Модальная логика (введение)

Кудинов А.В.

16 сентября 2022 г.

Язык

Формула пропозициональной модальной логики строится следующим образом:

1. $p \in Prop$ — формула; Prop – счётное мн-во переменных.
2. $\bot$ — формула;
3. Если A и B — формулы, то $(A \to B)$ тоже формула;
4. Если A — формула, то $\Box A$ тоже формула.

Множество всех модальных формул обозначается $\mathcal{ML}$.

Символ $\Box$ читается, как «бокс».

Коротко (в форме Бэкуса-Наура):

$$A ::= p \mid \bot \mid (A \to A) \mid \Box A.$$

$$\text{<формула>} ::= p \mid \bot \mid (\text{<формула>} \to \text{<формула>}) \mid \Box\text{<формула>}.$$

Язык

Остальные связки считаются сокращениями соответствующих формул:

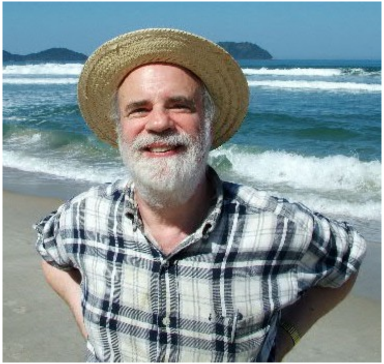
$$\neg A \rightleftharpoons A \to \bot, \quad \top \rightleftharpoons \neg\bot, \quad A \vee B \rightleftharpoons \neg A \to B, \quad A \wedge B \rightleftharpoons \neg(A \to \neg B), \quad \Diamond A \rightleftharpoons \neg\Box\neg A.$$

Семантика

Шкалой Крипке (Kripke frame) называется пара $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$ — множество «возможных миров», $R \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R)$ называется функция $V : Prop \to 2^W$.

Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$.



Сол Крипке

(источник: wikipedia.org)

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$\iff (M, x \not\models A \Rightarrow M, x \models B)$

R

$y_1 \models A$

$y_2 \models A$

$\vdots$

$x \models \Box A$

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M, x \models A \lor B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \land B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$y \models A$

$x \models \Diamond A$

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M, x \models A \vee B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \wedge B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \ \& \ M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x &\not\models \bot \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M, x \models A \vee B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \wedge B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F, V) \models A$.

Семантика

Введем отношение $\models$

$$
\begin{aligned}
M, x \models p &\iff x \in V(p) \\
M, x \not\models \bot & \\
M, x \models A \to B &\iff M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A &\iff \forall y (xRy \Rightarrow M, y \models A). \\
M, x \models A \lor B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \land B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B \\
M, x \models \Diamond A &\iff \exists y (xRy \;\&\; M, y \models A).
\end{aligned}
$$

Формула A истинна в модели M (обозн. $M \models A$), если $\forall x (M, x \models A)$.

Формула A общезначима в шкале F (обозн. $F \models A$), если $\forall V (F, V) \models A$.
Формула A общезначима в классе шкал $\mathcal{C}$ (обозн. $\mathcal{C} \models A$), если $\forall F \in \mathcal{C} (F \models A)$.

Лемма

В шкале $F = (W, R)$ $F \models \Box p \to p$, тогда и только тогда, когда $\forall x (xRx)$.

($\Leftarrow$) $\forall V$ $\forall x$ $F, V, x \models \Box p \to p$

Пусть $F, V, x \models \Box p$ $\Rightarrow$ $\forall y (xRy \Rightarrow F, V, y \models p)$

xRx

Для $y = x$. $F, V, x \models p$

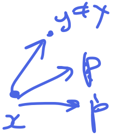
Значит $F, V, x \models \Box p \to p$

($\Rightarrow$) Пусть найдется z т.ч. $\neg zRz$

Найдется V и точка x т.ч.

$V(p) = W \setminus \{z\}$ и $x = z$

$F, V, x \not\models \Box p \to p$



$\left.\begin{array}{l} F, V, x \models \Box p \\ F, V, x \not\models p \end{array}\right\} \Rightarrow F, V, x \not\models \Box p \to p$

Лемма (Альтернативное определение истинности)

Давайте продолжим оценку V модели $M = (F, V)$, $F = (W, R)$ на все множество формул следующим образом:

$$\begin{aligned} V(\bot) &= \varnothing, \\ V(A \to B) &= (W - V(A)) \cup V(B), \\ V(\Box A) &= \{x \mid \forall y (xRy \Rightarrow y \in V(A))\}. \end{aligned}$$

Тогда,

$$M, x \models A \iff x \in V(A). \tag{1}$$

Определимые свойства шкал

Свойство шкалы Крипке называется модально определимым, если существует модальная формула общезначимая в шкале тогда и только тогда, когда верно это свойство.

Часто, говоря о свойстве, мы имеем в виду класс шкал, удовлетворяющих этому свойству, и наоборот.

