PSPACE-трудность константного фрагмента логик на интервале $[\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$

Агаджанян Ирина Араратовна

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Машина Тьюринга

Машина Тьюринга состоит из управляющего устройства и потенциально бесконечной внешней памяти, структура которой не меняется со временем. У Машины так же есть программа, которая задает правила действия в каждый момент времени.
В каждой ячейке хранится буква заданного конечного алфавита. Так же на ленте есть одна или некоторое конечное число головок. (есть так же машины, у которых конечное количество лент с одной головкой на каждой ленте)

Машина Тьюринга

Что происходит за единицу времени?
Головка смотрит на конкретную ячейку, считывает элемент в ней, ищет подходящую строку в программе и выполняет предписанное действие.

Машина Тьюринга

Пример:

Программа:

$q_0 b\# \to q_0 b\# RN$

$q_0 0\# \to q_0 0\# RN$

$q_0 1\# \to q_0 1\# RN$

$q_0 e\# \to q_1 e\# LN$

$q_1 0\# \to q_1 00 LR$

$q_1 1\# \to q_1 11 LR$

$q_1 b\# \to q_2 b\# NN$

Машина Тьюринга

Время $T_M(input)$ - число шагов в вычислении машины Тьюринга M на входе $input$.
Зона, память $S_M(input)$ - это максимум по всем рабочим лентам количества использованных ячеек к моменту остановки машины M на входе $input$.

PSPACE

Класс PSPACE состоит из всех языков $L \subset \Sigma^*$, распознаваемых на машинах Тьюринга с полиномиальным ограничением на зону вычисления

Последние определения

Сведение по Карпу — это полиномиальное (по времени) преобразование одной задачи в другую. Обозначение: $\leqslant_m^p$.
То есть:
$L_1 \leqslant_m^p L_2$, если существует полиномиально вычислимая функция f, такая что $\forall x \ (x \in L_1 \iff f(x) \in L_2)$,
где L_1, L_2 являются задачами/языками.

Назовем задачу **трудной**, если к ней можно свести любую задачу класса.
А если она еще и лежит в этом классе, то она **полная**.

TQBF

Квантифицированной булевой формулой называется формула вида $Q_1x_1 \ldots Q_kx_k\phi$, где ϕ — булева формула, $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, а x_i — булевы переменные.

Уже доказали

- TQBF — PSPACE-полная.
- Пусть L — логика, такая что $\mathrm{K} \subseteq L \subseteq \mathrm{KTB}$. Тогда L — PSPACE-трудная задача.

Определение

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K} \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

$$\mathsf{Grz} = \mathsf{K} \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$$

$$\mathsf{wGrz} = \mathsf{K} \oplus \Box^{+}(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p,$$

Теорема

Пусть L — логика, такая что $\mathrm{K} \subseteq L \subseteq \mathrm{wGrz}$. *Тогда L —* PSPACE-*трудная задача*

Теорема

Пусть L — логика, такая что $\mathrm{K} \subseteq L \subseteq \mathrm{wGrz}$*. Тогда L —* PSPACE*-трудная задача*

Этап 1:

1. $A^1 = q_0 \wedge \neg q_1$
2. $A^2 = \bigwedge_{i=1}^{n}(q_i \to q_{i-1})$
3. $A^3 = \bigwedge_{\{i:Q_{i+1}=\exists\}}(q_i \wedge \neg q_{i+1} \to \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2}))$
4. $A^4 = \bigwedge_{\{i:Q_{i+1}=\forall\}}(q_i \wedge \neg q_{i+1} \to (\Diamond(q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2} \wedge p_{i+1}) \wedge \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2} \wedge \neg p_{i+1}))$
5. $A^5 = \bigwedge_{i=1}^{n}(q_i \to (p_i \to \Box(q_i \to p_i)) \wedge (\neg p_i \to \Box(q_i \wedge \neg q_{n+1} \to \neg p_i)))$
6. $A^6 = (q_n \wedge \neg q_{n+1} \to \Theta')$

