

# Исчисления секвенций: первое знакомство

Данияр Шамканов  
daniyar.shamkanov@gmail.com

Научно-исследовательский семинар  
«Современные проблемы математической логики»  
2022

# Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных  $\{p, q, r, \dots\}$  с помощью логических связок  $\wedge$  (и),  $\vee$  (или),  $\rightarrow$  (если — то),  $\perp$  (ложь),  $\top$  (истина).

Отрицание  $\neg A$  будем понимать как сокращение для формулы  $(A \rightarrow \perp)$ .

Секвенцией называется выражение вида  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , где  $\Gamma$  и  $\Delta$  — произвольные конечные мультимножества формул.

Примеры:

- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \rightarrow q\}$ ,

# Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных  $\{p, q, r, \dots\}$  с помощью логических связок  $\wedge$  (и),  $\vee$  (или),  $\rightarrow$  (если — то),  $\perp$  (ложь),  $\top$  (истина).

Отрицание  $\neg A$  будем понимать как сокращение для формулы  $(A \rightarrow \perp)$ .

Секвенцией называется выражение вида  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , где  $\Gamma$  и  $\Delta$  — произвольные конечные мультимножества формул.

Примеры:

- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \rightarrow q\}$ ,
- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$ ,

# Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных  $\{p, q, r, \dots\}$  с помощью логических связок  $\wedge$  (и),  $\vee$  (или),  $\rightarrow$  (если — то),  $\perp$  (ложь),  $\top$  (истина).

Отрицание  $\neg A$  будем понимать как сокращение для формулы  $(A \rightarrow \perp)$ .

Секвенцией называется выражение вида  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , где  $\Gamma$  и  $\Delta$  — произвольные конечные мультимножества формул.

Примеры:

- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \rightarrow q\}$ ,
- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$ ,
- ▶  $\emptyset \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$ ,

# Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных  $\{p, q, r, \dots\}$  с помощью логических связок  $\wedge$  (и),  $\vee$  (или),  $\rightarrow$  (если — то),  $\perp$  (ложь),  $\top$  (истина).

Отрицание  $\neg A$  будем понимать как сокращение для формулы  $(A \rightarrow \perp)$ .

Секвенцией называется выражение вида  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , где  $\Gamma$  и  $\Delta$  — произвольные конечные мультимножества формул.

Примеры:

- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \rightarrow q\}$ ,
- ▶  $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$ ,
- ▶  $\emptyset \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$ ,
- ▶  $\Rightarrow p, q, q, p \rightarrow q$ .

# Исчисление секвенций для классической логики высказываний

Начальные секвенции и правила вывода:

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \quad \Gamma, \perp \Rightarrow \Delta, \quad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta,$$

$$\wedge_L \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}, \quad \wedge_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta},$$

$$\vee_L \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}, \quad \vee_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta},$$

$$\rightarrow_L \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}, \quad \rightarrow_R \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}.$$

Секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  **доказуема**, если у неё существует доказательство, т.е. конечное дерево секвенций, построенное по правилам вывода, в листьях которого стоят начальные секвенции, а в корне — секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ .

Мы будем говорить, что доказуема формула  $A$ , если доказуема секвенция  $\Rightarrow A$  (т.е.  $\emptyset \Rightarrow \{A\}$ ).

Доказательство формулы  $(p \wedge q) \rightarrow p$ :

Доказательство формулы  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ :



Доказательство формулы  $\neg\neg p \rightarrow p$ :

Доказуема ли формула  $p \rightarrow \neg p$ ? Формула  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ ?

Набор значений (0 или 1) пропозициональных переменных, при котором все формулы из  $\Gamma$  истинны, а все формулы из  $\Delta$  ложны, будем называть **контрпримером** к секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ .

Если у секвенции нет контрпримера, то будем говорить, что она **общезначима**.

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций.

## Лемма

В каждом из правил вывода нижняя секвенция имеет контрпример тогда и только тогда, когда хотя бы одна из верхних секвенций имеет контрпример.

Иначе говоря, заключение любого правила общезначимо, если и только если все его посылки общезначимы.

$$\wedge_L \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}, \quad \wedge_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta},$$

$$\vee_L \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}, \quad \vee_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta},$$

$$\rightarrow_L \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}, \quad \rightarrow_R \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}.$$

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций.

## Доказательство

Вывод (1) из (2) получается индукцией по высоте доказательства секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ .

Посмотрим на вывод (2) из (1).

# Модальная логика К

**Модальные формулы** строятся из пропозициональных переменных  $\{p, q, r, \dots\}$  с помощью связок  $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp, \top$  и дополнительной одноместной связки  $\Box$ .

Модальную логику К можно определить с помощью следующего аксиоматического исчисления.

**Схемы аксиом:**

- ▶ тавтологии классической логики высказываний,
- ▶  $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ .

**Правила вывода:**

$$\text{mp} \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}, \quad \text{нес} \frac{A}{\Box A}.$$

# Исчисление секвенций для логики К

Для конечного мультимножества формул  $\Gamma = A_1, \dots, A_n$  определим  $\Box\Gamma := \Box A_1, \dots, \Box A_n$ .

Исчисление секвенций для логики К получается из предшествующего исчисления секвенций добавлением правила вывода

$$\Box_K \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta} .$$

Доказательство формулы  $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ :



Доказуема ли формула  $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ ?

Модель Крипке  $M$  с отмеченной точкой  $w$  будем называть **контрмоделью** для секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , если все формулы из  $\Gamma$  истинны в мире  $w$ , а все формулы из  $\Delta$  ложны.

Если для секвенции нет контрмодели, то будем говорить, что она **общезначима**.

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1.  $K \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ ;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима;
3. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций для логики  $K$ .

## Лемма

Для каждого правил вывода, за исключением правила ( $\Box_K$ ), общезначимость заключения влечет общезначимость посылок.

## Доказательство в случае правила ( $\wedge_R$ )

$$\wedge_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} .$$

Секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  называется **насыщенной**, если мультимножества  $\Gamma$  и  $\Delta$  не содержат формул вида  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$ .

## Лемма

Всякая общезначимая насыщенная секвенция является начальной секвенцией или получается применением правила ( $\Box_K$ ) из другой общезначимой секвенции.

## Доказательство леммы

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1.  $K \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ ;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима;
3. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций для модальной логики  $K$ .

## Доказательство

Из (1) следует (2), поскольку все формулы, которые доказуемы в логике  $K$ , истинны в каждом мире любой модели Крипке.

Вывод (1) из (3) получается индукцией по высоте доказательства секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ .

Посмотрим на вывод (3) из (2).

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \quad \Gamma, \perp \Rightarrow \Delta, \quad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta,$$

$$\wedge_L \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}, \quad \wedge_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta},$$

$$\vee_L \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}, \quad \vee_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta},$$

$$\rightarrow_L \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}, \quad \rightarrow_R \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta},$$

$$\Box_K \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box \Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta}.$$

# Логика Гёделя-Лёба GL

Логику Гёделя-Лёба GL можно определить с помощью следующего аксиоматического исчисления.

Схемы аксиом:

- ▶ тавтологии классической логики высказываний,
- ▶  $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ ,
- ▶  $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ .

Правила вывода:

$$\text{mp} \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}, \quad \text{нес} \frac{A}{\Box A}.$$

Логика GL корректна и полна относительно арифметической семантики, в которой  $\Box A$  понимается как утверждение о доказуемости  $A$  в арифметике Пеано.

Напомню, что бинарное отношение  $R$  на множестве  $W$  называется *нётеровым*, если не существует бесконечных последовательностей вида  $w_0 R w_1 R w_2 R w_3 \dots$ .

В случае логики GL вместо произвольных шкал (моделей) Крипке мы рассматриваем шкалы (модели) с транзитивным и нётеровым отношением и называем их *GL-шкалами* (*GL-моделями*).



Транзитивную нётерову модель Крипке  $\mathcal{M}$  с отмеченной точкой  $w$  будем называть **GL-контрмоделью** для секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , если все формулы из  $\Gamma$  истинны в мире  $w$ , а все формулы из  $\Delta$  ложны.

Если для секвенции нет GL-контрмодели, то будем говорить, что она **общезначима в классе GL-шкал**.

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1.  $GL \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ ;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима в классе GL-шкал;
3. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций  $S_1$ ;
4. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций  $S_2$ .

# Первое исчисление секвенций для логики GL

Исчисление секвенций  $S_1$  для логики GL получается из предшествующего исчисления секвенций заменой правила вывода ( $\Box_K$ ) на правило вывода

$$\Box \frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta} .$$

Кроме того, в этом исчислении мы допускаем *нефундированные доказательства* (или  $\infty$ -*доказательства*), т.е. произвольные построенные по правилам вывода дерева секвенций, в листьях которых стоят начальные секвенции.

Нефундированное доказательство секвенции  $\Box(\Box p \rightarrow p) \Rightarrow \Box p$ :

## Лемма

Для каждого правил вывода, за исключением правила ( $\square$ ), общезначимость заключения в классе GL-шкал влечет общезначимость посылок в этом же классе.

Вспоминаем, что секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  называется насыщенной, если мультимножества  $\Gamma$  и  $\Delta$  не содержат формул вида  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$ .

## Лемма

Относительно класса GL-шкал всякая общезначимая насыщенная секвенция является начальной секвенцией или получается применением правила ( $\square$ ) из другой общезначимой секвенции.