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x\exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

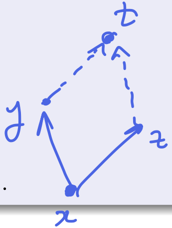
1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \,\&\, xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x(|R(x)| \leq n)$;

Некоторые соответсвия формул и свойств

Предложение

Для шкал крипке $F = (W, R)$

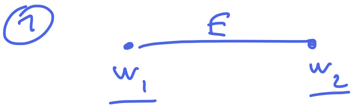
1. $F \models AT \rightleftharpoons \Box p \to p \iff \forall x(xRx)$ (рефлексивность);
2. $F \models AD \rightleftharpoons \Diamond\top \iff \forall x \exists y(xRy) \iff \forall x(R(x) \neq \varnothing)$ (сериальность);
3. $F \models \Box\bot \iff R = \varnothing$;
4. $F \models A4 \rightleftharpoons \Box p \to \Box\Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \ \&\ yRz \Rightarrow xRz) \iff R^2 \subseteq R$ (транзитивность);
5. $F \models A5 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box p \iff \forall x \forall y \forall z(xRy \ \&\ xRz \Rightarrow yRz)$ (евклидовость);
6. $F \models AB \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to p \iff \forall x \forall y(xRy \Rightarrow yRx) \iff R = R^{-1}$ (симметричность);
7. $F \models Alt_n \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n} \Box(p_i \to \bigvee_{i \neq j} p_j) \iff \forall x(|R(x)| \leq n)$;
8. $F \models A2 \rightleftharpoons \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \iff \forall x \forall y \forall z \exists t(xRy \ \&\ xRz \Rightarrow yRt \ \&\ zRt)$ (свойство Черча-Россера).

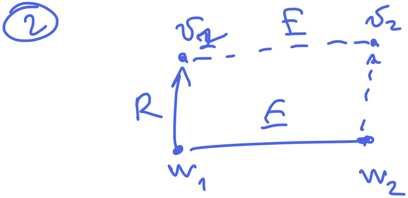


Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке.
Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — бисимуляция, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\ (v_1 E v_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\ (v_1 E v_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1)$.





Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — **бисимуляция**, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\, (v_1 E v_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\, (v_1 E v_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1)$.

Лемма (о бисимуляции)

Пусть E — бисимуляция между M_1 и M_2. Тогда для любой формулы A и для всех $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$

$$w_1 E w_2 \Rightarrow (M_1, w_1 \models A \Leftrightarrow M_2, w_2 \models A)\,.$$

Что можно и чего нельзя выразить модальными формулами?

Пусть $M_1 = (W_1, R_1, V_1)$ и $M_2 = (W_2, R_2, V_2)$ — модели Крипке. Отношение $E \subset W_1 \times W_2$ — **бисимуляция**, если

1. $w_1 E w_2 \Rightarrow$ для всех переменных p $\big(w_1 \in V_1(p) \Leftrightarrow w_2 \in V_2(p)\big)$;
2. $w_1 E w_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1 \Rightarrow \exists v_2 \in W_2\ (v_1 E v_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2)$;
3. $w_1 E w_2 \;\&\; w_2 R_2 v_2 \Rightarrow \exists v_1 \in W_1\ (v_1 E v_2 \;\&\; w_1 R_1 v_1)$.

Лемма (о бисимуляции)

Пусть E — бисимуляция между M_1 и M_2. Тогда для любой формулы A и для всех $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$

$$w_1 E w_2 \Rightarrow (M_1, w_1 \models A \Leftrightarrow M_2, w_2 \models A)\,.$$

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Бисимуляция

Свойство шкалы Крипке называется модально определимым, если существует модальная формула общезначимая в шкале тогда и только тогда, когда верно это свойство.

$F \models A \iff R$ – иррефл

$\forall x (\neg xRx)$

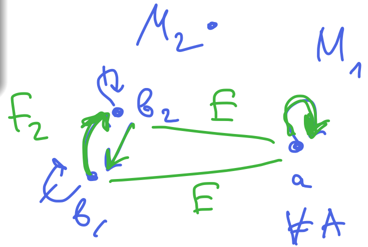
Предложение

Следующие свойства модально неопределимы.

1. иррефлексивность,
2. антисимметричность,
3. связность.

$F_2 \models A$

$M_2 \not\models A$



$\forall p \in Prop$

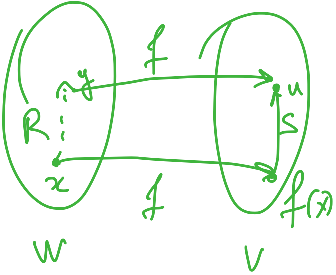
$F_1, V_1, a \not\models A$

$b_1 \in V_2(p) \iff b_2 \in V_2(p) \iff a \in V_1(p)$

Преобразования, сохраняющие истинность:p-морфизм

Функция $f : W \to V$ — *p-морфизмом* из шкалы $F = (W, R)$ в $G = (V, S)$ (Обозначение: $f : F \twoheadrightarrow G$), если

1. f является сюръекцией.
2. $xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)$ (монотонность).
3. $f(x)Su \Rightarrow \exists y(f(y) = u \;\&\; xRy)$ (поднятие).



Преобразования, сохраняющие истинность:p-морфизм

Функция $f : W \to V$ — p-морфизмом из шкалы $F = (W, R)$ в $G = (V, S)$ (Обозначение: $f : F \twoheadrightarrow G$), если

1. f является сюръекцией.
2. $xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)$ (монотонность).
3. $f(x)Su \Rightarrow \exists y(f(y) = u \ \&\ xRy)$ (поднятие).

Лемма (о p-морфизме)

Если $f : F \twoheadrightarrow G$, V — оценка на G, тогда для любой формулы A

$$F, V', x \models A \Leftrightarrow G, V, f(x) \models A,$$

где $V'(p) = f^{-1}(V(p))$.

Лемма (о p-морфизме)

Если $f : F \twoheadrightarrow G$, V — оценка на G, тогда для любой формулы A

$$F, V', x \models A \Leftrightarrow G, V, f(x) \models A,$$

где $V'(p) = f^{-1}(V(p))$.

Для доказательства достаточно доказать, что f, как отношение, является бисимуляцией.

Лемма (о p-морфизме)

Если $f : F \twoheadrightarrow G$, V — оценка на G, тогда для любой формулы A

$$F, V', x \models A \Leftrightarrow G, V, f(x) \models A,$$

где $V'(p) = f^{-1}(V(p))$.

