И. К. Бусяцкая

Лекции по линейной алгебре.

Аннотация

Лекции являются учебником по линейной алгебре, возникшем в результате обработки, расширения и углубления курса лекций, читаемым автором в течение ряда лет для студентов МИЭМ НИУ ВШЭ, обучающихся по программе Компьютерная безопасность .

Изложение материала базируется на нескольких методических принципах. Во первых, это традиция преподавания линейной алгебре на кафедре Алгебры и Анализа (затем на кафедре Алгебры и Логики) МИЭМ. Автор не может не выразить благодарность своим коллегам, внесшим свой вклад в формирование этой традиции. Речь идет о сочетании математической строгости изложения теории с алгоритмизацией процесса решения различных алгебраических задач, что позволяет большинству студентов успешно справляться с практическими заданиями.

Вторым, не менее важным методическим принципом курса является взгляд на линейную алгебру, как на многомерную геометрию. Это позволяет использовать геометрическую интуицию и трехмерные геометрические модели для демонстрации наглядного смысла как абстрактных алгебраических понятий, так и доказательств различных теорем.

В курсе приводится решение многочисленных примеров, аналоги которых традиционно разбираются на семинарах.

Содержание.

Предисловие. 7

Глава 1. Алгебра матриц. 8

§1. Матрицы и действия над ними..... 8

§2. Элементарные матрицы и элементарные преобразования. 14

§3. Ступенчатые матрицы. 19

§4. Упражнения. ..... .22

Глава 2. Системы линейных уравнений и линейные пространства. 23

§ 1. Основные определения.....23

§2. Решение систем главного ступенчатого вида.....26

§ 3. Линейные координатные пространства.....31

§ 4. Линейные подпространства.....35

§5. Ранг матрицы. 39

§ 6.Фундаментальная система решений. Формула общего решения. 43

§ 7. Пример решения Домашней работы 1. 47

§ 8. Обратная матрица. 50

§ 9. Упражнения. 52

Глава 3.Теория определителей..... 53

§ 1. Детерминант матрицы и его основные свойства..... ..53

§ 2.Мультиплекативное свойство определителя. 59

§ 3. Алгебраические дополнения и их свойства.....61

§ 4. Приложения. 66

§ 5. Пример решения Домашней работы 2. 72

§ 6. Упражнения. 74

Глава 4. Комплексные числа и многочлены. 75
§ 1. Поле комплексных чисел. 75
§2. Геометрическая модель поля комплексных чисел ℂ. 79
§3. Возведение в степень и извлечение корней. 82
§ 4. Приложения. 85
§ 5. Кольцо многочленов.....87
§6. Корни многочлена..... 88
§ 7. Упражнения. ..... .96

Глава 5 . Евклидовы пространства. 97
§ 1. Линейные пространства над полем P. ..... .97
§ 2. Евклидово пространство над полем R. 103
§3. Ортогональные системы векторов. 108
§ 4. Ортогональная проекция. 115
§ 5. Метод наименьших квадратов. 121
§ 6. Комплексное евклидово пространство.....130
§ 7. Упражнения. 133

Глава 6. Линейные операторы. 134
§1. Определения и примеры.....134
§2. Матрица линейного оператора в данном базисе. 137
§3. Ядро и образ линейного оператора. 141
§4. Действия над линейными операторами. ..... .144
§ 5. Примеры линейных операторов. 147
§ 6. Пример решения Домашней работы 3. 154
§ 7. Упражнения. 156
Глава 7. Канонический вид линейного оператора. 158
§1. Инвариантные подпространства. Собственные

векторы. 158

§2. Метод нахождения собственных векторов линейного оператора. 161

§3. Преобразование координат. 165

§4. Подобные матрицы. 168

§ 5. Диагонализируемый линейный оператор. 170

§6. Жорданова нормальная форма. 174

§ 7. Пример решения Домашней работы 4. 179

§8 . Упражнения. 183

Глава 8. Линейные операторы в евклидовых пространствах. 185

§ 1. Основные факты о евклидовых пространствах. 185

§ 2. Сопряженный оператор. 186

§ 3. Свойства самосопряжённых операторов. 192

§ 4. Канонический вид самосопряженного оператора. 194

§ 5. Изометрический оператор. 197

§ 6. Свойства изометрического оператора. 201

§ 7. Канонический вид изометрического оператора. 205

§ 8. Изометрические операторы на плоскости и в пространстве.....208

§ 9. Пример решения Домашней работы 5.....211

§ 10. Каноническое разложение невырожденного линейного оператора. 214

§ 11. Упражнения. 217

Глава 9. Квадратичные формы и поверхности второго порядка.....218

§ 1. Линейные формы. 218

§ 2. Билинейные формы. 220

§ 3. Квадратичные формы. 221

§ 4. Канонический вид квадратичной формы. 223

§ 5 . Поверхности $2^{го}$ порядка. 225

§ 6. Пример.....229

§ 7. Упражнения. 231

Литература..... 233

Предисловие.

Лекции содержат материал для годового курса линейной алгебры. Теория излагается с традиционной математическую строгостью (приведены доказательства почти всех теорем, некоторые из которых достаточно сложны и рассчитаны на продвинутых и любознательных студентов). Однако, наличие большого количества примеров и разбор решений типовых задач дают возможность студенту полностью освоить практическую часть курса.

Отметим специфические особенности изложения теории. В главе 1 существенное внимание уделяется элементарным матрицам и их связи с элементарными преобразованиями над строками (столбцами) матрицы. Эта связь в дальнейшем используется для обоснования алгоритмов Гаусса решения систем линейных уравнений, нахождения обратной матрицы, вычисления определителей, а также при доказательстве ряда теорем, в частности, при выводе мультипликативного свойства определителя и одного из критериев обратимости матрицы.

В главе 2 сделан акцент на геометрической интерпретации множества решений системы линейных однородных уравнений. Решение системы (набор значений неизвестных, обращающих уравнения в тождества) рассматривается, как вектор линейного пространства R^n, а множество решений, как линейное подпространство для однородной системы и линейное многообразие для неоднородной системы линейных уравнений. Векторная запись системы наглядно демонстрирует геометрический смысл ее совместности.

Теория определителей, которой посвящена глава 3, излагается индуктивно. В § 4 подробно рассмотрены простейшие матричные уравнения.

В главе 4 обсуждаются понятия кольца и поля, которые подробно излагаются в дальнейших алгебраических курсах. Типичные примеры этих алгебраических структур – кольцо многочленов и поле комплексных чисел – рассмотрены подробно и используются в данном курсе при изложении спектральной теории линейных операторов. Ряд приведенных примеров связан с геометрической моделью поля комплексных чисел и с заданием кривых и областей на плоскости с помощью комплексных соотношений.

