Π^0_1-сложность некоторых квантифицированных модальных логик

Агаджанян Ирина Араратовна

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Общие определения

$p, P, \bot, \to, \Box, \forall$

Общие определения

$p, P, \perp, \to, \Box, \forall$

$>, \neg, \vee, \wedge, \iff, \exists$ и $\Box$

Общие определения

$p, P, \bot, \to, \Box, \forall$

$>, \neg, \vee, \wedge, \iff, \exists$ и $\Box$

$\mathrm{md}\ \phi_1 = 0$, если ϕ_1 атомарная

$\mathrm{md}\ (\phi_1 \to \phi_2) = \max\{\mathrm{md}\ \phi_1, \mathrm{md}\ \phi_2\}$

$\mathrm{md}\ \forall x\ \phi_1 = \mathrm{md}\ \phi_1$

$\mathrm{md}\ \Box\phi_1 = \mathrm{md}\ \phi_1 + 1$

Общие определения

$p, P, \bot, \to, \Box, \forall$

$>, \neg, \vee, \wedge, \iff, \exists$ и $\Box$

$$\text{md } \phi_1 = 0, \text{ если } \phi_1 \text{ атомарная}$$
$$\text{md } (\phi_1 \to \phi_2) = \max\{\text{md } \phi_1, \text{md } \phi_2\}$$
$$\text{md } \forall x\ \phi_1 = \text{md } \phi_1$$
$$\text{md } \Box\phi_1 = \text{md } \phi_1 + 1$$

$\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$

$\{\phi \in L : \phi \text{ монадична}\}$

Шкалы

$\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ — шкала Крипке

$\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$ — предикатная шкала Крипке

Шкалы

$\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ — шкала Крипке

$\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$ — предикатная шкала Крипке

Для любых $\omega, \omega' \in W : \omega R \omega' \Longrightarrow D(\omega) \subseteq D(\omega')$

Шкалы

$\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ — шкала Крипке

$\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$ — предикатная шкала Крипке

Для любых $\omega, \omega' \in W : \omega R \omega' \Longrightarrow D(\omega) \subseteq D(\omega')$

$D^+ = \cup\{D_\omega : \omega \in W\}$

Шкалы

$\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ — шкала Крипке

$\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$ — предикатная шкала Крипке

Для любых $\omega, \omega' \in W : \omega R \omega' \Longrightarrow D(\omega) \subseteq D(\omega')$

$D^+ = \cup\{D_\omega : \omega \in W\}$

Для любых $\omega, \omega' \in W : \ \omega R \omega' \Rightarrow D(\omega) = D(\omega')$

Шкалы

Если $W \neq \varnothing,\ R \subseteq W \times W,\ W' \subseteq W \Rightarrow$:

1. $R^n = R \circ \dots \circ R,\ n \geq 1,\ R^0 = id$
2. $R^* = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} R^n$ — рефлексивно-транзитивное замыкание R
3. $R(w) = \{v \in W : \ \omega R v\}$

Модель

$\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$ — предикатная модель Крипке

Модель

$\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$ — предикатная модель Крипке

$g' \overset{x}{=} g$, если сопосотавления g и g' отличаются не более чем в переменной x.

Модель

$\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$ — предикатная модель Крипке

$g' \stackrel{x}{=} g$, если сопосотавления g и g' отличаются не более чем в переменной x.

1. $\mathcal{M}, \omega \not\models^g \bot$
2. $\mathcal{M}, \omega \models^g P(x_1, \ldots, x_n)$, если $\langle g(x_1), , g(x_n) \rangle \in P^{I,\omega}$
3. $\mathcal{M}, \omega \models^g \phi_1 \to \phi_2$, если $\mathfrak{M}, \omega \not\models^g \phi_1$ или $\mathfrak{M}, \omega \models^g \phi_2$
4. $\mathcal{M}, \omega \models \Box\phi_1$, если $\mathfrak{M}, \omega' \models^g \phi_1$ при условии $w' \in R(w)$
5. $\mathcal{M}, \omega \models^g \forall x \phi_1$, при условии, что $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_\omega$.

Еще немного определений

$\mathrm{ML}\mathfrak{C} = \{\phi : \mathfrak{C} \vDash \phi\}$

$\mathrm{ML}_c\mathfrak{C} = \{\phi : \mathbf{F} \vDash \phi, \mathbf{F}$ — предикатная шкала с постоянной областью над шкалой $\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}\}$

Еще немного определений

$\mathrm{ML}\mathfrak{C} = \{\phi : \mathfrak{C} \vDash \phi\}$

$\mathrm{ML}_c\mathfrak{C} = \{\phi : \mathbf{F} \vDash \phi, \mathbf{F}$ — предикатная шкала с постоянной областью над шкалой $\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}\}$

Дизъюнктивное объединение класса $\{\mathfrak{F} : j \in J\}$ (где J — непустое индексное множество шкал крипке, а $\mathfrak{F}_\mathrm{j} = \langle W_j, R_j \rangle$) — это шкала $\bigsqcup_{j \in J} \mathfrak{F}_\mathrm{j} = \langle W, R \rangle$, определенная следующими условиями:

- $W = \bigcup_{j \in J} (W_j \times \{j\})$
- $\langle w, j \rangle R \langle w', j' \rangle \iff j = j'$ и $\omega R_j \omega'$

Наблюдение 1

$\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$, $\omega \in W$, $a_1, \dots, a_n \in D_\omega$, $\phi(x_1, \dots, x_n)$,
$g : g(x_1) = a_1, \dots, g(x_n) = a_n$.