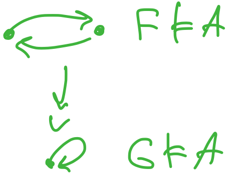
Для доказательства достаточно доказать, что f, как отношение, является бисимуляцией.

$Log(F) = \{A \mid F \models A\}$

Теорема

Пусть $F \twoheadrightarrow G$, тогда $Log(F) \subseteq Log(G)$.

$A \notin Log(G) \Rightarrow A \notin Log(F)$



Преобразования, сохраняющие истинность: дизъюнктная сумма

Пусть $\{F_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство шкал Крипке, т.ч. $F_i = (W_i, R_i)$. Определим дизъюнктную сумму шкал Крипке:

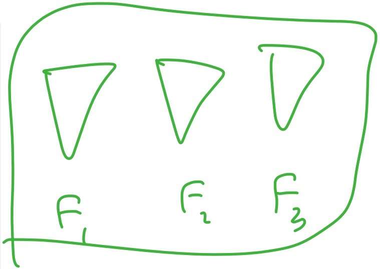
$$\bigsqcup_{i\in I} F_i \rightleftharpoons (W, R), \text{ т.ч. } W = \bigsqcup_{i\in I} W_i = \bigcup_{i\in I} W_i \times \{i\};$$

$$(x,i)R(y,j) \Leftrightarrow i = j \ \&\ xR_i y.$$

Аналогично можно определить дизъюнктную сумму семейства моделей:

$$\bigsqcup_{i\in I} M_i \rightleftharpoons (\bigsqcup_{i\in I} F_i, \bigsqcup_{i\in I} V_i),$$

$$(x,i) \in \left[\bigsqcup_{i\in I} V_i\right](p) \Leftrightarrow x \in V_i(p).$$

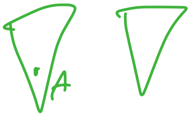


Преобразования, сохраняющие истинность: дизъюнктная сумма

Лемма

Для любой формулы A, индекса i и точки $w_i \in W_i$ верно, что

$$\bigsqcup_{i\in I} M_i, (w_i, i) \models A \iff M_i, w_i \models A.$$



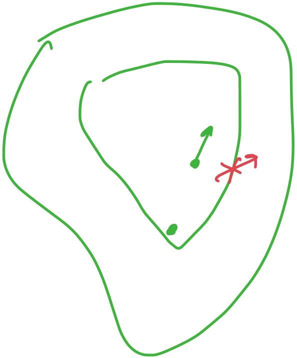
Предложение

$$Log(\bigsqcup_{i\in I} F_i) = \bigcap_{i\in I} Log(F_i) = Log(\{F_i \mid i \in I\}).$$

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

‘

Порожденной подшкалой шкалы $F = (W, R)$ называется шкала $F' = (W', R')$, т.ч. $\forall w \forall u\, (w \in W' \;\&\; wRu \Rightarrow u \in W')$ и $R' = R\big|_{W'} = R \cap W' \times W'$.



Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

‘

Порожденной подшкалой шкалы $F = (W, R)$ называется шкала $F' = (W', R')$, т.ч. $\forall w \forall u\, (w \in W' \;\&\; wRu \Rightarrow u \in W')$ и $R' = R\big|_{W'} = R \cap W' \times W'$.

Порожденной подмоделью модели $M = (F, V)$ называется модель $M' = (F', V')$, такая что $F' = (W', R')$ — порожденная подшкала, и $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

‘

Порожденной подшкалой шкалы $F = (W, R)$ называется шкала $F' = (W', R')$, т.ч. $\forall w \forall u\, (w \in W' \;\&\; wRu \Rightarrow u \in W')$ и $R' = R\big|_{W'} = R \cap W' \times W'$.

Порожденной подмоделью модели $M = (F, V)$ называется модель $M' = (F', V')$, такая что $F' = (W', R')$ — порожденная подшкала, и $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Лемма

Пусть M' — порожденная подмодель модели M. Тогда для любой точки w из M' и любой формулы A верно

$$M', w \models A \iff M, w \models A.$$

Лемма

Пусть M' — порожденная подмодель модели M. Тогда для любой точки w из M' и любой формулы A верно

$$M', w \models A \iff M, w \models A.$$

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $M = (F, V)$ — модель.
Определим

$$
\begin{aligned}
xR^0y &\iff x = y, \\
xR^1y &\iff xRy, \\
xR^{n+1}y &\iff \exists(xR^n zRy), && \text{т.е. } R^{n+1} = R^n \circ R, \\
xR^*y &\iff \exists n(xR^n y), && \text{т.е. } R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n.
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что R^* является транзитивным замыканием R.
Для $x \in W$ определим $W^x = R^*(x)$, $R^x = R|_{W^x} = R \cap W^x \times W^x$,
$V^x(p) = V(p) \cap W^x$ для всех переменных p.

Преобразования, сохраняющие истинность: порожденная подшкала

Шкала $F^x = (W^x, R^x)$ называется конусом, модель $M^x = (F^x, V^x)$ называется моделью порожденной одной точкой.

Лемма

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $M = (F, V)$ — модель, $x \in W$, A — произвольная формула, тогда

- $M, x \models A \iff M^x, x \models A$;
- для любого $y \in W^x$ $M, y \models A \iff M^x, y \models A$;
- $F \models A \Rightarrow F^x \models A$.

Преобразования, сохраняющие истинность

$= \{F \mid \forall A \in \Gamma\ (F \models A)\}$ Γ – мн-во ф-л.

Теорема

Многообразие любого множества формул замкнуто относительно

- p-морфизма,
- дизъюнктной суммы,
- порожденных ~~подмоделей~~. подшкал

Преобразования, сохраняющие истинность

Теорема

Многообразие любого множества формул замкнуто относительно

- p-морфизма,
- дизъюнктной суммы,
- порожденных подмоделей.

