R_2^*$

Понятно, что аналогичным образом может быть определено и произведение большего количества топо-Крипке шкал

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$
(где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$ (где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Скажем, что *топологизированной шкалой* мы будем называть упорядоченную тройку из множества, топологии и отношения.

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$
(где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Скажем, что *топологизированной шкалой* мы будем называть упорядоченную тройку из множества, топологии и отношения. В первую очередь отметим некоторое количество тривиальных свойств:

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$
(где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Скажем, что *топологизированной шкалой* мы будем называть упорядоченную тройку из множества, топологии и отношения. В первую очередь отметим некоторое количество тривиальных свойств:

$$L_1 \otimes L_2 \subseteq L_1 \times_{tf} L_2$$

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$ (где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Скажем, что *топологизированной шкалой* мы будем называть упорядоченную тройку из множества, топологии и отношения. В первую очередь отметим некоторое количество тривиальных свойств:

$$L_1 \otimes L_2 \subseteq L_1 \times_{tf} L_2$$

$$L_1 \times_{tf} L_2 \subseteq L_1 \times L_2, \text{ если } L_1 \supseteq S4$$

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \vDash L_1, F_2 \vDash L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$ (где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Скажем, что *топологизированной шкалой* мы будем называть упорядоченную тройку из множества, топологии и отношения. В первую очередь отметим некоторое количество тривиальных свойств:

$$L_1 \otimes L_2 \subseteq L_1 \times_{tf} L_2$$

$$L_1 \times_{tf} L_2 \subseteq L_1 \times L_2, \text{ если } L_1 \supseteq S4$$

$$L_1 \times_{t} L_2 \subseteq L_1 \times_{tf} L_2, \text{ если } L_1, L_2 \supseteq S4$$

Предметом же нашего изучения будет следующий объект:

**Определение**

$L_1 \times_{tf} L_2 = Log\{F_1 \times F_2 | F_1 \models L_1, F_2 \models L_2\} = Log(Top(L_1) \times Fr(L_2))$ (где $F_1$ – шкала Крипке и $F_2$ – топологическая шкала)

Скажем, что *топологизированной шкалой* мы будем называть упорядоченную тройку из множества, топологии и отношения. В первую очередь отметим некоторое количество тривиальных свойств:

$$L_1 \otimes L_2 \subseteq L_1 \times_{tf} L_2$$

$$L_1 \times_{tf} L_2 \subseteq L_1 \times L_2, \text{ если } L_1 \supseteq S4$$

$$L_1 \times_t L_2 \subseteq L_1 \times_{tf} L_2, \text{ если } L_1, L_2 \supseteq S4$$

$$S4 \times_t S5 = S4 \times_{tf} S5 \text{ и } S5 \times_t S5 = S5 \times_{tf} S5 = S5 \times S5$$

Последнее на предыдущем слайде верно, поскольку топологические модели для $S5$ – несвязные суммы антидискретных пространств, очевидно являющиеся пространствами Александрова (где у каждой точки есть минимальная окрестность), для которых есть замечательное соответствие рефлексивными транзитивными шкалами Крипке.

Последнее на предыдущем слайде верно, поскольку топологические модели для $S5$ – несвязные суммы антидискретных пространств, очевидно являющиеся пространствами Александрова (где у каждой точки есть минимальная окрестность), для которых есть замечательное соответствие рефлексивными транзитивными шкалами Крипке. Также нам потребуется конструкция коммутатора и е-коммутатора для пары унимодальных логик:

Последнее на предыдущем слайде верно, поскольку топологические модели для $S5$ – несвязные суммы антидискретных пространств, очевидно являющиеся пространствами Александрова (где у каждой точки есть минимальная окрестность), для которых есть замечательное соответствие рефлексивными транзитивными шкалами Крипке. Также нам потребуется конструкция коммутатора и е-коммутатора для пары унимодальных логик:

## Определение

$[L_1, L_2] = L_1 \otimes L_2 + com_{\supset} + com_{\subset} + chr$
$[L_1, L_2]^{EX} = L_1 \otimes L_2 + com_{\supset} + chr$, где

- $com_{\supset} = \Box_1\Box_2 p \to \Box_2\Box_1 p$ (левая коммутативность)
- $com_{\subset} = \Box_2\Box_1 p \to \Box_1\Box_2 p$ (правая коммутативность)
- $chr = \Diamond_1\Box_2 p \to \Box_2\Diamond_1 p$ (условие Чёрча-Россера)

Теперь подойдём к основной теореме, которая будет рассматриваться:

**Теорема**

*$S4 \times_{tf} L = [S4, L]^{EX}$, если $L$ – Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение логики $D$*

Теперь подойдём к основной теореме, которая будет рассматриваться:

**Теорема**

*$S4 \times_{tf} L = [S4, L]^{EX}$, если $L$ – Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение логики $D$*

1. довольно легко проверяется, что $[L_1, L_2]^{EX} \subseteq L_1 \times_{tf} L_2$, из чего $[S4, L]^{EX} \subseteq S4 \times_{tf} L$, то есть нам достаточно проверить вложение в другую сторону.