В главе 5, посвященной многомерной евклидовой геометрии, в качестве приложений рассмотрены метод наименьших квадратов решения несовместных систем линейных уравнений и задача регрессии.

Теория линейных операторов подробно изложена в главах 6 и 7. Приведены многочисленные примеры линейных операторов на плоскости и в трехмерном пространстве. Обсуждаются вопросы о геометрическом смысле линейного оператора и о каноническом виде его матрицы в связи со строением спектра этого оператора с учетом размерностей собственных подпространств. Описана Жорданова нормальная форма матрицы и метод ее нахождения, если она существует.

В главе 8 изучаются операторы в евклидовых пространствах как над полем вещественных , так и над полем комплексных чисел. Наряду с каноническим видом матрицы и геометрическим смысле самосопряженного и изометрического операторов обсуждается вопрос о каноническом разложении невырожденного оператора в произведение положительного самосопряженного и изометрического операторов(аналог тригонометрической формы комплексного числа).

В главе 9 изложенная выше теория применяется к классификации поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве.

В программе дисциплины предусмотрены индивидуальные проекты, так называемые Домашние работы по основным темам курса, варианты которых представляют собой результат многолетнего коллективного труда сотрудников кафедры Алгебры и Анализа , а затем кафедры Алгебры и Логики МИЭМ. В Лекциях приводятся образцы решения этих работ. Для желающих углубить свои знания ко всем главам добавлены упражнения (список более сложных задач для самостоятельного решения), часть из которых почерпнута из задачников И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре и А.И. Кострикин. Сборник задач по алгебре.

Нумерация определений, теорем и формул проводится отдельно в каждой главе.

Глава 1. Алгебра матриц.

§1. Матрицы и действия над ними.

Прямоугольная таблица из n строк и m столбцов называется матрицей порядка n на m.

Записывать матрицу будем следующим образом :

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$ или A=(a_i^j) , где элемент матрицы a_i^j находится в таблице на пересечении i-о й строки и j- ого столбца.

Совокупность всех таких матриц обозначается через M_m^n . Если m=n, то A называется квадратной матрицей порядка n, а множество матриц обозначается через M_n. Элементами матрицы могут быть объекты различной природы, например числа, функции, символы, картинки и т.д. Ниже мы будем рассматривать матрицы, элементы которых являются числами, взятыми из некоторого множества. Например, можно рассматривать целочисленные матрицы, у которых $a_i^j \in Z$. Если это специально не оговаривается, то будем считать, что $a_i^j \in R$.

Примеры.

1. Если у квадратной матрицы a_i^j =0 при $i < j$, то матрица называется верхней треугольной матрицей.

$T = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n^n \end{pmatrix}$

2. Если у квадратной матрицы a_i^j =0 при $i > j$, то матрица называется нижней треугольной матрицей.

$T = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$

3. Если квадратная матрица является одновременно верхней и нижней треугольной, то она выглядит следующем образом :

$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$ и называется диагональной.

Во всех вышеуказанных примерах элементы матриц, обозначенные буквами могут принимать любые числовые значения, в частности могут быть нулями.

4.Если у диагональной матрицы все диагональные элементы d_i^i =1, то матрица называется единичной и обозначается E.

E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Элементы этой матрицы удобно записать с помощью символа Кронекера $\delta_i^j = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ 0, \text{если } i \neq j \end{cases}$, E =(δ_i^j).

Две матрицы A и B называются равными , если $a_i^j = b_i^j$ для всех i=1,2..m и j=1,2…n.

Определение 1. Суммой двух матриц A=(a_i^j) и B=(b_i^j) из множества M_m^n называется матрица C=(c_i^j), элементы которой $c_i^j = a_i^j + b_i^j$ для всех i=1,2..m и j=1,2…n. Произведением матрицы A=(a_i^j) на число $\lambda \in R$ называется матрица λA =(λ a_i^j), то есть матрица, все элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число λ.

Так как сложение матриц и умножение матрицы на число происходят поэлементно, то для этих операций справедливы те же свойства, которые справедливы для сложения и умножения действительных чисел.

Это- так называемые свойства линейности :

1.A + B= B + A- коммутативность сложения

2. (A + B) + C = A + (B+ C)-ассоциативность сложения

3.Матрица O, все элементы которой равны 0 называется нулевой и является нейтральным элементом для операции сложения. То есть O + A=A для любой матрицы A.

4.У каждой матрицы A существует противоположная матрица –A, при сложении с которой в результате получается нулевая матрица. A + (-A) = O.

Если A=(a_i^j), то –A = (-1)A=(- a_i^j).

5.1A=A для любой матрицы A. То есть 1 – нейтральный элемент для умножения матрицы на число.

6. (λμ)A=λ(μA)

7. (λ+μ)A = λA + μA

8. λ(A + B) =λA + λB- дистрибутивность умножения по отношению к сложению.

Эти восемь свойств еще встретятся нам при изучении алгебраических операций на различных множествах.

С помощью этих двух операций можно исходя из заданного множества матриц A_1, A_2 ...A_k и заданных чисел λ_1 , λ_2 ... $\lambda_к$ построить новую матрицу

$A= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 +...+ \lambda_к A_к$. Такая матрица называется линейной комбинацией матриц A_1, A_2 ...A_k с коэффициентами λ_1 , λ_2 ... $\lambda_к$.

Пример. Рассмотрим множество матриц E_i^j , для всех i=1,2..m и j=1,2…n. Число таких матриц nm. Каждая матрица E_i^j имеет только один отличный от нуля элемент, равный единице. Эта единица стоит на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Эти матрицы называются базисными.

Теорема 1**.**Любая матрица $A \in M_m^n$ является линейной комбинацией базисных матриц.

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $A=(a_i^j)$. У нее nm элементов. Возьмем эти числа в качестве коэффициентов и составим линейную комбинацию матриц E_i^j с к коэффициентами a_i^j соответственно. Матрица $a_i^j E_i^j$ имеет один отличный от нуля элемент: число a_i^j на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Просуммировав все такие матрицы, получим исходную матрицу А.

Пример. Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и базисные матрицы множества M_2 .

$E_1^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$E_1^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$E_2^1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,E_2^2 = . $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Матрицу А можно записать в виде $A=1\ E_1^1 +2\ E_1^2 +3\ E_2^1 +4\ E_2^2$.