Естественный вопрос: Верно ли обратное?
Т.е. если многообразие замкнуто относительно этих операций, будет ли оно задаваться некоторым множеством формул?

Модальная логика

Нормальной модальной логикой называется подмножество формул $\mathsf{L} \subseteq \mathcal{ML}$, если

1. L содержит все классические тавтологии;
2. L замкнуто относительно правил

$$\frac{A \to B,\ A}{B} \quad (MP) \qquad \text{Modus Ponens;}$$

$$\frac{A}{\Box A} \quad (\to \Box) \qquad \text{правило обобщения;}$$

$$\frac{A}{[B/p]A} \quad (Sub) \qquad \text{правило подстановки;}$$

3. L содержит модальные аксиомы нормальности:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \quad (AK)$$

Язык

Логика

Семантика

Можно сказать, что нормальная модальная логика — это множество формул, замкнутое относительно вывода.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

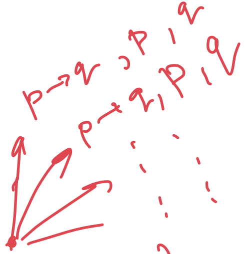
Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$. $L + A = L + \{A\}$

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.



$$\frac{x \models \Box(p \to q) \qquad x \models \Box p}{x \models \Box q}$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Следствие

Для класса шкал $\mathcal{C}$ $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

$$Log(C) = \bigcap_{F \in C} Log(F)$$

Примеры модальных логик

Минимальная модальная логика обозначается K.

Для множества формул Γ и модальной логики L минимальную модальную логику содержащую множество формул $\mathsf{L} \cup \Gamma$ обозначают $\mathsf{L} + \Gamma$.

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Следствие

Для класса шкал $\mathcal{C}$ $Log(\mathcal{C})$ является модальной логикой.

Логика L называется полной (по Крипке), если существует класс шкал $\mathcal{C}$, т.ч. $\mathsf{L} = Log(\mathcal{C})$.

Теорема корректности

Теорема (Теорема корректности)

Пусть F — шкала Крипке, тогда $Log(F) = \{A \mid F \models A\}$ является модальной логикой.

Док-во.

Примеры логик

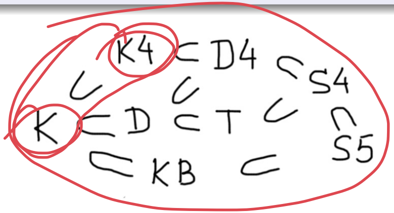
Опр

Определим несколько логик:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4 \\
\mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4 \\
\mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT
\end{array}$$

Предложение

Все включения на следующем рисунке верны и строги



Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$
\begin{array}{rcl}
M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\
W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\
xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\
V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}.
\end{array}
$$

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$\begin{array}{rcl} M_L & = & (W_L, R_L, V_L),\ \text{где} \\ W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\ xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\ V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}\,. \end{array}$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется канонической шкалой логики L.

Каноническая шкала

Канонической моделью модальной логики L называется

$$
\begin{array}{rcl}
M_L & = & (W_L, R_L, V_L), \text{ где} \\
W_L & - & \text{множество всех полных теорий}, \\
xR_Ly & \Leftrightarrow & \forall A(\Box A \in x \Rightarrow A \in y), \\
V_L(p_i) & \Leftrightarrow & \{x \mid p_i \in x\}.
\end{array}
$$

Шкала $F_L = (W_L, R_L)$ называется **канонической шкалой** логики L.

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x;$
Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для случая $A = B \to C$ следует из пункта 4 Леммы о L-полной теории.

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для случая $A = B \to C$ следует из пункта 4 Леммы о L-полной теории.
Пусть $A = \Box B$.

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y (x R_L y \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y (x R_L y \ \& \ B \notin y)$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;

Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для случая $A = B \to C$ следует из пункта 4 Леммы о L-полной теории.

Пусть $A = \Box B$.

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y)$$

По определению, если $xR_L y$ и $\Box B \in x$, то $B \in y$. А раз $B \notin y$, то $\Box B \notin x$. Что и требовалось.

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;

Доказательство по индукции.

База индукции следует из определения.

Шаг индукции для случая $A = B \to C$ следует из пункта 4 Леммы о L-полной теории.

Пусть $A = \Box B$.

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y)$$

По определению, если xR_Ly и $\Box B \in x$, то $B \in y$. А раз $B \notin y$, то $\Box B \notin x$. Что и требовалось.

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_Ly \ \& \ B \notin y).$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x;$
Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для случая $A = B \to C$ следует из пункта 4 Леммы о L-полной теории.
Пусть $A = \Box B$.

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y)$$

По определению, если $xR_L y$ и $\Box B \in x$, то $B \in y$. А раз $B \notin y$, то $\Box B \notin x$. Что и требовалось.
Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \;\&\; B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Доказательство теоремы о полноте

Докажем пункт 1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
Доказательство по индукции.
База индукции следует из определения.
Шаг индукции для случая $A = B \to C$ следует из пункта 4 Леммы о L-полной теории.
Пусть $A = \Box B$.

$$M_L, x \not\models \Box B \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ y \not\models B) \Leftrightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y)$$

По определению, если $xR_L y$ и $\Box B \in x$, то $B \in y$. А раз $B \notin y$, то $\Box B \notin x$. Что и требовалось.
Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \&\ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\ &\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\ &\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\ &\ L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y (x R_L y \;\&\; B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\
&\; L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.
Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_Ly \;\&\; B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\
&\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\
&\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\
&\ L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots).
\end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y (x R_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \ldots, C_n\}, \text{ т.ч.} \\ &\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow \\ &\quad \rhd_L C_1 \to (\ldots(C_n \to (\neg B \to \bot)\ldots) \Leftrightarrow \\ &\ L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots). \end{aligned}$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.