Тогда обозначим условие $\mathfrak{M}, \omega \vDash^g \phi(x_1, \dots, x_n)$, как
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \phi(a_1, \dots, a_n)$.

Наблюдение 2

Для любого класса $\{\mathfrak{F}_j : j \in J\}$ шкал

$$\mathrm{ML} \bigsqcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \bigcap \mathrm{ML}\mathfrak{F}_j .$$

Наблюдение 3

Пусть ϕ — модальная предикатная формула, $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ — шкала, $\omega_0 \in W$. Пусть $\mathfrak{F}_\phi$ — подшкала $\mathfrak{F}$ с множеством миров $\{R^n(\omega_0) : n \leq \mathrm{md}\phi\}$. Тогда

$$\mathfrak{F}_\phi, \omega_0 \models \phi \iff \mathfrak{F}, \omega_0 \models \phi.$$

План

1. Если $\mathfrak{C}$ рекурсивно перечислимый класс конечных шкал, тогда монадические фрагменты логик $\mathrm{ML}\mathfrak{C}$ и $\mathrm{ML}_c\mathfrak{C}$ лежат в Π^0_1.
2. Пусть L — одна из пропозициональных модальных логик: **K**, **T**, **D**, **K4**, **K4.3**, **S4**, **S4.3**, **GL**, **GL.3**, **Grz**, **Grz.3**, **KB**, **KTB**, **S5**. Тогда монадические фрагменты логик $\mathbf{Q}L_{\mathrm{wfin}}$ и $\mathbf{Q}L.\mathbf{bf}_{\mathrm{wfin}}$ являются Π^0_1-трудными.

Лемма

Lemma

Если монадическая модальная формула с n предикатными буквами опровергается на предикатной шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, D\rangle$ *с конечным* W, *тогда она опровергается на конечной предикатной шкале* $\overline{\mathfrak{F}} = \langle W, R, \overline{D}\rangle$ *с* $|\overline{D}^{+}| \leq 2^{|W|(n+1)}$.

Теорема 1

Теорема

Если $\mathfrak{F}$ конечная шкала, то монадические фрагменты логик $ML\mathfrak{F}$ и $ML_c\mathfrak{F}$ разрешимы.

Теорема 2

Теорема

Рассмотрим конечный класс $\mathfrak{C}$ конечных шкал, тогда монадические фрагменты логик $ML\mathfrak{C}$ и $ML_c\mathfrak{C}$ разрешимы.

$\star$ Заметим, что $\bigsqcup\limits_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ — конечно. Так как $\mathrm{ML}\mathfrak{C} = \mathrm{ML} \bigsqcup\limits_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, то по предыдущей теореме, разрешимая логика. $\star$

Теорема 3

Теорема

Рассмотрим разрешимый класс $\mathfrak{C}$ шкал, замкнутых относительно взятия подшкал и удовлетворяющих условию, что $\exists n \in \mathbf{N} : \ |R(\omega)| \leq n$ для $\langle W, R \rangle \in \mathfrak{C}, \ \omega \in W$. Тогда монадические фрагменты логик $ML\mathfrak{C}$ и $ML_c\mathfrak{C}$ разрешимы.

Теорема 4

Теорема

Если $\mathfrak{C}$ *— рекурсивно-перечислимый класс конечных шкал, тогда монадические фрагменты логик* $ML\mathfrak{C}$ *и* $ML_c\mathfrak{C}$ *лежат в* Π^0_1.

Еще немного определений

ϕ — модальная формула, L — модальная предикатная логика

L_{wfin} — логика класса конечных L-шкал (т.е. таких $\mathfrak{F}: \ \mathfrak{F} \models L$)

$L \oplus \phi$ — минимальная нормальная модальная логика, включающая $L \cup \{\phi\}$

$L.\mathbf{bf} = L \oplus \boldsymbol{bf}, \ \boldsymbol{bf} = \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$

Еще немного определений

ϕ — модальная формула, L — модальная предикатная логика

L_{wfin} — логика класса конечных L-шкал (т.е. таких $\mathfrak{F}: \ \mathfrak{F} \models L$)

$L \oplus \phi$ — минимальная нормальная модальная логика, включающая $L \cup \{\phi\}$

$L.\mathbf{bf} = L \oplus \boldsymbol{bf}$, $\boldsymbol{bf} = \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$

L — пропозициональная модальная логика $\Rightarrow \mathbf{Q}L$ — минимальное предикатное расширение логики L

Если $\mathfrak{F}$ — шкала и L — пропозициональная модальная логика, то $\mathfrak{F} \models L \iff \mathfrak{F} \models \mathbf{Q}L$

Теорема 5

Теорема

Пусть L — одна из пропозициональных модальных логик: $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{K4}$, $\boldsymbol{K4.3}$, $\boldsymbol{S4}$, $\boldsymbol{S4.3}$, $\boldsymbol{GL}$, $\boldsymbol{GL.3}$, $\boldsymbol{Grz}$, $\boldsymbol{Grz.3}$, $\boldsymbol{KB}$, $\boldsymbol{KTB}$, $\boldsymbol{S5}$. Тогда монадические фрагменты логик $\boldsymbol{Q}L_{wfin}$ и $\boldsymbol{Q}L.\boldsymbol{bf}_{wfin}$ являются Π^0_1-сложными.

⋆ Так как класс конечных L-шкал рекурсивно перечислим (а значит, перечислим и класс $\mathbf{Q}L$-шкал), то, воспользовавшись теоремой 4 получаем, что интересующие нас фрагменты лежат в Π^0_1. ⋆

Rybakov M., Shkatov D. Algorithmic properties of modal and superintuitionistic logics of monadic predicates over finite frames