Определение2**.** Произведением двух квадратных матриц $A=(a_i^j)$ и $B=(b_i^j)$ порядка n называется квадратная матрица $C=(c_i^j)$ того же порядка, элементы которой вычисляются по формулам $c_i^j = a_i^1 b_1^j + a_i^2 b_2^j +....+ a_i^n b_1^n$.

В дальнейшем мы будем пользоваться сокращенной записью суммирования:

$\sum_{к=1}^{n} a_к = a_1 + a_2 +...+ a_n$ и формулой

$c_i^j = \sum_{к=1}^{n} a_i^k b_k^j$. (1)

Таким образом , для того чтобы вычислить матрицу С, необходимо вычислить n^2 чисел для каждой пары i,j.

Пример. Найдем произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Для нахождения c_1^1 нужно элементы первой строки матрицы А умножать на соответствующие элементы первого столбца матрицы В и складывать полученные произведения. Получаем $c_1^1 =1*2+2*1=4$. Для вычисления

элемента c_1^2 элементы первой строки матрицы A нужно умножать на соответствующие элементы второго столбца матрицы B и складывать полученные произведения c_1^2 =1*2+2*0=2. Аналогично вычисляем c_2^1 =3*2+4*1 =10 и c_2^2 =3*2+4*0=6. Матрица C= $A * B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$.Вычислим произведение матриц A и B в обратном порядке.

B*A=$\begin{pmatrix} 2*1+2*3 & 2*2+2*4 \\ 1*1+0*3 & 1*2+0*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Мы получили разные произведения. A*B≠B*A.Этот пример показывает, что умножение матриц в общем случае не коммутативно. Однако для некоторых пар матриц произведение может не зависеть от порядка сомножителей.

Теорема 2. Для любой матрицы $A \in M_n$ EA=AE=A.

Доказательство. Обозначим через B произведение EA ,а через C произведение AE. Тогда $b_i^j = \sum_{к=1}^{n} \delta_i^k a_k^j = \delta_i^i a_i^j = a_i^j$, а $c_i^j = \sum_{к=1}^{n} a_i^k \delta_k^j = a_i^j \delta_j^j = a_i^j$.Из определения равенства матриц следует, что A=B=C или A=EA=AE.

Единичная матрица E коммутирует с любой матрицей $A \in M_n$ и является нейтральным элементом для операции умножения матриц. В следующих теоремах будут сформулированы другие важные свойства операции умножения матриц . Для доказательства этих теорем потребуется использовать следующие свойства сокращенного суммирования:

1. $\sum_{к=1}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{n} a_m$ - индекс суммирования можно менять.

2. $\sum_{к=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_k^m = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^m$ – можно менять порядок в двойном суммировании .b_k

3. $\sum_{к=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_к^m b_k = \sum_{к=1}^{n} bk \sum_{m=1}^{n} a_k^m$ –элемент ,не содержащий индекс суммирования, можно выносить за знак суммы.

Теорема 3. Умножение матриц ассоциативно, то есть (A*B)*C=A*(B*C) для любых матриц A,B, $C \in M_n$.

Доказательство. Требуется доказать равенство двух матриц. Согласно определению, нужно проверить совпадение элементов этих матриц, находящихся на одинаковых местах . Для удобства вычислений введем обозначения A*B =D , D*C=F, B*C=P,A*P=Q. Проверим, что соответствующие элементы матриц F и Q совпадают.

$d_i^k = \sum_{m=1}^{n} a_i^m b_m^k$, $f_i^j = \sum_{к=1}^{n} d_i^k c_k^j = \sum_{к=1}^{n} (\sum_{m=1}^{n} a_i^m b_m^k) c_k^j =$
$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_i^m b_m^k c_k^j$.

$p_k^j = \sum_{m=1}^{n} b_k^m c_m^j$, $q_i^j = \sum_{к=1}^{n} a_i^k p_k^j = \sum_{к=1}^{n} a_i^k (\sum_{m=1}^{n} b_k^m c_m^j)$
$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_i^m b_m^k c_k^j$.

Теорема 4. Умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению, то есть A (B+C)= AB + AC, (A +B)C =AC +BC для любых матриц A,B, C ∈ M_n .

Доказательство теоремы 4 аналогично предыдущему и оставляется в качестве упражнения читателю.

В предыдущей теореме показана связь между двумя действиями над матрицами: сложением и умножением . Отметим важную связь между умножением матрицы на число и произведением матриц.

Теорема 5. λ(AB) = (λA)B =A(λB) .
Доказательство теоремы 5 аналогично доказательствам предыдущих теорем (сравнение элементов , находящихся на одинаковых местах в правой и в левой частях равенства) и оставляется в качестве упражнения читателю.

Мы определили произведение квадратных матриц одного порядка. Однако, в некоторых случаях можно определить произведение прямоугольных матриц таким образом, чтобы сохранялась формула (1). Рассмотрим две матрицы A ∈ M_m^n и B ∈ M_n^k .Число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. Это означает, что в строках матрицы A столько же элементов сколько в столбцах матрицы B. Следовательно, можно воспользоваться формулой (1) и найти матрицу C = AB. Матрица C будет иметь столько же строк, сколько их у матрицы A и столько же столбцов, сколько их у матрицы B, C ∈ $M_m^к$.

Пример. Найдем произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. A∈ M_2^3 , B∈ M_3^2 , а C=AB=$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ ∈ M_2.

Рассмотрим множество M_n^1 .Это- матрицы ,состоящие из одного столбца и имеющие вид X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Такие матрицы будем называть n-мерными вектор-столбцами. (Аналогичным образом можно рассматривать n- мерные вектор -строки). n- мерные вектор столбцы можно складывать и умножать на числа λ по правилам действия над матрицами и снова получать n- мерные вектор столбцы. Перемножать их нельзя, если n≠1. Если A фиксированная квадратная матрица порядка n, то можно с ее помощью задать отображение множества M_n^1 в себя.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow AX = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = Y \qquad (2)$$

$y_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n, \dots, y_n = a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^n x_n$.

Из свойств операций над матрицами следует, что это отображение обладает свойствами свойствами: $A(X+Y) = AX + AY$ и $A(\lambda X) = \lambda AX$.

Отображения с такими свойствами называются линейными.

Пример. Рассмотрим 3^x-мерные вектор –столбцы $X=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Каждому столбцу соответствует вектор в трехмерном пространстве с координатами α,β,γ . $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.Согласно формулам (2) матрица задает отображение $X=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$. С геометрической точки зрения- это проектирование на плоскость ОХУ. Исторически произведение матриц возникло при изучении композиции линейных отображений.