Осталось доказать, что

$$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(xR_L y \ \& \ B \notin y).$$

Будем строить y пользуясь леммой Линденбаума. Определим

$$\Gamma = \{\neg B\} \cup \{C \mid \Box C \in x\}.$$

Пусть Γ противоречиво, тогда противоречиво некоторое конечное подмножество Γ:

$$\Gamma_0 = \{\neg B, C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ т.ч.}$$

$$\Gamma_0 \rhd_L \bot \Leftrightarrow$$

$$\rhd_L C_1 \to (\dots(C_n \to (\neg B \to \bot)\dots) \Leftrightarrow$$

$$L \vdash C_1 \to (\dots(C_n \to B)\dots).$$

По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\dots(C_n \to B)\dots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\dots(\Box C_n \to \Box B)\dots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.

Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полное множество y содержащее Γ.

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.
По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots (C_n \to B) \ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots (\Box C_n \to \Box B) \ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полная теория y, содержащая Γ.

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.
По правилу обобщения

$$L \vdash C_1 \to (\ldots(C_n \to B)\ldots)).$$

Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем

$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots(\Box C_n \to \Box B)\ldots)).$$

Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полная теория y, содержащая Γ.
По определению

$$x R_L y \ \&\ B \notin y.$$

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.
По правилу обобщения
$$L \vdash C_1 \to (\ldots (C_n \to B) \ldots)).$$
Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем
$$L \vdash \Box C_1 \to (\ldots (\Box C_n \to \Box B) \ldots)).$$
Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полная теория y, содержащая Γ.
По определению
$$xR_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$
($\Leftarrow$) следует из пункта 1 этой теоремы и пункта 2 Леммы о L-полной теории.

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x.$
По правилу обобщения
$$L \vdash C_1 \to (\dots(C_n \to B)\dots)).$$
Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем
$$L \vdash \Box C_1 \to (\dots(\Box C_n \to \Box B)\dots)).$$
Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полная теория y, содержащая Γ.
По определению
$$xR_L y \;\&\; B \notin y.$$

Докажем второй пункт. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$
($\Leftarrow$) следует из пункта 1 этой теоремы и пункта 2 Леммы о L-полной теории.
($\Rightarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L-полная теория x, содержащая $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.

Доказательство теоремы о полноте

Мы доказываем $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$.
По правилу обобщения
$$L \vdash C_1 \to (\dots(C_n \to B)\dots)).$$
Применяя несколько раз аксиому нормальности и MP получаем
$$L \vdash \Box C_1 \to (\dots(\Box C_n \to \Box B)\dots)).$$
Т.к. в $L \subset x$ $\forall i \Box C_i \in x$, то по (MP) $\Box B \in x$ — противоречие.
Значит, Γ — непротиворечиво и по лемме Линденбаума существует L-полная теория y, содержащая Γ.
По определению
$$xR_L y \ \& \ B \notin y.$$

Докажем второй пункт. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$
($\Leftarrow$) следует из пункта 1 этой теоремы и пункта 2 Леммы о L-полной теории.
($\Rightarrow$) Пусть $A \notin L$, тогда $\{\neg A\} \cup L$ непротиворечиво и существует L-полная теория x, содержащая $\neg A$, тогда x является точкой в M_L и по первому пункту $M_L, x \not\models A$.
Что и требовалось доказать. :-)

Теорема о полноте для K

Итак, мы доказали

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Теорема о полноте для K

Итак, мы доказали

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Теперь докажем

Теорема (о полноте K)

Логика K полна по Крипке.

Теорема о полноте для K

Итак, мы доказали

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Теперь докажем

Теорема (о полноте K)

Логика K полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $A \notin K$, тогда по пункту 2 теоремы о канонической модели $M_{\mathsf{K}} \not\models A$. Следовательно, $F_{\mathsf{K}} \not\models A$.

Теорема о полноте для K

Итак, мы доказали

Теорема (о канонической модели)

Для модальной логики L и ее канонической модели $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ верно:

1. $M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x$;
2. $M_L \models A \Leftrightarrow A \in L$

Теперь докажем

Теорема (о полноте K)

Логика K полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $A \notin K$, тогда по пункту 2 теоремы о канонической модели $M_{\mathsf{K}} \not\models A$. Следовательно, $F_{\mathsf{K}} \not\models A$.
Значит, если $\mathcal{C}$ — класс всех шкал Крипке, то $Log(\mathcal{C}) \subseteq \mathsf{K}$.
По теореме о корректности $\mathsf{K} \subseteq Log(\mathcal{C})$. $\square$

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.
По определению

$$xR_{\mathsf{T}}x \iff \forall A \,(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)\,.$$

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.
По определению

$$xR_{\mathsf{T}}x \iff \forall A \, (\Box A \in x \Rightarrow A \in x)\,.$$

Пусть $\Box A \in x$.