Теперь подойдём к основной теореме, которая будет рассматриваться:

**Теорема**

*$S4 \times_{tf} L = [S4, L]^{EX}$, если $L$ – Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение логики $D$*

1. довольно легко проверяется, что $[L_1, L_2]^{EX} \subseteq L_1 \times_{tf} L_2$, из чего $[S4, L]^{EX} \subseteq S4 \times_{tf} L$, то есть нам достаточно проверить вложение в другую сторону.
2. также можно отметить, что при $L = K4, K$ теорема не выполняется: $\Box_2\bot \to \Box_1\Box_2\bot \in (S4 \times_{tf} K)$ и $\Box_2\bot \to \Box_1\Box_2\bot \notin [S4, K]^{EX}$ (аналогично для $K4$). Это утверждение не будет вредным проверить:

**Доказательство.**

$\Box_2\bot \to \Box_1\Box_2\bot \notin [S4, K]^{EX}$*: рассмотрим шкалу* $\mathfrak{X} = (X, R_1, R_2)$*, где* $X = \{0, 1, 2\}, R_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)\}, R_2 = \{(1, 2)\}$. $R_1$ *рефлексивно и транзитивно,* $R_2$ *транзитивно, поэтому* $\mathfrak{X} \vDash S4 \otimes K4$*, также легко проверяется общезначимость* $com_{\supseteq}$ *и* $chr$*, и легко опровергается в точке 0* $\Box_2\bot \to \Box_1\Box_2\bot$.

## Доказательство.

$\Box_2\bot \to \Box_1\Box_2\bot \in (S4 \times_{tf} K)$: *для этого нужно доказать несколько более общий факт, аналогичный* ***Лемме 3.6*** *в статье Кудинова [2]:*

1. *если* $A$ *– формула без переменных и без* $\Box_1$, *то* $A \to \Box_1 A \in S4 \times_{tf} K$
2. *если* $A$ *– формула без переменных и без* $\Box_2$, *то* $A \to \Box_2 A \in S4 \times_{tf} K$

*Проверяем второй из фактов: пусть в некоторой шкале (из класса произведений соответствующих шкал) нашей логики* $S4 \times_{tf} K$ *в точке* $(a, b)$ *истинна формула* $A$. *Но тогда, поскольку в нашей формуле нет переменных и не встречается* $\Box_2$, *то истинность её не изменится при изменении второй координаты точки (ведь все горизонтали произведения изоморфны). Но все точки, которые "видны" из нашей по второму отношению имеют ту же самую первую координату и отличаются только по второй, то во всех этих точках тоже верна* $A$, *а тогда в точке истинна* $\Box_2 A$, *а тогда во всей шкале общезначима и* $A \to \Box_1 A$, *а тогда, поскольку рассматривалась любая шкала, в нашей логике лежит нужная формула.*

**Доказательство.**

Теперь проверим первый: пусть в некоторой шкале (из класса произведений соответствующих шкал) нашей логики $S4 \times_{tf} K$ в точке $(a, b)$ истинна формула $A$. Тогда истинность этой формулы не изменится при изменении первой координаты (все вертикали изоморфны), то есть она истинна во всех точках с первой координатой $a$. Но мы знаем, что у этой точки должна быть открытая окрестность, где у всех точек фиксирована вторая координата. Но в этой открытой окрестности очевидно верна формула $A$, то есть в этой точке истинна формула $\Box_1 A$, из чего уже легко получить желаемое. $\square$

**Доказательство.**

Теперь проверим первый: пусть в некоторой шкале (из класса произведений соответствующих шкал) нашей логики $S4 \times_{tf} K$ в точке $(a, b)$ истинна формула $A$. Тогда истинность этой формулы не изменится при изменении первой координаты (все вертикали изоморфны), то есть она истинна во всех точках с первой координатой $a$. Но мы знаем, что у этой точки должна быть открытая окрестность, где у всех точек фиксирована вторая координата. Но в этой открытой окрестности очевидно верна формула $A$, то есть в этой точке истинна формула $\Box_1 A$, из чего уже легко получить желаемое. $\square$

Отдельно можно отметить, что, по крайней мере на момент выпуска данной статьи не было получено аксиоматизации логики, получающейся в таком случае, было только высказано предположение, что $S4 \times_{tf} K = [S4, K]^{EX} + \Delta$ (и аналогичное для $K4$), где
$\Delta = \{A \to \Box_1 A : A$ – формула без переменных и $\Box_1\} \cup \{A \to \Box_2 A :$ $A$ – формула без переменных и $\Box_2\}$

Можно также отметить следующее (где $L \in LIST - \{S4, S5\}$)

$$\begin{array}{ccccccc}
S4 \otimes S5 & \subsetneq & S4 \times_t S5 & = & S4 \times_t S5 & \subsetneq & S4 \times S5 \\
S4 \otimes S4 & = & S4 \times_t S4 & \subsetneq & S4 \times_{tf} S4 & \subsetneq & S4 \times S4 \\
S4 \otimes L & & & \subsetneq & S4 \times_{tf} L & \subsetneq & S4 \times L
\end{array}$$

Можно также отметить следующее (где $L \in LIST - \{S4, S5\}$)

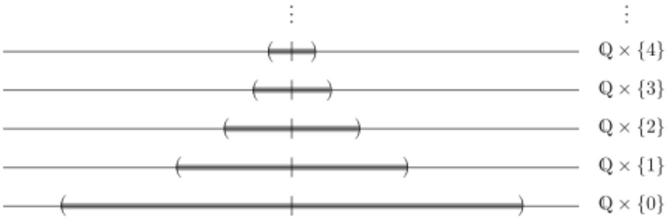
$$\begin{array}{lllllll} S4 \otimes S5 & \subsetneq & S4 \times_t S5 & = & S4 \times_t S5 & \subsetneq & S4 \times S5 \\ S4 \otimes S4 & = & S4 \times_t S4 & \subsetneq & S4 \times_{tf} S4 & \subsetneq & S4 \times S4 \\ S4 \otimes L & & & \subsetneq & S4 \times_{tf} L & \subsetneq & S4 \times L \end{array}$$