Определение 3**.** Матрица A^T называется транспонированной для А, если ее строки представляют собой столбцы матрицы А, а столбцы, соответственно, строки матрицы А.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$.То есть $a_i^{j\,T} = a_j^i$.

Операция транспонирования матриц обладает следующими важными свойствами : 1.$(A^T)^T = A$, 2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,3.$(\lambda A)^T = \lambda A^T$, 4.$(AB)^T = B^T A^T$, проверка которых оставлена в качестве упражнения.

§2. Элементарные матрицы и элементарные преобразования.

Рассмотрим матрицу A = $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_i^1 & & a_i^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$, в которой выделены две строки i-ая и j-ая.

Определение 4. Следующие преобразования над строками матрицы A называются элементарными:

1) перестановка местами двух строк (элементарное преобразование первого типа)

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_i^1 & & a_i^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_i^1 & & a_i^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

2) умножение строки на отличное от нуля число λ (элементарное преобразование второго типа)

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_i^1 & & a_i^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ \lambda a_i^1 & & \lambda a_i^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

3) прибавление к одной строке другой строки умноженной на число λ (элементарное преобразование третьего типа)

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_i^1 & & a_i^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_i^1 + \lambda a_j^1 & & a_i^n + \lambda a_j^n \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \cdots & & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} .$$

Рассмотрим единичную матрицу E и применим элементарные преобразования к строкам этой матрицы.

Определение 5**.** Матрицы , полученные из единичной матрицы Е с помощью элементарных преобразований над строками, называются элементарными матрицами соответствующего типа.

1) $Э_i^j$ - матрица, полученная из Е перестановкой i-ой и j-ой строк.
2) $Э_i(\lambda)$ – матрица, полученная из Е умножением элементов i-ой строки на число $\lambda \neq 0$.
3) $Э_i^j(\lambda)$ – матрица, полученная из Е прибавлением к i-ой строке j-ой строки, умноженной на число λ.

Все элементарные матрицы- квадратные.

Пример. Рассмотрим единичную матрицу третьего порядка $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. В этом случае примером элементарной матрицы первого типа является матрица $Э_1^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Матриц первого типа будет столько же, сколько существует различных пар строк рассматриваемой матрицы Е. В данном случае их будет три. Если Е- матрица порядка n, то число элементарных матриц первого типа будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Примером элементарной матрицы второго типа будет матрица $Э_2(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Таких матриц бесконечно много из-за возможностей выбора числа λ, которое может стоять на одном из мест на диагонали матрицы (выбрать место на диагонали можно в общем случае n способами).Все элементарные матрицы второго типа диагональные. В качестве примера элементарной матрицы третьего типа рассмотрим матрицу $Э_2^3(5)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Таких элементарных матриц можно построить бесконечно много за счет выбора числа λ. На диагонали стоят 1, а число λ в матрице $Э_i^j(\lambda)$ находится на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Такая матрица будет верхней треугольной , если $i < j$ и нижней треугольной, если $i > j$.

Выразим элементарные матрицы через матрицу Е и базисные матрицы E_i^j . В базисной матрице все элементы равны 0, кроме 1, которая находится на пересечении i-ой строки и j-ого столбца, поэтому прибавление такой матрицы к матрице А того же порядка увеличивает на 1 элемент a_i^j , а вычитание - уменьшает элемент a_i^j на 1, оставляя остальные элементы матрицы А без изменения. Получаем

$Э_i^j = E - E_i^i - E_j^j + E_i^j + E_j^i$,

$Э_i(\lambda) = E + (\lambda - 1) E_i^i$, (3)

$Э_i^j(\lambda) = E + \lambda E_i^j$.

Изучим, что происходит с произвольной матрицей А порядка m на n при умножении на базисную матрицу. Базисная матрица E_i^j –квадратная. Если ее порядок m, то ее можно умножить на матрицу А справа E_i^j А , а если порядок базисной матрицы n, то ее можно умножить на матрицу А слева А E_i^j . Рассмотрим произведение E_i^jА. Согласно формуле (1) элементы произведения вычисляются путем сложения произведений элементов строк матрицы E_i^j на соответствующие элементы столбцов матрицы А. Но все строки , кроме одной i-ой, матрицы E_i^j равны нулю. Поэтому все строки в произведении E_i^j А , кроме i-ой, также нулевые. Так как 1 в i-ой строке находится в столбце с номером j, то ,умножая элементы этой строки на соответствующие элементы столбцов матрицы А и складывая произведения, получим элементы j-ой строки матрицы А.

$$E_i^j A = \text{i_} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_j^1 & \cdots & a_j^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Теорема 6. (Об умножении на элементарные матрицы **).** Умножение слева матрицы $A \in M_m^n$ на элементарную матрицу порядка m первого, второго или третьего типа приводит матрицу А к матрице, полученной из нее с помощью элементарных преобразований над строками первого, второго или третьего типа соответственно.

Доказательство. При вычислении произведения элементарной матрицы Э на матрицу А воспользуемся формулами (3) и (4).

$$Э_i^j A = (E - E_i^i - E_j^j + E_i^j + E_j^i)A = A - \text{i_}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_i^1 & \cdots & a_i^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \text{j_}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_j^1 & \cdots & a_j^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\text{i_}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_j^1 & \cdots & a_j^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \text{j_}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_i^1 & \cdots & a_i^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ - произошла перестановка i-ой и j-ой строк матрицы А.

$Э_i(\lambda)A = (E + (\lambda - 1) E_i^i)A = A + (\lambda-1) * i_ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_i^1 & \cdots & a_i^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A +$

$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda-1)a_i^1 & \cdots & (\lambda-1)a_i^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \dots & & \dots \\ \lambda a_i^1 & & \lambda a_i^n \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_j^1 & & a_j^n \\ \dots & & \dots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$ -i-ая строка матрицы

A умножилась на число λ .

$Э_i^j(\lambda)A = (E + \lambda E_i^j)A = A + \lambda\ i_ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_j^1 & \cdots & a_j^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_j^1 & \cdots & \lambda a_j^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ - к i-ой строке матрицы A прибавилась j-ая строка этой матрицы, умноженная на число λ .

Пример. Вычислим некоторые интересные произведения матриц.

a) $Э_i^j\ Э_i^j = E$. Действительно, согласно теореме 6, умножение слева на матрицу $Э_i^j$ меняет местами соответствующие строки во втором сомножителе, который будучи матрицей $Э_i^j$ получился из матрицы E перестановкой тех же самых строк. В итоге все строки матрицы E оказываются на своих местах.

b) $Э_i(\lambda)\ Э_i(\frac{1}{\lambda}) = E$. Умножение слева на $Э_i(\lambda)$ приводит к умножению элементов i-ой строки второго множителя на число λ, что возвращает

$Э_i(\frac{1}{\lambda})$ к исходной единичной матрице.

c) $Э_i^j(\lambda)\ Э_i^j(-\lambda) = E$

Определение 6. Матрица B называется **о**братной к матрице A , если AB=BA=E.

