λ-исчисление
и
Соответствие Карри – Говарда

Глеб Красилич

НИУ ВШЭ

23 сентября 2022

λ-исчисление

- Зафиксируем алфавит формальных переменных $Var = \{x, y, z, \dots\}$

λ-исчисление

- Зафиксируем алфавит формальных переменных $Var = \{x, y, z, \dots\}$
- Пусть Λ' – множество слов, такое что

λ-исчисление

- Зафиксируем алфавит формальных переменных $Var = \{x, y, z, \dots\}$
- Пусть Λ' – множество слов, такое что
  1. $Var \subset \Lambda'$.

λ-исчисление

- Зафиксируем алфавит формальных переменных $Var = \{x, y, z, \dots\}$
- Пусть Λ' – множество слов, такое что
  1. $Var \subset \Lambda'$.
  2. Если $M, N \in \Lambda'$, то $(MN) \in \Lambda'$.

λ-исчисление

- Зафиксируем алфавит формальных переменных $Var = \{x, y, z, \dots\}$
- Пусть Λ' – множество слов, такое что
  1. $Var \subset \Lambda'$.
  2. Если $M, N \in \Lambda'$, то $(MN) \in \Lambda'$.
  3. Если $M \in \Lambda'$ и $x \in Var$, то $(\lambda x.M) \in \Lambda'$.

λ-исчисление

- Зафиксируем алфавит формальных переменных $Var = \{x, y, z, \dots\}$
- Пусть Λ' – множество слов, такое что
  1. $Var \subset \Lambda'$.
  2. Если $M, N \in \Lambda'$, то $(MN) \in \Lambda'$.
  3. Если $M \in \Lambda'$ и $x \in Var$, то $(\lambda x.M) \in \Lambda'$.
- Язык λ-исчисления Λ – это наименьшее из всех множеств Λ' $(\Lambda = \bigcap \Lambda')$.

Примеры λ-термов

Примеры λ-термов

- x

Примеры λ-термов

- x
- xx и xy

Примеры λ-термов

- x
- xx и xy
- $(\lambda x.x)y$

λ-исчисление как формальная система переписывания термов

1. Свободные переменные термов:
   - $FV(x) = \{x\}$
   - $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$
   - $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$

λ-исчисление как формальная система переписывания термов

1. Свободные переменные термов:
   - $FV(x) = \{x\}$
   - $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$
   - $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$
2. α-конверсия: $\ldots \lambda x.M \cdots \leftrightarrow_\alpha \ldots \lambda y.M[y/x] \ldots$
   - $\lambda x.xz \leftrightarrow_\alpha \lambda y.yz$

λ-исчисление как формальная система переписывания термов

1. Свободные переменные термов:
   - $FV(x) = \{x\}$
   - $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$
   - $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$
2. α-конверсия: $\ldots \lambda x.M \cdots \leftrightarrow_\alpha \ldots \lambda y.M[y/x] \ldots$
   - $\lambda x.xz \leftrightarrow_\alpha \lambda y.yz$
3. β-редукция: $\ldots (\lambda x.M)N \cdots \to_\beta \ldots M[N/x] \ldots$
   - $(\lambda x.x)y \to_\beta y$
   - $z((\lambda x.xx)y) \to_\beta z(yy)$.

Нормализуемость

1. λ-терм находится в нормальной форме если в нём нет β-редаксов

Нормализуемость

1. λ-терм находится в нормальной форме если в нём нет β-редаксов
2. λ-терм называется слабо-нормализуемым, если существует последовательность β-редукций, приводящая его к нормальной форме.
   - $(\lambda x.y)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))$

Нормализуемость

1. λ-терм находится в нормальной форме если в нём нет β-редаксов
2. λ-терм называется слабо-нормализуемым, если существует последовательность β-редукций, приводящая его к нормальной форме.
   - $(\lambda x.y)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))$
3. λ-терм называется сильно-нормализуемым, если любая последовательность β-редукций приводит его к нормальной форме.
   - $(\lambda x.y)o$ и $(\lambda x.y)((\lambda x.x)z)$

Нормализуемость

1. λ-терм находится в нормальной форме если в нём нет β-редаксов
2. λ-терм называется слабо-нормализуемым, если существует последовательность β-редукций, приводящая его к нормальной форме.
   - $(\lambda x.y)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))$
3. λ-терм называется сильно-нормализуемым, если любая последовательность β-редукций приводит его к нормальной форме.
   - $(\lambda x.y)o$ и $(\lambda x.y)((\lambda x.x)z)$
4. Как уже заметили, бывает и не слабо-нормализуемые термы.

Конфлюэнтность

Свойство Чёрча-Россера

Пусть λ-термы M, M', M'' таковы, что $M \to_\beta^* M'$ и $M \to_\beta^* M''$. Тогда существует такой терм N, что $M' \to_\beta^* N$ и $M'' \to_\beta^* N$.

λ-исчисление и вычислимые функции

1. Нумералы Чёрча:
   - $0 = \lambda f.\lambda x.x$
   - $1 = \lambda f.\lambda x.(fx)$
   - $n = \lambda f.\lambda x.(f^n x)$.

λ-исчисление и вычислимые функции

1. Нумералы Чёрча:
   - $0 = \lambda f.\lambda x.x$
   - $1 = \lambda f.\lambda x.(fx)$
   - $n = \lambda f.\lambda x.(f^n x)$.
2. Арифметические функции:
   - $succ = \lambda n.\lambda f.\lambda x.(nf)x$
   - $plus = \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(mf)((nf)x)$

λ-исчисление и вычислимые функции

1. Нумералы Чёрча:
   - $0 = \lambda f.\lambda x.x$
   - $1 = \lambda f.\lambda x.(fx)$
   - $n = \lambda f.\lambda x.(f^n x)$.
2. Арифметические функции:
   - $succ = \lambda n.\lambda f.\lambda x.(nf)x$
   - $plus = \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(mf)((nf)x)$
3. Всякая примитивно-рекурсивная функция выразима как λ-терм.