Теорема

Пусть L — логика, такая что $\mathrm{K} \subseteq L \subseteq \mathrm{wGrz}$*. Тогда* L *—* PSPACE*-трудная задача*

Этап 2:

Лемма

Если $\Theta \in \mathrm{TQBF}$*, то* $f(\Theta)$ *—* wGrz*-выполнимая формула.*

Лемма

Если $f(\Theta)$ *—* K*-выполнимая, то* $\Theta \in \mathrm{TQBF}$

Определение

Если L — логика, то обозначим ее константный фрагмент, как $L(0)$.

Определение

Если L — логика, то обозначим ее константный фрагмент, как $L(0)$.

Уже знаем:

Лемма

$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)$ — wGrz-*выполнима.*

Определение

Если L — логика, то обозначим ее константный фрагмент, как $L(0)$.

Уже знаем:

Лемма

$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)$ — wGrz-*выполнима.*

Хотим доказать:

Теорема

wGrz(0) — PSPACE-*трудная.*

Основная идея:

научимся сводить каждую формулу из wGrz к формуле из wGrz, но без переменных.

Основная идея:
научимся сводить каждую формулу из wGrz к формуле из wGrz, но без переменных.

Но как?

$$\alpha_i = \Box(\Diamond^i\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{i+1}\Box\bot \to \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot))$$

$$\alpha_i = \Box(\Diamond^i\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{i+1}\Box\bot \rightarrow \Box(\Diamond\top \rightarrow \Diamond\Box\bot))$$

Теорема

Формула $f(\Theta)_\alpha$ строится по $f(\Theta)$ за полиномиальное время от длины $f(\Theta)$, причем верно, что

$$f(\Theta)_\alpha \text{ — wGrz-выполнима} \iff f(\Theta) \text{ — wGrz-выполнима.}$$

$$\alpha_i = \Box(\Diamond^i\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{i+1}\Box\bot \to \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot))$$

Теорема

Формула $f(\Theta)_\alpha$ строится по $f(\Theta)$ за полиномиальное время от длины $f(\Theta)$, причем верно, что

$$f(\Theta)_\alpha \text{ — wGrz-выполнима} \iff f(\Theta) \text{ — wGrz-выполнима.}$$

$(\Rightarrow)$

$$\alpha_i = \Box(\Diamond^i\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{i+1}\Box\bot \to \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot))$$

Теорема

Формула $f(\Theta)_\alpha$ строится по $f(\Theta)$ за полиномиальное время от длины $f(\Theta)$, причем верно, что

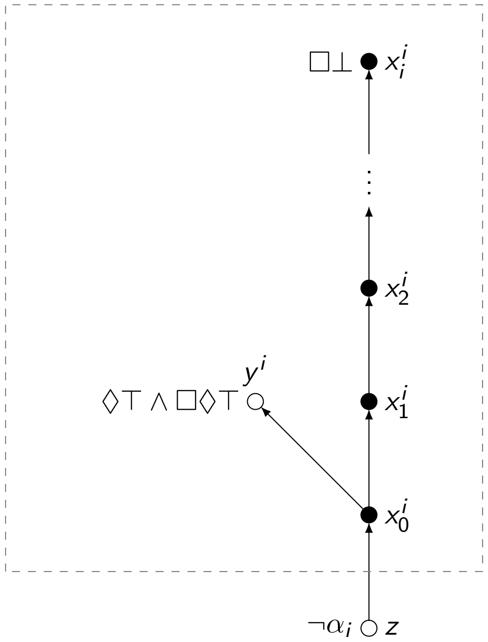
$$f(\Theta)_\alpha \text{ — wGrz-выполнима} \iff f(\Theta) \text{ — wGrz-выполнима.}$$

($\Leftarrow$)

Наша цель: по известной модели построить новую модель $\mathcal{M}^*$, в которой найдется мир, где будет истинна уже формула $f(\Theta)_\alpha$.