Таким образом в примере, рассмотренном выше, мы нашли матрицы обратные к элементарным. Это – тоже элементарные матрицы, умножение на которые осуществляет обратные элементарные преобразования над строками матрицы. Заметим, что не все матрицы имеют обратную. Очевидным примером необратимой матрицы является нулевая матрица O. Однако, она далеко не единственная.

Пример. У матрицы A= $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ не существует обратной. Действительно, если бы матрица $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ была бы обратной к матрице A , то выполнялись бы соотношения $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$=E. $\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ 2a+2c & 2b+2d\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}a+2b & a+2b\\ c+2d & c+2d\end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Но это невозможно, так как a+c=1 противоречит 2a+2c=0.

В рассмотренном примере для квадратной матрицы второго порядка мы искали обратную матрицу того же вида. Справедливость такого подхода будет доказана ниже в теореме главы .

§3 .Ступенчатые матрицы.

Совершая элементарные преобразования над строками матрицы A, мы получаем новую матрицу. Выясним, к какому простейшему виду можно привести матрицу A с помощью таких преобразований.Рассмотрим матрицу A= $\begin{pmatrix}a_1^1 & \cdots & a_1^n\\ \cdots & & \cdots\\ a_i^1 & & a_i^n\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ a_j^1 & & a_j^n\\ \cdots & & \cdots\\ a_m^1 & \cdots & a_m^n\end{pmatrix}$. Каждая строка этой матрицы A_i =(a_i^1 a_i^2 …..a_i^n) является матрицей (вектор - строкой) , в частности строка может быть нулевой A_i =(00…0). Если строка ненулевая, то ее первый ненулевой элемент называется главным элементом этой строки. Столбцы, в которых стоят главные элементы ненулевых строк, называются главными.

Определение 7. Матрица A называется ступенчатой (имеет ступенчатый вид), если номер столбца, в котором стоит главный элемент i-ой строи меньше номера столбца, в котором стоит главный элемент j-ой строки при условии, что $i<j$,и ненулевые строки имеют меньший номер, чем нулевые.

Примеры. Следующие матрицы имеют ступенчатый вид.

A=$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, E=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, D=$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 6\end{pmatrix}$

Определение 8. Ступенчатая матрица называется главной ступенчатой (имеет главный ступенчатый вид), если главные элементы всех ненулевых строк равны 1, а остальные элементы главных столбцов равны 0.

Примеры. Следующие матрицы имеют главный ступенчатый вид.

E=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. У матрицы E все три столбца – главные, у матрицы A главные- второй и третий столбцы.

Теорема 7 (Гаусса). Любую матрицу с помощью элементарных преобразований над ее строками можно привести к главному ступенчатому виду.

Доказательство. Доказательство теоремы будет конструктивным, то есть будет описан алгоритм (алгоритм Гаусса) приводящий любую матрицу A к главному ступенчатому виду. Мы проиллюстрируем применение алгоритма на примере матрицы A=$\begin{pmatrix}0&0&1&3&2\\0&2&1&-1&4\\0&-3&0&2&-1\end{pmatrix}$.

I шаг. Ищем первый по порядку ненулевой столбец матрицы. Его номер обозначим $к_1$, в нашем примере $к_1$ = 2. Заметим, что при элементарных преобразованиях над строками матрицы A нулевые столбцы не изменяются и остаются нулевыми. В столбце с номером $к_1$ ищем элемент отличный от нуля. Если он стоит в первой строке, переходим ко второму шагу алгоритма .Если первый элемент столбца нулевой, то переставляем первую строку и строку, главный элемент которой стоит в столбце с номером $к_1$. Если таких строк несколько, то можно взять любую. Мы применили элементарное преобразование первого типа.

A=$\begin{pmatrix}0&0&1&3&2\\0&2&1&-1&4\\0&-3&0&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&2&1&-1&4\\0&0&1&3&2\\0&-3&0&2&-1\end{pmatrix}$

II шаг. Воспользуемся элементарными преобразованиями третьего типа. Умножим первую строку полученной матрицы на число $\lambda = -\frac{a_i^{k1}}{a_1^{k1}}$ и прибавим ее к i-ой строке этой матрицы для i=2,3....,m. Теперь в столбце с номером $к_1$ стоит только один отличный от нуля элемент в первой строке.

$\begin{pmatrix}0&2&1&-1&4\\0&0&1&3&2\\0&-3&0&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&2&1&-1&4\\0&0&1&3&2\\0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&5\end{pmatrix}$

Заметим, что исходная матрица была целочисленной. В этом случае можно добавить для простоты дальнейших вычислений (что не обязательно) элементарные преобразования второго типа : умножить каждую строку на наименьшее общее кратное знаменателей дробей стоящих в этой строке. Это – элементарное преобразование второго типа.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим полученную матрицу без первой строки и вернемся к началу алгоритма. Через n-1 итерацию получим ступенчатую матрицу.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}$- ступенчатая матрица, в которой 2, 3 и 4 столбцы-главные. В общем случае число главных столбцов матрицы ступенчатого вида не превышает, как число ее столбцов, так и число ее строк. Продолжим приводить матрицу к главному ступенчатому виду.

III шаг. В полученной ступенчатой матрице каждую строку умножим на число обратное к главному элементу этой строки. Это - элементарные преобразования второго типа.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$ Теперь все главные элементы строк равны 1.

IV шаг. Умножим последнюю ненулевую строку на числа , стоящие над главным элементом этой строки , с противоположным знаком и прибавим к соответствующим строкам матрицы. Это- элементарные преобразования третьего типа . В результате получим, что в последнем главном столбце все элементы, кроме главной 1 равны 0. Затем то же самое проделаем с предпоследней ненулевой строкой и так далее. В результате получим главную ступенчатую матрицу.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{0}{} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу $A \in M_n$ и приведем ее к ступенчатому виду. В этом случае получится верхняя треугольная матрица. Если все столбцы полученной матрицы главные , то ее главный ступенчатый вид - матрица Е, если не все столбцы ступенчатой матрицы главные, то ее последняя строка будет нулевой. Число ненулевых строк ступенчатой матрицы совпадает с числом ее главных столбцов.