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.
По определению

$$xR_{\mathsf{T}}x \iff \forall A\,(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)\,.$$

Пусть $\Box A \in x$. x — T-полная теория,

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.
По определению

$$xR_{\mathsf{T}}x \iff \forall A\,(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)\,.$$

Пусть $\Box A \in x$. x — T-полная теория,
$\Rightarrow \mathsf{T} \subseteq x$

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.
По определению

$$xR_{\mathsf{T}}x \iff \forall A\,(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)\,.$$

Пусть $\Box A \in x$. x — T-полная теория,
$\Rightarrow \mathsf{T} \subseteq x$
$\Rightarrow \Box A \to A \in x$ (это аксиома после применения правила Sub)

Полнота логики T

Теорема

Логика $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$ полна по Крипке.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс рефлексивных шкал.
Мы знаем, что $\mathsf{T} \subseteq Log(\mathcal{C})$.
Пусть $A \notin \mathsf{T}$. По теорем о канонической модели $M_{\mathsf{T}} \not\models A$, значит $F_{\mathsf{T}} \not\models A$.
Но если окажется, что $F_{\mathsf{T}} \notin \mathcal{C}$, то нам это не поможет.
Покажем, что R_{T} — рефлективно.
По определению

$$xR_{\mathsf{T}}x \iff \forall A\,(\Box A \in x \Rightarrow A \in x)\,.$$

Пусть $\Box A \in x$. x — T-полная теория,
$\Rightarrow \mathsf{T} \subseteq x$
$\Rightarrow \Box A \to A \in x$ (это аксиома после применения правила Sub)
$\Rightarrow A \in x$.

$\Box$

Канонические логики

Ключевым свойством является следующее

Логика L называется канонической, если $F_L \models L$.

Формула A называется канонической, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Канонические логики

Ключевым свойством является следующее

Логика L называется канонической, если $F_L \models L$.

Формула A называется канонической, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Теорема

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

Канонические логики

Ключевым свойством является следующее

Логика L называется **канонической**, если $F_L \models L$.

Формула A называется **канонической**, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Теорема

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Доказательство.

По теореме о канонической модели $M_L \models A$.

Канонические логики

Ключевым свойством является следующее

Логика L называется **канонической**, если $F_L \models L$.

Формула A называется **канонической**, если $F_L \models A$ при условии, что $A \in L$.

Теорема

Всякая каноническая логика полна по Крипке.

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Доказательство.

По теореме о канонической модели $M_L \models A$.
Так как в A нет переменных, то ее истинность не зависит от оценки, значит $F_L \models A$. □

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

Предложение

Для $A \in \{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ верно, что

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Т.е. все эти формулы каноничны.

Канонические логики 2

Лемма

Пусть A — замкнутая формула (т.е. без пропозициональных переменных) и L — модальная логика, тогда

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Следствие

Любая логика, аксиоматизированная замкнутыми формулами каноническая, и следовательно полная.

Предложение

Для $A \in \{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ верно, что

$$A \in L \Rightarrow F_L \models A.$$

Т.е. все эти формулы каноничны.

Теорема

Если логика L аксиоматизирована замкнутами формулами или формулами из предыдущего предложения, то L — канонична, а значит полна по Крипке.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.

Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in x\}$$

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.

Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in x\}$$

По определению R

$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \;\&\; \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.

Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.

Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in x\}$$

По определению R

$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \,\&\, \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

Пусть $A \in \Gamma_x$, тогда $\Box A \in x$, но по Лемме о полной теории п.2, все формулы логики L тоже содержатся в x, в том числе формула $\Box A \to \Box\Box A$, как результат применения правила (Sub) к $A4$. В то же время, т.к. x — полная теория, то она замкнута относительно правила Modus Ponens.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Формулу AT мы уже проверили. Проверим формулу $A4$. Для этого надо проверить, что каноническая шкала транзитивна.
Пусть $F_L = (W, R)$ — каноническая шкала логики L и $A4 \in L$. Пусть xRy и yRz, докажем, что xRz.
Для произвольного $t \in W$ определим множества:

$$\Gamma_t = \{A \,|\, \Box A \in x\}$$

По определению R

$$xRy \iff \Gamma_x \subseteq y$$

Таким образом надо доказать, что

$$\Gamma_x \subseteq y \;\&\; \Gamma_y \subseteq z \Rightarrow \Gamma_x \subseteq z.$$

Пусть $A \in \Gamma_x$, тогда $\Box A \in x$, но по Лемме о полной теории п.2, все формулы логики L тоже содержатся в x, в том числе формула $\Box A \to \Box\Box A$, как результат применения правила (Sub) к $A4$. В то же время, т.к. x — полная теория, то она замкнута относительно правила Modus Ponens.
Тогда,

$$\Box\Box A \in x \Rightarrow \Box A \in y \Rightarrow A \in \Gamma_y \subseteq z.$$

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Проверим теперь формулу $A2$.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \ldots B_n$ и $C_1, \ldots C_m$ т.ч.

$$B_1, \ldots B_n, C_1, \ldots C_m \rhd_L \perp \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \perp \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box \left(\bigwedge B_i \right) \to \Box \left(\neg \bigwedge C_j \right).$$

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \dots B_n$ и $C_1, \dots C_m$ т.ч.

$$B_1, \dots B_n, C_1, \dots C_m \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box \left(\bigwedge B_i \right) \to \Box \left(\neg \bigwedge C_j \right).$$

Заметим, что $\Box \bigwedge B_i \in y$ и, значит (по MP), $\Box \neg \bigwedge C_j \in y$. Аналогично, $\Box \bigwedge C_i \in z$.
Из этого следует, что

$$x \models \Diamond \Box \bigwedge C_j \;\&\; x \models \Diamond \Box \neg \bigwedge C_j \Rightarrow x \models \Diamond \Box \bigwedge C_j \wedge \Diamond \Box \neg \bigwedge C_j.$$

Док-во предложения о каноничности

Доказательство.