Когда α_i ложна в мире?

$$\alpha_i = \Box(\Diamond^i\Box\bot \wedge \neg\Diamond^{i+1}\Box\bot \to \Box(\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot))$$


$\Box\bot$
x_i^i
x_2^i
y^i
$\Diamond\top \wedge \Box\Diamond\top$
x_1^i
x_0^i
$\neg\alpha_i$
z

Построим необходимую шкалу $\mathcal{F}^*$

Построим необходимую шкалу $\mathcal{F}^* = \langle W^*,$

Построим необходимую шкалу $\mathcal{F}^* = \langle W^*, R^* \rangle$

1. $w_1, w_2 \in W$ и $w_1 R w_2 \Rightarrow w_1 R^* w_2$

Построим необходимую шкалу $\mathcal{F}^* = \langle W^*, R^* \rangle$

1. $w_1, w_2 \in W$ и $w_1 R w_2 \Rightarrow w_1 R^* w_2$
2. $w_1, w_2 \in W_i^w$ и $w_1 R_i^w w_2 \Rightarrow w_1 R^* w_2$

Построим необходимую шкалу $\mathcal{F}^* = \langle W^*, R^* \rangle$

1. $w_1, w_2 \in W$ и $w_1 R w_2 \Rightarrow w_1 R^* w_2$
2. $w_1, w_2 \in W_i^w$ и $w_1 R_i^w w_2 \Rightarrow w_1 R^* w_2$
3. $w_1 \in W,\ \mathcal{M}, w_1 \not\models p_i,\ w_2 = x_0^i \Rightarrow w_1 R^* w_2$

Лемма

Если Θ' — бескванторная булева формула, то:

$$(\mathcal{M}, w) \vDash \Theta' \iff (\mathcal{M}^*, w) \vDash \Theta'_\alpha$$

Вспомогательная часть кончилась, можно начинать доказательство

Знаем: в модели $\mathcal{M}$ существует мир x_0, в котором истинна $f(\Theta)$.
Цель: доказать, что $\exists w^* \in W^* \; ((\mathcal{M}^*, w^*) \vDash f(\Theta)_\alpha)$, где $f(\Theta)_\alpha = A^1_\alpha \wedge \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha \wedge \Box^{\leqslant n} A^3_\alpha \wedge \Box^{\leqslant n} A^4_\alpha \wedge \Box^{\leqslant n} A^5_\alpha \wedge \Box^n A^6_\alpha$.

Докажем, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models f(\Theta)_\alpha$. Для этого нужно доказать, что каждый из шести конъюнктивных членов истинен в мире x_0

По лемме:
$(\mathcal{M}, x_0) \models A^1 \Rightarrow (\mathcal{M}^*, x_0) \models A^1_\alpha$, так как $A^1 = q_0 \wedge \neg q_1$ — бескванторная булева формула.

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \models \Box^{\leq n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \models \Box^{\leq n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$

Пусть $(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} A^2_\alpha \Rightarrow$

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$
Пусть $(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} A^2_\alpha \Rightarrow$

$$(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} (\alpha_i \to \alpha_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\exists k((\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^k \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} \alpha_i \to \alpha_{i-1})) \Rightarrow$$

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \models \Box^{\leq n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$

Пусть $(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} A^2_\alpha \Rightarrow$

$$(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} (\alpha_i \to \alpha_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\exists k((\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^k \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} \alpha_i \to \alpha_{i-1})) \Rightarrow$$

существует, достижимый из x_0 за k шагов мир x_1, такой что в нем ложно $\bigwedge_{i=n+2}^{2n+2}(\alpha_i \to \alpha_{i-1})$.