Пример. Рассмотрим квадратную матрицу А, главный ступенчатый вид которой будет единичная матрица Е (критерий этого условия мы получим ниже) и проследим за элементарными преобразованиями, указывая соответствующие элементарные матрицы, умножение на которые осуществляет данные преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \overset{Э_1^2}{\rightarrow} \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{Э_1\ \left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{Э_1^2\ \left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Воспользуемся теоремой 6 об умножении на элементарные матрицы.

$E=Э_1^2(\frac{1}{2})\ Э_1\ (\frac{1}{2})\ Э_1^2\ A$. Так как каждое элементарное преобразование обратимо и может быть получено умножением слева на соответствующую элементарную матрицу, то $A= Э_1^2\ \ Э_1\ (2)\ Э_1^2(-\frac{1}{2})\ E$ или $A=Э_1^2\ \ Э_1\ (2)\ Э_1^2(\frac{1}{2})$. Матрица А представлена в виде произведения элементарных матриц! Проведя аналогичное рассуждение в общем случае, получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 8. Если главный ступенчатый вид квадратной матрицы А равен единичной матрице Е, то матрицу А можно представить, как произведение элементарных матриц.

§ 4. Упражнения.

1. E_i^j –базисная матрица. Найти a) $E_i^j\ E_k^m$, b) $A\ E_i^j$

2. Найти все квадратные матрицы такие, что

a) $E_i^1\ A = E_i^1$ для всех $i=1,2,\ldots,n$

b) $E_i^i\ A = A\ E_i^i$ для всех $i=1,2,\ldots,n$

3. След квадратной матрицы – это сумма ее диагональных элементов. $trA = \sum_{i=1}^{n} a_i^i$.

a) доказать, что след произведения двух матриц не зависит от прядка сомножителей.

b) найти все квадратные матрицы А такие, что $trAX =0$ для всех матриц Х того же порядка.

4. A^T - транспонированная матрица, т.е. матрица строками которой служат столбцы матрицы А. Доказать, что

a) $(AB)^T = B^T A^T$

b) если $AA^T = 0$, то $A = 0$.

5. Квадратная матрица называется симметрической, если $A^T = A$.

a) будут ли сумма и произведение симметрических матриц симметрическими матрицами?

b) доказать, что матрицы AA^T и $A^T A$ – симметрические для любой квадратной матрицы A.

6. Квадратная матрица называется кососимметрической, если $A^T = -A$. A и B – кососимметрические матрицы. Будет ли их произведение

a) кососимметрической матрицей ?

b) симметрической матрицей ?

7. Доказать ,что любую квадратную матрицу A можно представить , и притом единственным образом в виде $A = B + C$, где B –симметрическая матрица, а C –кососимметрическая матрица.

8. Матрицы A и B имеют порядок n. $AB=BA$ для любой матрицы B. Доказать, что $A=\lambda E$.

9. Представить матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ как произведение элементарных матриц.

10. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

11. Выяснить, что происходит с матрицей A при умножении справа на элементарную матрицу.

12. Однозначно ли определен ступенчатый (главный ступенчатый) вид матрицы?

Глава 2. Системы линейных уравнений и линейные пространства.

§1. Основные определения.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица A= $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных называется матрицей системы. Элемент a_j^i – коэффициент из j-ого уравнения при неизвестном x_j , b_j – свободный член j -ого уравнения. Обозначим через X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ вектор-столбец неизвестных, а через B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор – столбец свободных членов. Система (1) может быть записана **в** матричном виде, то есть виде матричного уравнения

$$AX = B \qquad (2)$$

Рассмотрим вектор-столбцы матрицы A: $A^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \cdots \\ a_m^1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \cdots \\ a_m^2 \end{pmatrix}$, … $A^n = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \cdots \\ a_m^n \end{pmatrix}$. Система (1) может быть записана в векторном виде, то есть в виде линейного соотношения между столбцами матрицы A и столбцом свободных членов.

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = B \qquad (3)$$

В такой записи неизвестными являются коэффициенты в линейной комбинации вектор-столбцов $A^1, A^2 \ldots A^n$ равной вектор- столбцу B. Добавим в матрицу A еще один столбец- столбец свободных членов. Мы получим матрицу $\widehat{A}$ =(A⋮ B), называемую расширенной матрицей системы (1).

Примеры.

1. $\{2x + 3y - z = 1$ – система из одного уравнения с тремя неизвестными. Матрица системы A=(2 3 -1), расширенная матрица системы $\widehat{A}$ =(2 3 -1⋮ 1).

2 . $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ – система двух уравнений с двумя неизвестными. Матрица системы A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, а расширенная матрица системы $\widehat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$.

По расширенной матрице можно однозначно восстановить исходную систему.

Определение 1. Решением системы (1) называется упорядоченный набор чисел $c_1,c_2,...,c_n$, при подстановке которого вместо неизвестных $x_1,x_2,\dots,x_n$ в уравнения системы получаются верные равенства. Множество решений системы обозначается $V(\widehat{A})$.

В этом случае вектор - столбец $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ является решением матричного уравнения (2), причем каждое решение матричного уравнения (2) определяет решение системы (1).Кроме того линейная комбинация столбцов матрицы системы с коэффициентами c_1,c_2 .....c_n, будет , согласно векторной записи системы (3), равна вектор- столбцу B.

Системы линейных уравнений можно классифицировать по числу их решений.

Система (1) называется совместной, если у нее имеется хотя бы одно решение и несовместной в противном случае. У несовместной системы $V(\widehat{A})$ – пустое множество. Пусть система совместна и, следовательно, $V(\widehat{A})$ не пусто, В этом случае система называется определенной, если у нее имеется только одно решение, и неопределенной в противном случае. Так система $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ очевидно несовместна.

Системы примеров 1 и 2 совместны , причем система примера 2 определенная, так как у нее имеется только одно решение x= $\frac{1}{7}$,y= $\frac{2}{7}$, а система примера 1 неопределенная. У нее есть по крайней мере два различных решения: x=0,y=0, z=-1 и x=1, y=0,z=1. На самом деле решений бесконечно много.

Рассмотрим еще одну классификацию систем линейных уравнений . Система называется однородной , если все свободные члены уравнений равны нулю и неоднородной в противном случае. Однородная система всегда совместна, так как у нее имеется тривиальное решение $x_1=x_2=\dots=x_n=0$

Две системы линейных уравнений $A_1X=B_1$ и $A_2X=B_2$ (матричный вид системы линейных уравнений – удобная запись этой системы !) называются эквивалентными или равносильными, если у них одно и то же множество решений $V(\widehat{A_1}) = V(\widehat{A_2})$.