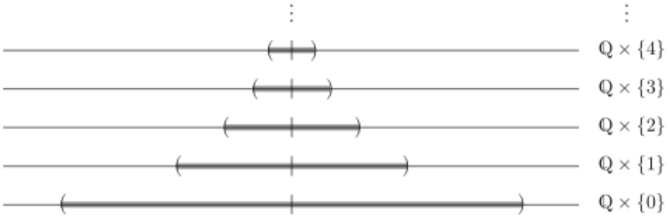
Без отрицания равенства мы всё это уже говорили, неравенство же показывается за счёт того, что $com_{\supset} \in S4 \times_{tf} K, com_{\supset} \notin S4 \otimes S5, com_{\subset} \notin S4 \times_{tf} K, com_{\subset} \in S4 \times K$, нетривиально тут только $com_{\subset} \notin S4 \times_{tf} K$, что опровергается в следующей модели (где серый – функция значения от пропозициональной переменной):

Можно также отметить следующее (где $L \in LIST - \{S4, S5\}$)

$$\begin{array}{ccccccc} S4 \otimes S5 & \subsetneq & S4 \times_t S5 & = & S4 \times_t S5 & \subsetneq & S4 \times S5 \\ S4 \otimes S4 & = & S4 \times_t S4 & \subsetneq & S4 \times_{tf} S4 & \subsetneq & S4 \times S4 \\ S4 \otimes L & & & \subsetneq & S4 \times_{tf} L & \subsetneq & S4 \times L \end{array}$$

Без отрицания равенства мы всё это уже говорили, неравенство же показывается за счёт того, что $com_{\supset} \in S4 \times_{tf} K, com_{\supset} \notin S4 \otimes S5, com_{\subset} \notin S4 \times_{tf} K, com_{\subset} \in S4 \times K$, нетривиально тут только $com_{\subset} \notin S4 \times_{tf} K$, что опровергается в следующей модели (где серый – функция значения от пропозициональной переменной):






Это – модель $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \tau'_{\mathbb{Q}}, R'_U, V)$, где $\tau_{\mathbb{Q}}$ – стандартная топология на рациональных числах, $R_U$ – универсальное отношение на натуральных числах,

$$V(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n \times \{n\}, \text{ где } O_n = \{x \in \mathbb{Q} : \frac{-1}{n+1} < x < \frac{1}{n+1}\}$$

И тогда $V(\Box_2 \Box_1 p) = \{0\} \times \mathbb{N}$, но $V(\Box_1 \Box_2 p) = \emptyset$

Теперь не лишним будет сказать и про $p$-морфизмы таких шкал.

Теперь не лишним будет сказать и про $p$-морфизмы таких шкал.

## Определение

Пусть даны две топо-Крипке шкалы $\mathfrak{X} = (X, R_1, \ldots, R_n), \mathfrak{X}' = (X', R_1', \ldots, R_n')$. Отображение $\phi : X \to X'$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ называется $i$-$p$-морфизмом, если выполнено одно из следующих условий:

Теперь не лишним будет сказать и про $p$-морфизмы таких шкал.

## Определение

Пусть даны две топо-Крипке шкалы $\mathfrak{X} = (X, R_1, \dots, R_n), \mathfrak{X}' = (X', R_1', \dots, R_n')$. Отображение $\phi : X \to X'$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ называется $i$-$p$-морфизмом, если выполнено одно из следующих условий:

- $R_i, R_i'$ – топологии Александрова или рефлексивные транзитивные отношения, а $\phi$ $i$-открыто (то есть это отображение открыто как отображение между топологическими пространствами $(X, R_i)$ и $(X', R_i')$) и $i$-непрерывно (то есть, соответствующее отображение топологических пространств непрерывно)
- $R_i, R_i'$ – бинарные отношения, а $\phi$ $i$-монотонно (то есть $\forall a, b \in X(aR_ib \to \phi(a)R_i'\phi(b)))$ и является $i$-поднимающим (то есть $\forall a \in X \forall c \in X'(\phi(a)R_i'c \to (\exists b(aR_ib) \wedge (\phi(b) = c))))$

И, конечно же, нельзя обойти стороной свойства $p$-морфизмов:

И, конечно же, нельзя обойти стороной свойства $p$-морфизмов:

1. Пусть $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ – $n$-топо-Крипке шкалы и $\mathfrak{X}_2$ – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}_1$. Тогда $\mathfrak{X}_1 \vDash A$ согда $\mathfrak{X}_2 \vDash A$, для всякой формулы $A$ без переменных.

И, конечно же, нельзя обойти стороной свойства $p$-морфизмов:

1. Пусть $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ – $n$-топо-Крипке шкалы и $\mathfrak{X}_2$ – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}_1$. Тогда $\mathfrak{X}_1 \vDash A$ согда $\mathfrak{X}_2 \vDash A$, для всякой формулы $A$ без переменных.
2. Пусть $\mathfrak{X}$ – $n$-топо-Крипке шкала и $\mathfrak{C}$ – класс $n$-топо-Крипке шкал, каждая из которых – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}$. Тогда $Log(\mathfrak{X}) \subseteq Log(\mathfrak{C})$.