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \models \Box^{\leq n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$
Пусть $(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} A^2_\alpha \Rightarrow$

$$(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} (\alpha_i \to \alpha_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\exists k((\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{k} \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} \alpha_i \to \alpha_{i-1})) \Rightarrow$$

существует, достижимый из x_0 за k шагов мир x_1, такой что в нем ложно $\bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} (\alpha_i \to \alpha_{i-1})$.
$\exists j \in \{n+2, \dots, 2n+2\}\ (\mathcal{M}^*, x_1) \not\models (\alpha_j \to \alpha_{j-1})$.

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \models \Box^{\leq n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \models \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$
Пусть $(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} A^2_\alpha \Rightarrow$

$$(\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^{\leq n} \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} (\alpha_i \to \alpha_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\exists k((\mathcal{M}^*, x_0) \not\models \Box^k \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} \alpha_i \to \alpha_{i-1})) \Rightarrow$$

существует, достижимый из x_0 за k шагов мир x_1, такой что в нем ложно $\bigwedge_{i=n+2}^{2n+2}(\alpha_i \to \alpha_{i-1})$.
$\exists j \in \{n+2, \ldots, 2n+2\}\ (\mathcal{M}^*, x_1) \not\models (\alpha_j \to \alpha_{j-1})$.
Значит, $(\mathcal{M}^*, x_1) \models \alpha_j$ и $(\mathcal{M}^*, x_1) \not\models \alpha_{j-1}$. Из этого следует, что $(\mathcal{M}, x_1) \models q_{j-n-1}$ и $(\mathcal{M}, x_1) \not\models q_{j-n-2}$.

Знаем, что $(\mathcal{M}, x_0) \vDash \Box^{\leq n} A^2$. Хотим доказать, что $(\mathcal{M}^*, x_0) \vDash \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$
Пусть $(\mathcal{M}^*, x_0) \nvDash \Box^{\leq n} A^2_\alpha \Rightarrow$

$$(\mathcal{M}^*, x_0) \nvDash \Box^{\leq n} \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} (\alpha_i \to \alpha_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\exists k((\mathcal{M}^*, x_0) \nvDash \Box^k \bigwedge_{i=n+2}^{2n+2} \alpha_i \to \alpha_{i-1})) \Rightarrow$$

существует, достижимый из x_0 за k шагов мир x_1, такой что в нем ложно $\bigwedge_{i=n+2}^{2n+2}(\alpha_i \to \alpha_{i-1})$.
$\exists j \in \{n+2, \dots, 2n+2\}\ (\mathcal{M}^*, x_1) \nvDash (\alpha_j \to \alpha_{j-1})$.
Значит, $(\mathcal{M}^*, x_1) \vDash \alpha_j$ и $(\mathcal{M}^*, x_1) \nvDash \alpha_{j-1}$. Из этого следует, что $(\mathcal{M}, x_1) \vDash q_{j-n-1}$ и $(\mathcal{M}, x_1) \nvDash q_{j-n-2}$.
Но тогда $(\mathcal{M}, x_1) \nvDash A^2 \Rightarrow (\mathcal{M}, x_0) \nvDash \Box^{\leqslant n} A^2$. Получили противоречие. Значит, $(\mathcal{M}^*, x_0) \vDash \Box^{\leqslant n} A^2_\alpha$

Следствие

wGrz(0) — PSPACE-*трудная.*

Теорема

Пусть L — логика, такая что $L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$. Тогда $L(0)$ — PSPACE*-трудная задача.*

Теорема

Пусть L — логика, такая что $L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$. Тогда $L(0)$ — PSPACE-трудная задача.

Достаточно доказать, что $\forall L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$ верно, что

$$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)_\alpha \text{ — } L(0)\text{-выполнимая.}$$

Теорема

Пусть L — логика, такая что $L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$. Тогда $L(0)$ — PSPACE-трудная задача.

Достаточно доказать, что $\forall L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$ верно, что

$$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)_\alpha \text{ — } L(0)\text{-выполнимая.}$$

1. $\Theta \in \mathrm{TQBF} \Rightarrow f(\Theta)_\alpha$ — wGrz(0)-выполнимая. Следует из PSPACE-трудности логики wGrz(0).