Проверим теперь формулу $A2$.
Пусть $A2 \in L$ и в $F_L = (W, R)$ xRy и xRz.
Надо найти t, такую что yRt и zRt. Достаточно показать, что множество $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечиво.
Т.к. тогда найдется полная теория t, достижимая и из y и из z.
Пусть $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ противоречиво, тогда по компактности (см. Лемма о компактности) найдутся $B_1, \dots B_n$ и $C_1, \dots C_m$ т.ч.

$$B_1, \dots B_n, C_1, \dots C_m \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i, \bigwedge C_j \rhd_L \bot \Rightarrow \bigwedge B_i \rhd_L \neg \bigwedge C_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L \vdash \bigwedge B_i \to \neg \bigwedge C_j \Rightarrow L \vdash \Box \left(\bigwedge B_i \right) \to \Box \left(\neg \bigwedge C_j \right).$$

Заметим, что $\Box \bigwedge B_i \in y$ и, значит (по MP), $\Box \neg \bigwedge C_j \in y$. Аналогично, $\Box \bigwedge C_i \in z$.
Из этого следует, что

$$x \models \Diamond \Box \bigwedge C_j \ \& \ x \models \Diamond \Box \neg \bigwedge C_j \Rightarrow x \models \Diamond \Box \bigwedge C_j \wedge \Diamond \Box \neg \bigwedge C_j.$$

Таким образом в x истинен подстановочный вариант отрицания формулы $A2$. Пришли к противоречию, значит $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ непротиворечива и существует требуемая точка t. $\Box$

Полнота канонических логик

Следствие

Если логика L аксиоматизирована замкнутыми формулами или формулами из предыдущего предложения, то L — канонична, а значит полна по Крипке.

Полнота канонических логик

Следствие

Если логика L аксиоматизирована замкнутыми формулами или формулами из предыдущего предложения, то L — канонична, а значит полна по Крипке.

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$

Полнота канонических логик

Следствие

Если логика L аксиоматизирована замкнутыми формулами или формулами из предыдущего предложения, то L — канонична, а значит полна по Крипке.

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ Все следующие логики каноничны и полны по Крипке

$$\begin{array}{rclcrcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT, & \quad & \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4, \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top, & & \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4, \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB, & & \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT, \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB, & & & &
\end{array}$$

Полнота канонических логик

Следствие

Если логика L аксиоматизирована замкнутыми формулами или формулами из предыдущего предложения, то L — канонична, а значит полна по Крипке.

$\{AT, A4, AB, A5, Alt_n, A2\}$ Все следующие логики каноничны и полны по Крипке

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\mathsf{T} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AT, & \mathsf{K4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + A4, \\
\mathsf{D} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + \Diamond\top, & \mathsf{D4} & \rightleftharpoons & \mathsf{D} + A4, \\
\mathsf{KB} & \rightleftharpoons & \mathsf{K} + AB, & \mathsf{S4} & \rightleftharpoons & \mathsf{K4} + AT, \\
\mathsf{S5} & \rightleftharpoons & \mathsf{S4} + AB, & & &
\end{array}
$$

Но не все логики каноничны.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Предложение

Формула $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ не является канонической.

Исключение из каноничности

Рассмотрим формулу $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Она отражает теорему Лёба (формула названа в его честь), если понимать $\Box$, как оператор доказуемости в арифметике.

Предложение

Формула $AL = \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ не является канонической.

Предложение

Формула Мак-Кинси $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ тоже не является канонической.

Связь модальной и классической логик

Шкала $F = (W, R)$ по сути структура 1-порядка с одним двухместным предикатом.

Связь модальной и классической логик

Шкала $F = (W, R)$ по сути структура 1-порядка с одним двухместным предикатом.
Все формулы, которые мы рассматривали, кроме AL соответствовали (их общезначимость) формулам 1-ого порядка на первопорядковой структуре (W, R).

Связь модальной и классической логик

Шкала $F = (W, R)$ по сути структура 1-порядка с одним двухместным предикатом.
Все формулы, которые мы рассматривали, кроме AL соответствовали (их общезначимость) формулам 1-ого порядка на первопорядковой структуре (W, R).

Модальная логика L называется элементарной, если существует одна замкнутая (без свободных переменных) формула α_L (можно считать, что конечное число формул, т.к. всегда можно взять конъюнкцию формул) в сигнатуре с одним предикатным символом, такая что для любой шкалы крипке F

$$F \models L \iff F \models_{1ord} \alpha_L.$$

Здесь $\models_{1ord}$ понимается, как истинность в смысле логики первого порядка, что корректно, т.к. T_L — замкнутая формула.

Связь модальной и классической логик

Шкала $F = (W, R)$ по сути структура 1-порядка с одним двухместным предикатом.
Все формулы, которые мы рассматривали, кроме AL соответствовали (их общезначимость) формулам 1-ого порядка на первопорядковой структуре (W, R).

Модальная логика L называется элементарной, если существует одна замкнутая (без свободных переменных) формула α_L (можно считать, что конечное число формул, т.к. всегда можно взять конъюнкцию формул) в сигнатуре с одним предикатным символом, такая что для любой шкалы крипке F

$$F \models L \iff F \models_{1ord} \alpha_L.$$

Здесь $\models_{1ord}$ понимается, как истинность в смысле логики первого порядка, что корректно, т.к. T_L — замкнутая формула.

Модальная логика L называется Δ-элементарной, если найдется быть может бесконечное множество замкнутых формул 1-ого порядка (теория) T_L такое, что для любой шкалы крипке F

$$F \models L \iff F \models_{1ord} T_L.$$

Связь модальной и классической логик

Шкала $F = (W, R)$ по сути структура 1-порядка с одним двухместным предикатом.
Все формулы, которые мы рассматривали, кроме AL соответствовали (их общезначимость) формулам 1-ого порядка на первопорядковой структуре (W, R).