И, конечно же, нельзя обойти стороной свойства $p$-морфизмов:

1. Пусть $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ – $n$-топо-Крипке шкалы и $\mathfrak{X}_2$ – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}_1$. Тогда $\mathfrak{X}_1 \models A$ согда $\mathfrak{X}_2 \models A$, для всякой формулы $A$ без переменных.
2. Пусть $\mathfrak{X}$ – $n$-топо-Крипке шкала и $\mathfrak{C}$ – класс $n$-топо-Крипке шкал, каждая из которых – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}$. Тогда $Log(\mathfrak{X}) \subseteq Log(\mathfrak{C})$.
3. Пусть $\mathfrak{X} = (X, Y_1, Y_2)$ – топологизированная шкала, $\mathfrak{X}' = (X', Y_1', Y_2')$ – шкала с корнем $r$, где $Y_1$ – рефлексивное и транзитивное отношение, $\phi : X \to X'$ – $p$-морфизм этих шкал т.ч. $r \in \phi[X]$, тогда $\phi$ – сюръекция.

И, конечно же, нельзя обойти стороной свойства $p$-морфизмов:

1. Пусть $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ – $n$-топо-Крипке шкалы и $\mathfrak{X}_2$ – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}_1$. Тогда $\mathfrak{X}_1 \models A$ согда $\mathfrak{X}_2 \models A$, для всякой формулы $A$ без переменных.
2. Пусть $\mathfrak{X}$ – $n$-топо-Крипке шкала и $\mathfrak{C}$ – класс $n$-топо-Крипке шкал, каждая из которых – $p$-морфный образ $\mathfrak{X}$. Тогда $Log(\mathfrak{X}) \subseteq Log(\mathfrak{C})$.
3. Пусть $\mathfrak{X} = (X, Y_1, Y_2)$ – топологизированная шкала, $\mathfrak{X}' = (X', Y_1', Y_2')$ – шкала с корнем $r$, где $Y_1$ – рефлексивное и транзитивное отношение, $\phi : X \to X'$ – $p$-морфизм этих шкал т.ч. $r \in \phi[X]$, тогда $\phi$ – сюръекция.
4. Всякая счётная рефлексивная и транзитивная 1-шкала с корнем – $p$-морфный образ $\mathbb{Q}$

Первые три свойства легко проверяются, последнее же является переформулировкой **Леммы 6.2** из [3] (статья Кремера “Quantified modal logic on the rational line”)

Можно описать $[L_1, L_2]^{EX}$ для достаточно хороших (при формулировке соответствующей леммы определим, в чём это заключается) $L_1, L_2$ некоторым другим интересым образом, для чего снова придётся определить некоторое количество конструкций.

Можно описать $[L_1, L_2]^{EX}$ для достаточно хороших (при формулировке соответствующей леммы определим, в чём это заключается) $L_1, L_2$ некоторым другим интересым образом, для чего снова придётся определить некоторое количество конструкций.
Для класса $n$-шкал $\mathfrak{C}$ можно определить
$SF(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{X} : \exists \mathfrak{X}' \in \mathfrak{C}, \mathfrak{X} \sqsubseteq \mathfrak{X}'\}$

Можно описать $[L_1, L_2]^{EX}$ для достаточно хороших (при формулировке соответствующей леммы определим, в чём это заключается) $L_1, L_2$ некоторым другим интересым образом, для чего снова придётся определить некоторое количество конструкций.
Для класса $n$-шкал $\mathfrak{C}$ можно определить
$SF(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{X} : \exists \mathfrak{X}' \in \mathfrak{C}, \mathfrak{X} \sqsubseteq \mathfrak{X}'\}$

**Определение**

Пусть $F$ – некоторый класс подшкал от 2-шкал. Тогда $F$-релятивизованным произведением для Крипке-полных 1-логик $L_1, L_2$ будет называться: $(L_1 \times L_2)^F = Log(F \cap SF(Fr(L_1) \times Fr(L_2)))$

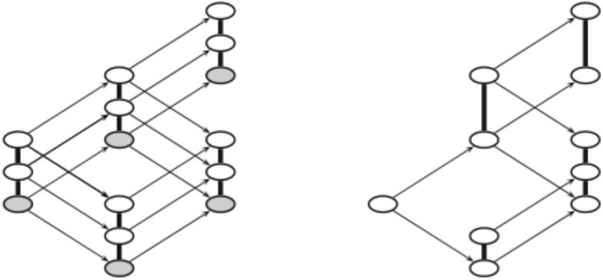
Можно описать $[L_1, L_2]^{EX}$ для достаточно хороших (при формулировке соответствующей леммы определим, в чём это заключается) $L_1, L_2$ некоторым другим интересым образом, для чего снова придётся определить некоторое количество конструкций.
Для класса $n$-шкал $\mathfrak{C}$ можно определить
$SF(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{X} : \exists \mathfrak{X}' \in \mathfrak{C}, \mathfrak{X} \sqsubseteq \mathfrak{X}'\}$

**Определение**

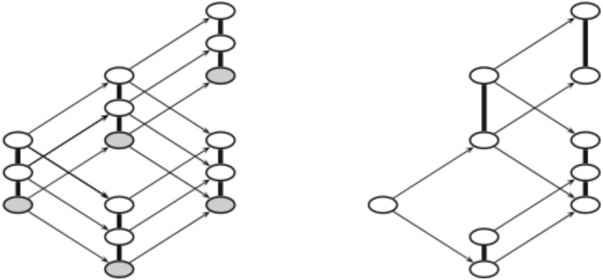
Пусть $F$ – некоторый класс подшкал от 2-шкал. Тогда $F$-релятивизованным произведением для Крипке-полных 1-логик $L_1, L_2$ будет называться: $(L_1 \times L_2)^F = Log(F \cap SF(Fr(L_1) \times Fr(L_2)))$

Для такой релятивизации нам весьма пригодится класс $EX$: это класс всех таких 2-шкал $\mathfrak{X} = (X, S_1, S_2)$, что существуют 1-шкалы $\mathfrak{X}_1 = (X_1, R_1), \mathfrak{X}_2 = (X_2, R_2)$ таких, что