Рассмотрим систему $A_1X=B_1$ вида (1) и матрицу $P\in M_k^m$.Такую матрицу можно умножить слева на матрицу системы A_1 и на столбец свободных

членов B_1 , так как $A_1 \in M_m^n$, а $B_1 \in M_m^1$.Умножим обе части рассматриваемой системы слева на матрицу P. $PA_1X = PB_1$ –это новая система линейных уравнений. Обозначим PA_1 через A_2 , а PB_1 через B_2 и получим систему $A_2X=B_2$. Если вектор- столбец $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ является решением первой системы уравнений , то есть $A_1C=B_1$,то этот же вектор будет решением второй системы уравнений. Действительно, $P(A_1C)= PB_1$, $(P A_1)C= PB_1$, $A_2C=B_2$ и ,следовательно, $V(\widehat{A_1}) \subset V(\widehat{A_2})$. Предположим, что у матрицы P существует обратная матрица Q, тогда для системы $QA_2X=QB_2$ справедливы аналогичные рассуждения, то есть $V(\widehat{A_2}) \subset V(\widehat{QA_2})$. Но $QA_2 = QPA_1$, $QB_2 =QPB_1$, $QP=E$ и мы видим, что система $QA_2X=QB_2$ - это исходная система $A_1X=B_1$ и , следовательно $V(\widehat{A_2}) \subset V(\widehat{A_1})$.Системы равносильны. Возьмем в качестве матрицы P элементарную матрицу Э порядка m (любую из трех типов). В примере § 2 мы установили обратимость всех элементарных матриц, следовательно системы AX=B и ЭAX=ЭB равносильны. Умножение на элементарную матрицу слева осуществляет соответствующее элементарное преобразование над строками исходной матрицы. $Э\widehat{A} =$ Э(A⋮ B) = (Э A⋮ ЭB). Таким образом нами доказана

Теорема 1. При элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы системы она переходит в эквивалентную.

Из этой теоремы и теоремы 7 (Гаусса) предыдущей главы следует, что любая система линейных уравнений равносильна системе, расширенная матрица которой имеет главный ступенчатый вид. Будем называть такие системы системами главного ступенчатого вида.

§2. Решение систем главного ступенчатого вида.

Пусть AX=B система линейных уравнений, $\hat{A}$ – расширенная матрица этой системы $\hat{A} = (A|B)$, $\widehat{A_{гл.ст.}}$ – матрица главного ступенчатого вида, полученная из $\hat{A}$ с помощью элементарных преобразований над строками матрицы . Заметим, что матрица системы A также принимает главный ступенчатый вид: $A \to A_{гл..ст.}$. Сравним число ненулевых строк матриц $A_{гл..ст.}$ и $\widehat{A_{гл.ст.}}$.

Возможны два случая: —

1) .Число ненулевых строк матрицы $A_{гл..ст.}$ совпадает с числом ненулевых строк матрицы $\widehat{A_{гл.ст.}}$ и равно r . Например, матрица $\widehat{A_{гл.ст.}}$ может иметь следующий вид

$$\widehat{A_{\text{гл.ст.}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В рассмотренном примере все столбцы матрицы А главные (что не обязательно) и идут подряд (что тоже не обязательно).

2). Число ненулевых строк матрицы $A_{\text{гл..ст.}}$ равно r и не совпадает с числом ненулевых строк матрицы $\widehat{A_{\text{гл.ст.}}}$, которое равно r +1. Например, матрица $\widehat{A_{\text{гл.ст.}}}$ может иметь такой вид

$$\widehat{A_{\text{гл.ст.}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В первом случае последним нулевым строчкам соответствуют тривиальные уравнения $x_1 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 = 0$, которым удовлетворяет любой набор чисел.

Эти уравнения можно не рассматривать, а нулевые строки расширенной матрицы отбросить.

Во втором случае (r + 1)-ое уравнение имеет вид $x_1 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 = 1$ и не имеет решений, так как $b_{r+1} = 1$. Следовательно система в целом несовместна.

Рассмотрим систему линейных уравнений , для которой реализуется первый вариант. Покажем, что в этом случае система совместна и опишем $V(\widehat{A})$ в этом случае. Пусть А – матрица системы имеет главный ступенчатый вид, в котором r ненулевых строк(нулевые строки отброшены). Столбцы, в которых стоят главные элементы строк и которые называются главными имеют номера k_1 , ..., k_r . Неизвестные с этими номерами $x_{k1}, \dots, x_{kr}$ называются **г**лавными неизвестными, остальные неизвестные называются свободными. Главные столбцы матрицы А имеют вид: $\bar{A}_{k1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \quad , A_{kr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Перенумеровав неизвестные, этот общий случай можно свести к случаю, когда k_i=i, то есть первые r столбцов - главные.

В этом случае из векторной записи системы (3) $x_1 A_1 + \ldots + x_r A_r + \ldots + x_n A_n = B$ следует, что главное неизвестное x_i встречается только в $i^{ом}$ уравнении с коэффициентом 1 и может быть выражено через свободные. Система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_1^{r+1} * x_{r+1} + \cdots + a_1^n * x_n = b_1, \\ x_2 + a_2^{r+1} * x_{r+1} + \cdots + a_2^n * x_n = b_2, \\ \vdots \\ x_r + a_r^{r+1} x_{r+1} + \cdots + a_r^n x_n = b_r \end{cases} \qquad (4)$$

Перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные в правые части уравнений. Такая процедура называется разделением неизвестных. Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_1^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_1^n * x_n, \\ x_2 = b_2 - a_2^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_2^n * x_n, \\ \vdots \\ x_r = b_r - a_r^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_r^n * x_n \end{cases} \qquad (5)$$

$\ddots$

Если придать свободным неизвестным произвольные числовые значения $x_{r+1} = c_{r+1}^0, \ldots, x_n = c_n^0 -$, то главные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ можно однозначно определить из системы (5). Полученный набор чисел очевидно будет решением системы. Этому набору чисел соответствует вектор-столбец $X_0 = \begin{pmatrix} c_1^0 \\ \ldots \\ c_n^0 \end{pmatrix}$ – вектор решения. Множество же всех решений системы можно описать следующим :

$$V(\widehat{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 - a_1^{r+1} c_{r+1} - \cdots - a_1^n \\ \ldots \\ b_r - a_r^{r+1} c_{r+1} - \cdots - a_r^n c_n \\ c_{r+1} \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, c_{r+1} \ldots c_n \in R \right\} \qquad (6)$$