Теорема

Пусть L — логика, такая что $L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$. Тогда $L(0)$ — PSPACE*-трудная задача.*

Достаточно доказать, что $\forall L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$ верно, что

$$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)_\alpha \text{ — } L(0)\text{-выполнимая.}$$

1. $\Theta \in \mathrm{TQBF} \Rightarrow f(\Theta)_\alpha$ — wGrz(0)-выполнимая.
   Следует из PSPACE-трудности логики wGrz(0).
2. $f(\Theta)_\alpha$ — K(0)-выполнимая $\Rightarrow \Theta \in \mathrm{TQBF}$.

Теорема

Пусть L — логика, такая что $L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$. Тогда $L(0)$ — PSPACE-трудная задача.

Достаточно доказать, что $\forall L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$ верно, что

$$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)_\alpha \text{ — } L(0)\text{-выполнимая.}$$

1. $\Theta \in \mathrm{TQBF} \Rightarrow f(\Theta)_\alpha$ — wGrz(0)-выполнимая.
   Следует из PSPACE-трудности логики wGrz(0).
2. $f(\Theta)_\alpha$ — K(0)-выполнимая $\Rightarrow \Theta \in \mathrm{TQBF}$.
   $\Theta \notin \mathrm{TQBF} \Rightarrow f(\Theta)_\alpha$ не K(0)-выполнимая.

Теорема

Пусть L — логика, такая что $L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$. *Тогда L(0) —* PSPACE*-трудная задача.*

Достаточно доказать, что $\forall L \in [\mathrm{K}, \mathrm{wGrz}]$ верно, что

$$\Theta \in \mathrm{TQBF} \iff f(\Theta)_\alpha \text{ — } L(0)\text{-выполнимая.}$$

1. $\Theta \in \mathrm{TQBF} \Rightarrow f(\Theta)_\alpha$ — wGrz(0)-выполнимая.
   Следует из PSPACE-трудности логики wGrz(0).
2. $f(\Theta)_\alpha$ — K(0)-выполнимая $\Rightarrow \Theta \in \mathrm{TQBF}$.
   $\Theta \notin \mathrm{TQBF} \Rightarrow f(\Theta)_\alpha$ не K(0)-выполнимая.
   Если Θ ложна, то $f(\Theta)$ не K-выполнимая. Значит, $\neg f(\Theta) \in \mathrm{K}$. По правилу подстановки: $\neg f(\Theta)_\alpha \in \mathrm{K}$. А значит, $f(\Theta)_\alpha$ не K(0)-выполнимая.

Рыбаков М. Н. Сложность пропозициональных логик с конечным числом переменных : дис. – Ярославский государственный университет им. ПГ Демидова, 2005.

Ladner R. E. The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic //SIAM journal on computing. – 1977. – Т. 6. – №. 3. – С. 467-480.

A. V. Chagrov, M. N. Rybakov, "How Many Variables One Needs to Prove PSPACE-Hardness of Modal Logics?", Advances in Modal Logic, 4, King's College Publications, London, 2003, 71–82

Rybakov M., Shkatov D. Complexity of finite-variable fragments of propositional modal logics of symmetric frames //Logic Journal of the IGPL. – 2019. – Т. 27. – №. 1. – С. 60-68.

- Litak T. The non-reflexive counterpart of Grz //Bulletin of the Section of Logic. – 2007. – Т. 36. – №. 3-4. – С. 195-208.
- A.Chagrov, M.Zakharyaschev. Modal logic. Oxford University Pres, 1997.
- Крупский В. Н. Введение в сложность вычислений. – 2006.
- Amerbauer M. Cut-free tableau calculi for some propositional normal modal logics //Studia Logica. – 1996. – Т. 57. – №. 2. – С. 359-372.