- $\mathfrak{X} \sqsubseteq \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$
- для всех $(x_1, x_2) \in X$ и $x \in X_1$, если $x_1 R_1 x$, то $(x, x_2) \in X$



Слева -- пример произведения двух унимодальных шкал, где одно из отношений -- рефлексивное транзитивное замыкание диагональных стрелочек, а второе -- симметричное рефлексивное транзитивное замыкание жирных вертикальных палочек, копия первого множества из произведения закрашена серым. Справа -- подшкала этой шкалы, лежащая в EX



Слева -- пример произведения двух унимодальных шкал, где одно из отношений -- рефлексивное транзитивное замыкание диагональных стрелочек, а второе -- симметричное рефлексивное транзитивное замыкание жирных вертикальных палочек, копия первого множества из произведения закрашена серым. Справа -- подшкала этой шкалы, лежащая в EX

Также $n$-логика $L$ называется логикой подшкал согда $SF(Fr(L)) \subseteq Fr(L)$. Это определение будет необходимо нам в следующей лемме

## Лемма

$(L_1 \times L_2)^{EX} = [L_1, L_2]^{EX}$, *если* $L_1 \in \{K, K4, T, S4, S5\}$ *и* $L_2$ *– Крипке-полная аксиоматизируемая хорновыми формулами логика подшкал.*

## Лемма

*$(L_1 \times L_2)^{EX} = [L_1, L_2]^{EX}$, если $L_1 \in \{K, K4, T, S4, S5\}$ и $L_2$ – Крипке-полная аксиоматизируемая хорновыми формулами логика подшкал.*

Эта лемма происходит из [4] (A. Kurucz, M. Zakharyaschev “A note on relativised products of modal logics”)

## Лемма

$(L_1 \times L_2)^{EX} = [L_1, L_2]^{EX}$, *если* $L_1 \in \{K, K4, T, S4, S5\}$ *и* $L_2$ – *Крипке-полная аксиоматизируемая хорновыми формулами логика подшкал.*

Эта лемма происходит из [4] (A. Kurucz, M. Zakharyaschev "A note on relativised products of modal logics")
Определим также $CT$ как класс всех счётных 2-шкал. И определим $SR$ как класс всех всех подшкал произведений со строгим корнем (где у подшкалы $\mathfrak{X}$ произведения шкал $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ есть строгий корень, согда $r_1$ – корень $\mathfrak{X}_1$, $r_2$ – корень $\mathfrak{X}_2$ такие, что $(r_1, r_2)$ – корень $\mathfrak{X}$)

### Лемма

*$(L_1 \times L_2)^{EX} = [L_1, L_2]^{EX}$, если $L_1 \in \{K, K4, T, S4, S5\}$ и $L_2$ – Крипке-полная аксиоматизируемая хорновыми формулами логика подшкал.*

Эта лемма происходит из [4] (A. Kurucz, M. Zakharyaschev “A note on relativised products of modal logics”)

Определим также $CT$ как класс всех счётных 2-шкал. И определим $SR$ как класс всех всех подшкал произведений со строгим корнем (где у подшкалы $\mathfrak{X}$ произведения шкал $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ есть строгий корень, согда $r_1$ – корень $\mathfrak{X}_1$, $r_2$ – корень $\mathfrak{X}_2$ такие, что $(r_1, r_2)$ – корень $\mathfrak{X}$)

Из той же недавно упомянутой статьи получится следующее:

### Лемма

*Пусть $L_1 \in \{K, K4, T, S4, S5\}$ и $L_2$ – Крипке-полна и аксиоматизируема хорновыми формулами. Тогда всякая счётная шкала $\mathfrak{X} \in Fr([L_1, L_2]^{EX})$ с корнем – это p-морфный образ некоторой*

$$\mathfrak{X}' \in EX \cap CT \cap SR \cap SF(Fr(L_1) \times Fr(L_2))$$

И можно получить даже больше. Если $2SER$ – класс всевозможных 2-шкал, где второе отношение сериально (или тотально, что то же самое). Тогда оказывается, что:

И можно получить даже больше. Если $2SER$ – класс всевозможных 2-шкал, где второе отношение сериально (или тотально, что то же самое). Тогда оказывается, что:

**Лемма**

*Если $L$ – Крипке-полное и аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение $D$, тогда всякая счётная шкала с корнем $\mathfrak{X} \in Fr[S4, L]^{EX}$ – это p-морфный образ некоторой шкалы*

$$\mathfrak{X}' \in EX \cap 2SER \cap CT \cap SR \cap SF(Fr(S4) \times Fr(L))$$

И можно получить даже больше. Если $2SER$ – класс всевозможных 2-шкал, где второе отношение сериально (или тотально, что то же самое). Тогда оказывается, что:

**Лемма**

*Если $L$ – Крипке-полное и аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение $D$, тогда всякая счётная шкала с корнем $\mathfrak{X} \in Fr[S4, L]^{EX}$ – это p-морфный образ некоторой шкалы*

$$\mathfrak{X}' \in EX \cap 2SER \cap CT \cap SR \cap SF(Fr(S4) \times Fr(L))$$

Плюс если определить $ROOTED$ как класс всевозможных 2-шкал с корнем, то:

**Лемма**

*Если $L_1, L_2$ – Крипке-полные и аксиоматизируемые хорновыми формулами 1-логики, то*

$$[L_1, L_2]^{EX} = Log(CT \cap ROOTED \cap Fr([L_1, L_2]^{EX}))$$

И можно получить даже больше. Если $2SER$ – класс всевозможных 2-шкал, где второе отношение сериально (или тотально, что то же самое). Тогда оказывается, что:

**Лемма**

*Если $L$ – Крипке-полное и аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение $D$, тогда всякая счётная шкала с корнем $\mathfrak{X} \in Fr[S4, L]^{EX}$ – это p-морфный образ некоторой шкалы*

$$\mathfrak{X}' \in EX \cap 2SER \cap CT \cap SR \cap SF(Fr(S4) \times Fr(L))$$

Плюс если определить $ROOTED$ как класс всевозможных 2-шкал с корнем, то:

**Лемма**

*Если $L_1, L_2$ – Крипке-полные и аксиоматизируемые хорновыми формулами 1-логики, то*

$$[L_1, L_2]^{EX} = Log(CT \cap ROOTED \cap Fr([L_1, L_2]^{EX}))$$

Чтобы не перегружать происходящее, доказательство этого факта опустим.

Теперь для всякого непротиворечивого Крипке-полного расширения $L$ логики $D$ определим $\mathfrak{N}_L = (\mathbb{N}^*, R_L)$, где $(\mathbb{N}^*$ – множество всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел (включающее пустую последовательность), $R_L$ – минимальное отношение такое, что $\lhd \subseteq R_L$ $(\lhd = \{(\bar{a}, \bar{a}n) : \bar{a} \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}\})$ и $\mathfrak{N}_L \vDash \Gamma_L$ $(\Gamma_L = \{A_H : A \in \Delta_L\}$, где $L = D + \Delta_L$ – аксиоматизация хорновыми формулами, а $A_H$ – соответствующее хорновой формуле универсальное предложение Хорна в логике первого порядка).

Теперь для всякого непротиворечивого Крипке-полного расширения $L$ логики $D$ определим $\mathfrak{N}_L = (\mathbb{N}^*, R_L)$, где $(\mathbb{N}^*$ – множество всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел (включающее пустую последовательность), $R_L$ – минимальное отношение такое, что $\lhd \subseteq R_L$ $(\lhd = \{(\bar{a}, \bar{a}n) : \bar{a} \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}\})$ и $\mathfrak{N}_L \models \Gamma_L$ $(\Gamma_L = \{A_H : A \in \Delta_L\}$, где $L = D + \Delta_L$ – аксиоматизация хорновыми формулами, а $A_H$ – соответствующее хорновой формуле универсальное предложение Хорна в логике первого порядка).

**Лемма**

*Пусть $\mathfrak{X} \in Fr(L)$, где $L$ – непротиворечивое Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение $D$. Тогда любая монотонная функция из $\mathfrak{N}^* = (\mathbb{N}, \lhd)$ в $\mathfrak{X}$ – это монотонная функция из $\mathfrak{N}_L$ в $\mathfrak{X}$*

Теперь для всякого непротиворечивого Крипке-полного расширения $L$ логики $D$ определим $\mathfrak{N}_L = (\mathbb{N}^*, R_L)$, где $(\mathbb{N}^*$ – множество всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел (включающее пустую последовательность), $R_L$ – минимальное отношение такое, что $\lhd \subseteq R_L$ $(\lhd = \{(\bar{a}, \bar{a}n) : \bar{a} \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}\})$ и $\mathfrak{N}_L \models \Gamma_L$ $(\Gamma_L = \{A_H : A \in \Delta_L\}$, где $L = D + \Delta_L$ – аксиоматизация хорновыми формулами, а $A_H$ – соответствующее хорновой формуле универсальное предложение Хорна в логике первого порядка).

**Лемма**

*Пусть $\mathfrak{X} \in Fr(L)$, где $L$ – непротиворечивое Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение $D$. Тогда любая монотонная функция из $\mathfrak{N}^* = (\mathbb{N}, \lhd)$ в $\mathfrak{X}$ – это монотонная функция из $\mathfrak{N}_L$ в $\mathfrak{X}$*

Хотелось бы, наконец, приблизиться к доказательству нашей основной теоремы. Следующая лемма будет наиболее важной в доказательстве основной теоремы. Отметим также, что уже сейчас мы начали говорить про непротиворечивые логики: поскольку естественным образом случай противоречивых логик для нашей теоремы оказывается тривиальным, просто покрывая всё множество формул соответствующего языка.

## Лемма

*Пусть выполнены следующие условия:*

1. $L$ – *непротиворечивое Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение логики* $D$
2. $\mathfrak{X}_1 \in Fr(S4)$ – *счётная 1-шкала с корнем*
3. $\mathfrak{X}_2 \in Fr(L)$ – *счётная 1-шкала с корнем*
4. $\mathfrak{X} \in EX \cap 2SER \cap SF(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$
5. $(r_1, r_2)$ – *корень* $\mathfrak{X}$, *где* $r_1$ – *корень* $\mathfrak{X}_1$ *и* $r_2$ – *корень* $\mathfrak{X}_2$

*Тогда существует сюръективный p-морфизм из* $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ *на* $\mathfrak{X}$ *(где* $\mathfrak{Q}$ – *множество* $\mathbb{Q}$ *со стандартной топологией).*

## Лемма

*Пусть выполнены следующие условия:*

1. *$L$ – непротиворечивое Крипке-полное аксиоматизируемое хорновыми формулами расширение логики $D$*
2. *$\mathfrak{X}_1 \in Fr(S4)$ – счётная 1-шкала с корнем*
3. *$\mathfrak{X}_2 \in Fr(L)$ – счётная 1-шкала с корнем*
4. *$\mathfrak{X} \in EX \cap 2SER \cap SF(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$*
5. *$(r_1, r_2)$ – корень $\mathfrak{X}$, где $r_1$ – корень $\mathfrak{X}_1$ и $r_2$ – корень $\mathfrak{X}_2$*

*Тогда существует сюръективный р-морфизм из $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ на $\mathfrak{X}$ (где $\mathfrak{Q}$ – множество $\mathbb{Q}$ со стандартной топологией).*

Полное доказательство этого факта может занять довольно много места, посему сперва покажем, почему, если нам будет известен этот факт, главная теорема уже у нас в кармане.