Модальная логика L называется элементарной, если существует одна замкнутая (без свободных переменных) формула α_L (можно считать, что конечное число формул, т.к. всегда можно взять конъюнкцию формул) в сигнатуре с одним предикатным символом, такая что для любой шкалы крипке F

$$F \models L \iff F \models_{1ord} \alpha_L.$$

Здесь $\models_{1ord}$ понимается, как истинность в смысле логики первого порядка, что корректно, т.к. T_L — замкнутая формула.

Модальная логика L называется Δ-элементарной, если найдется быть может бесконечное множество замкнутых формул 1-ого порядка (теория) T_L такое, что для любой шкалы крипке F

$$F \models L \iff F \models_{1ord} T_L.$$

Логика $\mathsf{GL} = K + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ не является Δ-элементарной.

Перевод в логику 1ого порядка

Рассмотрим структуры 1-ого порядка такого вида:

$$(W, R, P_1, P_2, \ldots),$$

где R — двуместный предикат, а P_i — одноместный предикат ($i \in \mathbb{N}$), то по модальной формуле A можно построить формулу 1ого порядка $A^\sharp(x)$ с одной свободной переменной x, такую, что она сохраняет истинность в моделях (не в шкалах) Крипке. Давайте проделаем это. Будем определять $A^\sharp(x)$ по индукции:

$$
\begin{aligned}
(\bot)^\sharp(x) &= \bot;\\
(p_i)^\sharp(x) &= P_i(x);\\
(A \to B)^\sharp(x) &= A^\sharp(x) \to B^\sharp(x);\\
(\Box A)^\sharp(x) &= \forall y(R(x,y) \to A^\sharp(y)).
\end{aligned}
$$

Лемма о стандартном переводе

Лемма

Пусть $M = (W, R, V)$ — шкала крипке. Определим модель логики предикатов $\mathcal{M} = (W, R, P_1, P_2, \ldots)$, так что $P_i(w) = 1$ (истинно) тогда и только тогда, когда $w \in V(p_i)$. Тогда для любого $w \in W$ и любой модальной формулы A

$$M, w \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} A^\sharp(w);$$

$$M \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x).$$

Лемма о стандартном переводе

Лемма

Пусть $M = (W, R, V)$ — шкала крипке. Определим модель логики предикатов $\mathcal{M} = (W, R, P_1, P_2, \ldots)$, так что $P_i(w) = 1$ (истинно) тогда и только тогда, когда $w \in V(p_i)$. Тогда для любого $w \in W$ и любой модальной формулы A

$$M, w \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} A^\sharp(w);$$

$$M \models A \iff \mathcal{M} \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x).$$

Чтобы записать общезначимость в шкале пришлось бы записать формулу 2-ого порядка вида

$$\forall P_1 \ldots \forall P_k \forall x A^\sharp(x).$$

При условии, что формула A использует только переменные $p_1, \ldots, p_k$.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следует из компактности логики первого порядка.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следует из компактности логики первого порядка.

Теорема (о понижении мощности)

Если множество формул Γ выполнимо, то оно выполнимо на не более, чем счетной модели Крипке.

Следствия стандартного перевода

Модальная формула A называется **выполнимой**, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M \exists x M, x \models A$. Множество формул Γ — выполнимо, если $\exists M \exists x M, x \models \Gamma$.

Теорема (о компактности)

Множество формул Γ выполнимо тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ выполнимо.

Следует из компактности логики первого порядка.

Теорема (о понижении мощности)

Если множество формул Γ выполнимо, то оно выполнимо на не более, чем счетной модели Крипке.

Следует из аналогичной теоремы (Левенгейма-Сколема) для логики первого порядка.

Об элементарности логики $Log(A)$

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Об элементарности логики $Log(A)$

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Об элементарности логики $Log(A)$

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Пусть $\varphi = \bigwedge S_0$. Покажем, что $Var(A)$ задается формулой φ.

$$Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\} \subseteq \{F \mid F \models_{1ord} S_0\} = \{F \mid F \models_{1ord} \varphi\}$$

Об элементарности логики $Log(A)$

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)\right).$$

Пусть $\varphi = \bigwedge S_0$. Покажем, что $Var(A)$ задается формулой φ.

$$Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\} \subseteq \{F \mid F \models_{1ord} S_0\} = \{F \mid F \models_{1ord} \varphi\}$$

Докажем обратное включение. Мы знаем, что $\varphi \models_{1ord} \forall x A^\sharp(x)$. Пусть нашлась шкала F, т.ч. $F \models_{1ord} \varphi$ и $F \not\models A$.

Об элементарности логики $Log(A)$

Теорема (van Benthem'1979)

Пусть A — модальная формула и $Var(A)$ — Δ-элементарный класс, тогда $Var(A)$ — элементарный класс.

Доказательство.

Пусть S, т.ч. $Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\}$.

$$A \in Log(Var(A)) \Rightarrow S \models_{1ord} \forall x A^{\sharp}(x) \Rightarrow \exists(\text{конечное}) S_0 \subset S \left(S_0 \models_{1ord} \forall x A^{\sharp}(x)\right).$$

Пусть $\varphi = \bigwedge S_0$. Покажем, что $Var(A)$ задается формулой φ.

$$Var(A) = \{F \mid F \models_{1ord} S\} \subseteq \{F \mid F \models_{1ord} S_0\} = \{F \mid F \models_{1ord} \varphi\}$$

Докажем обратное включение. Мы знаем, что $\varphi \models_{1ord} \forall x A^{\sharp}(x)$. Пусть нашлась шкала F, т.ч. $F \models_{1ord} \varphi$ и $F \not\models A$. Найдется модель M и u, т.ч. $M \not\models_{1ord} A^{\sharp}(u)$. Но $M \models_{1ord} \varphi$. Это противоречит тому, что $\varphi \models_{1ord} \forall x A^{\sharp}(x)$. □