

**Программа курсовой работы**  
**«Элементарные асимптотические методы» по учебной дисциплине**  
**«Математический анализ»**  
**(подготовка бакалавра)**

Утверждена  
Академическим советом ОП  
Протокол № от \_\_. \_\_. 2022

Разработчик	Лебедев Владимир Владимирович, д. ф.-м н, профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ v_lebedev@hse.ru
Число кредитов	
Контактная работа (час.)	
Самостоятельная работа (час.)	
Курс, Образовательная программа	1 Прикладная математика
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

### 1. Цели и результаты работы; пререквизиты

Целями курсовой работы по дисциплине Математический анализ являются:

- Ознакомление студентов с некоторыми асимптотическими методами исследования поведения функций, несобственных интегралов и корней уравнений.
- Формирование практических навыков применения асимптотических методов.

В результате выполнения курсовой работы студент должен:

**Знать:**

- основные положения и теоремы дифференциального и интегрального исчисления;
- основные теоремы, связанные с асимптотическими разложениями.

**Уметь:**

- формулировать задачи, решение которых связано с применением асимптотических методов;
- исследовать асимптотическое поведение функций, в том числе функций, заданных в виде интегралов, исследовать асимптотическое поведение корней уравнений.

**Владеть:**

- навыками использования методов асимптотического анализа при решении теоретических и прикладных задач.

Настоящая курсовая работа является частью программы изучения дисциплины «Математический анализ», которая относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих базовую подготовку.

Выполнение данной курсовой работы базируется на знании материала, излагаемого в курсе «Математический анализ» в 1-4 модулях 1-ого года обучения.

Знания и практические навыки, полученные при выполнении курсовой работы, используются в дальнейшем при изучении всех дисциплин математического и естественнонаучного цикла, а также в профессиональном цикле.

## 2. Содержание работы

Курсовая работа содержит задачи следующих типов:

- Асимптотические представления для суперпозиций элементарных функций.
- Асимптотики корней уравнений.
- Асимптотические представления остатков сходящихся несобственных интегралов и частичных интегралов расходящихся несобственных интегралов.

## 3. Оценивание

При проверке курсовой оценивается умение студента практически использовать асимптотические методы для решения конкретных задач анализа.

На защите курсовой (экзамене) проверяется, насколько студент владеет теоретическими основами асимптотических методов, знает разложения основных элементарных функций и, в первую очередь, проверяется самостоятельность выполнения студентом курсовой работы: с этой целью студент на экзамене получает несколько устных вопросов по тексту представленной работы. Билеты не предусмотрены.

Экзамен по курсовой работе состоит из двух частей: 1) проверка всех задач курсовой работы; 2) проверка владения студентом необходимой теорией. Каждая задача курсовой работы оценивается по 10-балльной шкале. Оценка за работу Ораб равна среднему арифметическому оценок по каждому заданию.

Результирующая оценка Орез формируется следующим образом:

$$\text{Орез} = 0,7 \text{ Ораб} + 0,3 \text{ Отеор},$$

где Отеор --- оценка знания теории. Способ округления оценок на всех этапах контроля --- в пользу студента.

## 4. Примеры оценочных средств

### Примерный вариант курсовой работы

1. Написать асимптотическую формулу для функции

$$f(x) = \ln \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x} \right)$$

при  $x \rightarrow 0$ , причем в ответе должно быть не менее двух членов, не считая остатка.

2. Написать асимптотическую формулу для функции

$$f(x) = \left( \frac{x}{x+1} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$$

при  $x \rightarrow \infty$ , причем в ответе должно быть не менее двух членов, не считая остатка.

3. Используя формулу Тейлора, найти асимптотику корней уравнения

$$\sin x = \frac{x+2}{x+1},$$

причем в ответе должно быть не менее двух членов асимптотики, не считая остатка.

4. Написать асимптотическое представление функции

$$F(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos \sqrt{t}}{t^2} dt, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Требуется записать два члена асимптотической формулы. Рекомендуется использовать интегрирование по частям.

5. Написать асимптотическое представление функции

$$F(x) = \int_x^1 \frac{e^{\operatorname{arcsin} t}}{t} dt, \quad x \rightarrow +0.$$

Асимптотическое представление должно быть доведено до члена, являющегося бесконечно малой функцией. При решении рекомендуется использовать формулу Тейлора.

### Примеры вопросов на экзамене

1. Объясните смысл записей  $f(x) = o(g(x))$ ,  $f(x) = O(g(x))$ ,  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow a, \infty$ ).
2. Запишите асимптотические соотношения для функций  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  при  $x \rightarrow 0$ .
3. Определите многочлен Тейлора, запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, с остаточным членом в форме Лагранжа.
4. Запишите многочлены Тейлора пятой степени с центром в нуле для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcsin} x$ .
5. Дайте определение несобственных интегралов по бесконечному и конечному промежутку. Расскажите о сходимости интегралов Дирихле.
6. Сформулируйте критерий сходимости и теоремы сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Приведите примеры.
7. Определите абсолютную и условную сходимость несобственных интегралов. Опишите

характер сходимости интеграла  $F(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$  в зависимости от параметра  $a$ .

## 5. Этапы и сроки выполнения работы

Последняя неделя января: выдача заданий, прикрепление студентов к руководителям.  
Первая неделя после майских праздников 10 мая -- 16 мая: сдача выполненной работы руководителю.  
Конец мая: защита работы (экзамен).

## 6. Ресурсы

### 6.1. Рекомендуемая основная литература:

[1] Деменко В.Н., Исмагилов Р.С., Федотов А.Г. Элементарные асимптотические методы. Методические указания к курсовой работе. Москва: МИЭМ НИУ ВШЭ, 2013 (электронная версия размещена на сайте ОП)

### 6.2. Рекомендуемая дополнительная литература:

[2] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3 томах)*, 8-е изд., М.: Физматлит, 2006. [Доступна электронная версия]

6.3. Программное обеспечение не предусмотрено.

6.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы) не предусмотрены.

6.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины не предусмотрено.

## 7. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

7.1. для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

7.2. для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

7.3. для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

## 8. Дополнительные сведения

Дополнительные сведения отсутствуют