Итак! Мы можем вспомнить, что требуется доказать исключительно включение $S4 \times_{tf} L \subseteq [S4, L]^{EX}$ для непротиворечивой Крипке-полной аксиоматизируемой хорновыми формулами логики $L$, сщдержащей $D$. Тогда предположим, что у нас есть $A \notin [S4, L]^{EX}$. Но тогда у нас должна быть счётная $[S4, L]^{EX}$-шкала $\mathfrak{X}$ с корнем такая, что $\notin Log(\mathfrak{X})$ (ибо мы ранее описали эту нашу логику как логику определённого класса шкал).

Итак! Мы можем вспомнить, что требуется доказать исключительно включение $S4 \times_{tf} L \subseteq [S4, L]^{EX}$ для непротиворечивой Крипке-полной аксиоматизируемой хорновыми формулами логики $L$, сщдержащей $D$. Тогда предположим, что у нас есть $A \notin [S4, L]^{EX}$. Но тогда у нас должна быть счётная $[S4, L]^{EX}$-шкала $\mathfrak{X}$ с корнем такая, что $\notin Log(\mathfrak{X})$ (ибо мы ранее описали эту нашу логику как логику определённого класса шкал).
Но также мы знаем, что тогда $\mathfrak{X}$ – $p$-морфный образ некоторой шкалы

$$\mathfrak{X}' \in EX \cap CT \cap SR \cap SF(Fr(L_1) \times Fr(L_2))$$

Итак! Мы можем вспомнить, что требуется доказать исключительно включение $S4 \times_{tf} L \subseteq [S4, L]^{EX}$ для непротиворечивой Крипке-полной аксиоматизируемой хорновыми формулами логики $L$, сщдержащей $D$. Тогда предположим, что у нас есть $A \notin [S4, L]^{EX}$. Но тогда у нас должна быть счётная $[S4, L]^{EX}$-шкала $\mathfrak{X}$ с корнем такая, что $\notin Log(\mathfrak{X})$ (ибо мы ранее описали эту нашу логику как логику определённого класса шкал).
Но также мы знаем, что тогда $\mathfrak{X}$ – $p$-морфный образ некоторой шкалы

$$\mathfrak{X}' \in EX \cap CT \cap SR \cap SF(Fr(L_1) \times Fr(L_2))$$

И тогда из свойства $p$-морфизма $A \notin Log(\mathfrak{X}')$. Но также мы понимаем, что $\mathfrak{X}'$ – это ещё и $p$-морфный образ $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ из нашей самой важной леммы. Но тогда $A \notin Log(\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L)$. Но тогда, поскольку $\mathfrak{Q} \in Top(S4)$ и $\mathfrak{N}_L \in Fr(L)$, $A \notin S4 \times_{tf} L$, что и требовалось доказать!

Теперь же попробуем хотя бы набросать идею доказательства “основной леммы”.

Теперь же попробуем хотя бы набросать идею доказательства "основной леммы".
— Можно считать, что $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ – это большое дерево, у которого вместо узлов – копии $\mathbb{Q}$, по одной штуке на каждую последовательность $\overline{a} \in \mathbb{N}^*$ – то есть на каждый путь из корня. И мы будем пытаться развернуть $\mathfrak{X}$ на эту замечательную конструкцию.

Теперь же попробуем хотя бы набросать идею доказательства “основной леммы”.

— Можно считать, что $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ – это большое дерево, у которого вместо узлов – копии $\mathbb{Q}$, по одной штуке на каждую последовательность $\overline{a} \in \mathbb{N}^*$ – то есть на каждый путь из корня. И мы будем пытаться развернуть $\mathfrak{X}$ на эту замечательную конструкцию.

— Для начала стоит заметить, что у нас уже есть $p$-морфизм $\phi$ из $\mathfrak{Q}$ на $\mathfrak{X}_1$. И уже из этой функции мы будем пытаться построить функции $\phi_{\overline{a}} : \mathbb{Q} \to X$, открытые и непрерывные как функции из $\mathfrak{Q}$ в $(X, S_1)$. Первой (левой) координатой $\phi_{\overline{a}}(q)$ будет $\phi(q)$, вторую же координату придётся придумывать. После чего из этого хочется построить функцию $\psi(q, \overline{a}) = \phi_{\overline{a}}(q)$ и, если мы достаточно хорошо построим наши $\phi_{\overline{a}}$, получится нужный сюръективный $p$-морфизм.

Теперь же попробуем хотя бы набросать идею доказательства "основной леммы".

— Можно считать, что $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ – это большое дерево, у которого вместо узлов – копии $\mathbb{Q}$, по одной штуке на каждую последовательность $\overline{a} \in \mathbb{N}^*$ – то есть на каждый путь из корня. И мы будем пытаться развернуть $\mathfrak{X}$ на эту замечательную конструкцию.