## Следствие

Всякая общезначимая в классе GL-шкал секвенция доказуема в исчислении секвенций  $S_1$ .

## Второе исчисление секвенций для логики GL

Исчисление секвенций  $S_2$  для логики GL получается из предшествующего исчисления секвенций добавлением начальных секвенций вида

$$\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

и заменой правила вывода ( $\square$ ) на правило вывода

$$\square_{GL} \frac{\Gamma, \square\Gamma, \square A \Rightarrow A}{\Pi, \square\Gamma \Rightarrow \square A, \Delta} .$$

В этом исчислении мы допускаем только конечные деревья секвенций в качестве доказательств.

## Лемма

Всякая секвенция, которая доказуема в исчислении  $S_1$ , также доказуема в исчислении  $S_2$ .

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1.  $GL \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ ;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима в классе GL-шкал;
3. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций  $S_1$ ;
4. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций  $S_2$ .

## Доказательство

Из (1) следует (2), поскольку все формулы, которые доказуемы в логике GL, истинны в каждой произвольной GL-модели.

Вывод (3) из (2) уже получен.

Вывод (4) из (3) получен в лемме.

Вывод (1) из (4) получается индукцией по высоте доказательства секвенции  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  в исчислении  $S_2$ .

## Теорема о неподвижной точке для логики GL

Пусть каждое вхождение переменной  $p$  в формулу  $A(p)$  находится в области действия модальной связки  $\Box$ . Тогда существует единственная с точностью до доказуемой эквивалентности формула  $B$  такая, что  $GL \vdash B \leftrightarrow A(B)$ .



Расширим наш язык, допустив *регулярные нефундированные формулы* (или *регулярные  $\infty$ -формулы*).

Всякую обычную формулу языка модальной логики можно представить как конечное дерево, построенное с помощью связок  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  и  $\Box$ , и такое, что его листья помечены переменными и константами  $\perp$  и  $\top$ .

Понятие  *$\infty$ -формулы* получается, если мы опустим условие конечности и добавим, что в каждой бесконечной ветви дерева  $\infty$ -формулы должно встречаться бесконечное число вершин, помеченных связкой  $\Box$ .

Будем говорить, что  $\infty$ -формула является *регулярной*, если её множество подформул конечно, т.е. дерево данной  $\infty$ -формулы содержит лишь конечное число неизоморфных поддеревьев.

**Истинность**  $\infty$ -формулы  $C$  в мире  $w$  некоторой GL-модели  $\mathcal{M}$  определяется индукцией по ординальному рангу  $w$  с вложенной индукцией по локальной высоте  $C$ :

- ▶  $\mathcal{M}, w \not\models p \iff w \in v(p),$
- ▶  $\mathcal{M}, w \not\models \perp,$
- ▶  $\mathcal{M}, w \models \top,$
- ▶  $\mathcal{M}, w \models A \wedge B \iff \mathcal{M}, w \models A \text{ и } \mathcal{M}, w \models B,$
- ▶  $\mathcal{M}, w \models A \vee B \iff \mathcal{M}, w \models A \text{ или } \mathcal{M}, w \models B,$
- ▶  $\mathcal{M}, w \models A \rightarrow B \iff \mathcal{M}, w \not\models A \text{ или } \mathcal{M}, w \models B,$
- ▶  $\mathcal{M}, w \models \Box A \iff \forall w' (wRw' \Rightarrow \mathcal{M}, w' \models A).$

Символами  $GL^r$ ,  $S_1^r$  и  $S_2^r$  обозначим соответствующие системы в языке, расширенном регулярными  $\infty$ -формулами.

## Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1.  $GL^r \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ ;
2. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  общезначима в классе GL-шкал;
3. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций  $S_1^r$ ;
4. секвенция  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  доказуема в исчислении секвенций  $S_2^r$ .

## Следствие

Система  $GL^r$  консервативно расширяет GL, т.е. обычная формула  $A$  доказуема в  $GL^r$  тогда и только тогда, когда  $A$  доказуема GL.

## Лемма

В системе  $GL^r$  всякая регулярная  $\infty$ -формула доказуемо эквивалентна обычной.

## Теорема о неподвижной точке для логики GL

Пусть каждое вхождение переменной  $p$  в формулу  $A(p)$  находится в области действия модальной связки  $\Box$ . Тогда существует единственная с точностью до доказуемой эквивалентности формула  $B$  такая, что  $GL \vdash B \leftrightarrow A(B)$ .

## Доказательство

## Интерполяционная теорема

Пусть  $GL^r \vdash A \rightarrow B$ . Тогда существует обычная формула  $C$  такая, что  $GL^r \vdash A \rightarrow C$  и  $GL^r \vdash C \rightarrow B$ .

## Вывод леммы из интерполяционной теоремы



Спасибо за внимание!