λ-исчисление и вычислимые функции

1. Нумералы Чёрча:
   - $0 = \lambda f.\lambda x.x$
   - $1 = \lambda f.\lambda x.(fx)$
   - $n = \lambda f.\lambda x.(f^n x)$.
2. Арифметические функции:
   - $succ = \lambda n.\lambda f.\lambda x.(nf)x$
   - $plus = \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(mf)((nf)x)$
3. Всякая примитивно-рекурсивная функция выразима как λ-терм.
4. Всякая частично-рекурсивная функция выразима как λ-терм.
   - $Y = \lambda f.((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$
   - $Yg =_\beta g(Yg)$

Классификация термов

1. Отличать бессмысленные термы от осмысленных: $\lambda x.\lambda y.x$ от xx.
2. Сильно-, слабо-, и не нормализуемые термы.
3. Частичные и тотальные функции.

Типизация

1. Рассмотрим интуиционистскую логику высказываний в языке $(\wedge, \vee, \rightarrow, \bot)$

Типизация

1. Рассмотрим интуиционистскую логику высказываний в языке $(\wedge, \vee, \to, \bot)$
2. Язык типов – язык имликативного фрагмента IPC.

Типизация

1. Рассмотрим интуиционистскую логику высказываний в языке $(\wedge, \vee, \rightarrow, \bot)$
2. Язык типов – язык имликативного фрагмента *IPC*.
3. Правила типизации:
   1. (Var) $\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$
   2. (Abs) $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda(x : \sigma).M) : \sigma \rightarrow \tau}$
   3. (App) $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau}$

Свойтсва типизируемых термов

Сохранение типа при β-редукции

В типизации по Черчу для любых термов M и N, если $M \to_\beta^* N$ и выводимо суждение $\Gamma \vdash M : \sigma$ для некоторого типа σ, то выводимо и суждение $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Свойтсва типизируемых термов

Сохранение типа при β-редукции

В типизации по Черчу для любых термов M и N, если $M \to_{\beta}^{*} N$ и выводимо суждение $\Gamma \vdash M : \sigma$ для некоторого типа σ, то выводимо и суждение $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Сильная нормализуемость типизируемых термов

Пусть в типизации по Черчу для некоторого терма M и типа σ выводится суждение $\Gamma \vdash M : \sigma$. Тогда M является сильно нормализуемым.

Исчисление естественного вывода для *IPC*

1. $\Gamma, \phi \vdash \phi \ (Ax)$
2. $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi} \ (\to I)$
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \ (\to E)$
4. $\dfrac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \ (\wedge I)$
5. $\dfrac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \ \dfrac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \ (\wedge E)$
6. $\dfrac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \ \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \ (\vee I)$
7. $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \gamma \quad \Gamma, \psi \vdash \gamma \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi}{\Gamma \vdash \gamma} \ (\vee E)$
8. $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi} \ (\bot E)$

Соответсвие Карри – Говарда

Соответствие Карри – Говарда

1. Если суждение $\Gamma \vdash M : \phi$ выводимо в $\lambda_{\to}$, то суждение $rg(\Gamma) \vdash \phi$ выводимо в $IPC(\to)$.
2. Если суждение $\Delta \vdash \phi$ выводимо в $IPC(\to)$, то суждение $\Gamma \vdash M : \phi$ выводится в $\lambda_{\to}$ для некоторого терма M и контекста Γ такого, что $rg(\Gamma) = \Delta$.

Соответсвие Карри – Говарда

Соответствие Карри – Говарда

1. Если суждение $\Gamma \vdash M : \phi$ выводимо в $\lambda_{\to}$, то суждение $rg(\Gamma) \vdash \phi$ выводимо в $IPC(\to)$.
2. Если суждение $\Delta \vdash \phi$ выводимо в $IPC(\to)$, то суждение $\Gamma \vdash M : \phi$ выводится в $\lambda_{\to}$ для некоторого терма M и контекста Γ такого, что $rg(\Gamma) = \Delta$.

Не существует комбинатора с типом $((A \to B) \to A) \to A$, так как пользуясь алгебраической или реляционной семантикой для интуиционистской логики можно доказать, что закон Пирса не является теоремой IPC.

Соответсвие Карри – Говарда

Соответствие Карри – Говарда

1. Если суждение $\Gamma \vdash M : \phi$ выводимо в $\lambda_{\to}$, то суждение $rg(\Gamma) \vdash \phi$ выводимо в $IPC(\to)$.
2. Если суждение $\Delta \vdash \phi$ выводимо в $IPC(\to)$, то суждение $\Gamma \vdash M : \phi$ выводится в $\lambda_{\to}$ для некоторого терма M и контекста Γ такого, что $rg(\Gamma) = \Delta$.

Не существует комбинатора с типом $((A \to B) \to A) \to A$, так как пользуясь алгебраической или реляционной семантикой для интуиционистской логики можно доказать, что закон Пирса не является теоремой IPC.
$((((A \to B) \to A) \to A) \to B) \to B$ является интуиционистской тавтологией, явно предъявим терм

$$\lambda x^{(((A\to B)\to A)\to A)\to B}.x(\lambda y^{(A\to B)\to A}.y(\lambda z^{A}.x(\lambda u^{(A\to B)\to A}.z)))$$