— Для начала стоит заметить, что у нас уже есть $p$-морфизм $\phi$ из $\mathfrak{Q}$ на $\mathfrak{X}_1$. И уже из этой функции мы будем пытаться построить функции $\phi_{\overline{a}} : \mathbb{Q} \to X$, открытые и непрерывные как функции из $\mathfrak{Q}$ в $(X, S_1)$. Первой (левой) координатой $\phi_{\overline{a}}(q)$ будет $\phi(q)$, вторую же координату придётся придумывать. После чего из этого хочется построить функцию $\psi(q, \overline{a}) = \phi_{\overline{a}}(q)$ и, если мы достаточно хорошо построим наши $\phi_{\overline{a}}$, получится нужный сюръективный $p$-морфизм.

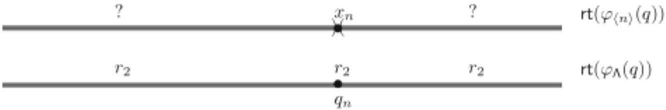
— $\phi_{\curlywedge}$ (где $\curlywedge$ – пустое слово) будет определяться как $\phi_{\curlywedge}(q) = (\phi(q), r_2)$.

Теперь же попробуем хотя бы набросать идею доказательства "основной леммы".
— Можно считать, что $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}_L$ – это большое дерево, у которого вместо узлов – копии $\mathbb{Q}$, по одной штуке на каждую последовательность $\overline{a} \in \mathbb{N}^*$ – то есть на каждый путь из корня. И мы будем пытаться развернуть $\mathfrak{X}$ на эту замечательную конструкцию.
— Для начала стоит заметить, что у нас уже есть $p$-морфизм $\phi$ из $\mathfrak{Q}$ на $\mathfrak{X}_1$. И уже из этой функции мы будем пытаться построить функции $\phi_{\overline{a}} : \mathbb{Q} \to X$, открытые и непрерывные как функции из $\mathfrak{Q}$ в $(X, S_1)$. Первой (левой) координатой $\phi_{\overline{a}}(q)$ будет $\phi(q)$, вторую же координату придётся придумывать. После чего из этого хочется построить функцию $\psi(q, \overline{a}) = \phi_{\overline{a}}(q)$ и, если мы достаточно хорошо построим наши $\phi_{\overline{a}}$, получится нужный сюръективный $p$-морфизм.
— $\phi_{\curlywedge}$ (где $\curlywedge$ – пустое слово) будет определяться как $\phi_{\curlywedge}(q) = (\phi(q), r_2)$.
— Следующий шаг уже будет определяться за счёт нумерации $\mathbb{Q} \times X_2$:

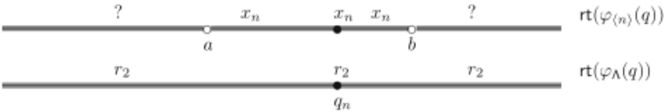
$$(q_0, x_0), (q_1, x_1), \dots, (q_n, x_n), \dots$$

— Будем определять на некотором интервале с иррациональными концами около $q_n$ $\phi_{(n)}$ (где $(n)$ – одноэлементная последовательность) правую координату как $x_n$. Для всех остальных точек нужно найти некоторую специфическую координату, куда их отправлять.

— Будем определять на некотором интервале с иррациональными концами около $q_n$ $\phi_{(n)}$ (где $(n)$ – одноэлементная последовательность) правую координату как $x_n$. Для всех остальных точек нужно найти некоторую специфическую координату, куда их отправлять.




На картинке выше над точками подписывается правая координата соответствующих отображений, снизу уже построенного для пустого слова, сверху для определяемого, пока мы определились не везде.




Тут a и b обозначены выколотыми точками, ибо они иррациональны. Именно на этом интервале мы сперва определяем отображение, оставшиеся же вне интервала "концы" прямой мы будем отображать в наследника по умолчанию двух корней, которого определим дальше

— Выберем *наследника по умолчанию* (относительно $S_2$) для $(u, v) \in X$, который будет выглядеть как $defsucc(u, v) = (u, v') \in X$ такой, что $(u, v)S_2(u, v')$, что можно будет сделать, ибо $X \in 2SER$. И тогда $\phi_{(n)}(q) = (\phi(q), rt(defsucc(r_1, r_2)))$ для точек $q$ вне интервала, где мы уже определились ($rt(defsucc(r_1, r_2))$ – правая координата $defsucc(r_1, r_2)$).

— Выберем *наследника по умолчанию* (относительно $S_2$) для $(u, v) \in X$, который будет выглядеть как $defsucc(u, v) = (u, v') \in X$ такой, что $(u, v)S_2(u, v')$, что можно будет сделать, ибо $X \in 2SER$. И тогда $\phi_{(n)}(q) = (\phi(q), rt(defsucc(r_1, r_2)))$ для точек $q$ вне интервала, где мы уже определились ($rt(defsucc(r_1, r_2))$ – правая координата $defsucc(r_1, r_2)$).

— Понятно, что при этом переходе от пустого слова к однобуквенному мы разделили $\mathbb{Q}$ на два открыто-замкнутых множества, и в индуктивном определении нашей функции мы продолжим эту традицию, разделяя $\mathbb{Q}$ на всё большее количество таких множеств.

- P. Kremer Topological-Frame Products of Modal Logics. Studia Logica 106 (6):1097-1122 (2018)
- A. Kudinov On neighborhood product of some Horn axiomatizable logics. Unpublished ms, downloaded from https://arxiv.org/pdf/1609.03232v1.pdf, on October 19, 2016.
- P. Kremer Quantified modal logic on the rational line, Review of Symbolic Logic 7:439–454, 2014
- A. Kurucz, M. Zakharyaschev A note on relativised products of modal logics, in P. Balbiani, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, and M. Zakharyaschev (eds), Advances in Modal Logic, Volume 4. King's College Publications, 2003, pp. 221–242.