Таким образом, если в совместной системе главного ступенчатого вида есть свободные неизвестные, то существует бесконечно много решений этой системы. Пусть матрица исходной системы линейных уравнений $A \in M_m^n$ ($n -$ число неизвестных) и число ненулевых строк матрицы $A_{гл.ст.}$ равно r, тогда справедлива оценка $r \leq \min(n, m)$. Если число ненулевых строк матрицы $A_{гл..ст}$. равно числу ненулевых строк матрицы $\widehat{A_{гл.ст.}}$ и равно числу неизвестных n (r=n), то система определена и имеет единственное решение: $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_n = b_n$.Если число ненулевых строк матрицы $A_{гл.ст}$ равно числу ненулевых строк матрицы $\widehat{A_{гл.ст.}}$ и $r < n$, то

система имеет бесконечно много решений. (Бывает при любом соотношении n и m). Если число ненулевых строк матрицы $A_{гл.ст}$ меньше на 1 числа ненулевых строк матрицы $\widehat{A_{гл.ст.}}$, то система несовместна. Если система однородна, то число ненулевых строк матрицы $A_{гл.ст}$ равно числу ненулевых строк матрицы $\widehat{A_{гл.ст.}}$ всегда. Однородная система всегда совместна. Описанный выше метод решения систем линейных уравнений называется методом Гаусса.

Примеры. Применим метод Гаусса к решению систем линейных уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ Это – неоднородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Расширенная матрица этой системы $\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Приведем эту матрицу к главному ступенчатому виду

$\hat{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \widehat{A_{гл.ст.}}$ -матрица главного ступенчатого вида. Запишем соответствующую систему линейных уравнений главного ступенчатого вида $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$. Разделим неизвестные на главные и свободные. x_1 и x_2- главные неизвестные, соответствующие первым двум главным столбцам матрицы $\widehat{A_{гл.ст.}}$ а x_3 – свободное неизвестное. После разделения неизвестных система принимает вид $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -x_3 - 1 \end{cases}$. Придаем свободному неизвестному x_3 произвольное значение $x_3 = \alpha$ и находим из последней системы уравнений значения главных неизвестных $x_1 = 1, x_2 = -\alpha - 1$.

Любой упорядоченный набор из чисел $1, -\alpha - 1, \alpha$ является решением исходной системы. В силу равносильности всех систем, рассмотренных в этом примере других решений нет. Запишем решение системы , как вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Множество решений системы $V(\widehat{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in R \right\}$. Вектор X можно записать в виде $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Первый вектор

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ является решением системы, а второй $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, присутствующий в записи X –нет. Что же это за вектор?

Рассмотрим систему линейных уравнений с той же матрицей A, но со свободными членами всеми равными нулю $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Это – однородная система линейных уравнений. Вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ будет решением этой системы.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - \mathrm{x}_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2\mathrm{x}_4 = 0 \end{cases}$

Это - однородная система двух линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Запишем расширенную матрицу этой системы $\widehat{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$. Эта матрица уже имеет ступенчатый вид. Приведем ее к главному ступенчатому виду.

$\widehat{\mathrm{A}} \rightarrow \widehat{\mathrm{A}_{\text{гл.ст.}}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$. Перейдем к соответствующей системе главного ступенчатого вида $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. Эта система равносильна исходной!

Разделяем неизвестные на главные и свободные. В нашем случае x_1 и x_2 – главные неизвестные, а x_3 и x_4 - свободные. В каждом уравнении имеется только одно главное неизвестное , номер которого совпадает с номером уравнения. Выражаем главные неизвестные через свободные $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$. Придаем свободным неизвестным x_3 и x_4 произвольное значение x_3 =α , x_4 =β и находим соответствующие значения главных неизвестных x_1 = -2α +3β , x_2 = α -2β. При любых α и β упорядоченный набор чисел -2α +3β , α -2β, α , β является решением исходной системы. Множество решений системы $\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha + 3\beta \\ \alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in R \right\}$. Вектор X можно записать в виде

X=$\begin{pmatrix} -2\alpha+3\beta \\ \alpha-2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$= $\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$+$\beta\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. И первый вектор $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и второй $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ являются решениями системы.

§ 3. Линейные координатные пространства.

Мы рассматривали вектор- столбцы X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ как матрицы, состоящие из одного столбца. И можно складывать, умножать на число, образовывать из них линейные комбинации и получать новые вектор- столбцы. В дальнейшем будем их называть просто n- мерными векторами и обозначать **x**= $\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Определение2**.** Множество n-мерных векторов с операциями сложения векторов и умножения на действительные числа называется n-мерным линейным координатным пространством и обозначается R^n.

$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_i \in R \right\}$. Если n=3, то трехмерный вектор **x** = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ можно отождествить с вектором **x** =x_1**i**+x_2 **j** +x_3 **k** , причем x_1,x_2 ,x_3 – координаты вектора **x** в базисе **i**, **j** , **k** Многие понятия введенные для векторов пространства V^3 в курсе геометрии можно перенести на векторы пространства R^n.

Определение 3. Векторы $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная **0**= $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то есть, если существуют числа $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ не все равные нулю ($\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0$)и такие, что λ_1 $\mathbf{a^1}$ + λ_2 $\mathbf{a^2}$ +... +$\lambda_к$ $\mathbf{a^k}$ =**0**. В противном случае векторы называются линейно независимыми.

Свойства линейной зависимости, доказанные для векторов пространства V^3 сохраняются в пространстве R^n , так как при их доказательстве мы использовали только определение линейной зависимости векторов. В том числе и критерий линейной зависимости. Сейчас мы

сформулируем еще один критерий линейной зависимости векторов в пространстве R^n.

Теорема 2.Пусть $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$ векторы пространства R^n , тогда они линейно зависимы в том и только в том случае, когда существует нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений с матрицей А, столбцы которой есть векторы $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$.

Доказательство .Рассмотрим векторы $\mathbf{a^1}=\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \cdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}$,..., $\mathbf{a^k} = \begin{pmatrix} a_1^k \\ \cdots \\ a_n^k \end{pmatrix}$ и матричную запись системы $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Перейдем к векторной записи этой системы $x_1\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \cdots \\ a_n^1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_1^2 \\ \cdots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \cdots + x_k\begin{pmatrix} a_1^k \\ \cdots \\ a_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.Существование нетривиального решения системы означает, что существует набор чисел $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, среди которых есть хотя бы одно отличное от нуля , который является решением системы. Подставив эти числа в векторную запись системы , получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$ равную $\mathbf{0}$.

Теорема 3.Пусть $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k} \in R^n$. Если k $>$ n, то векторы линейно зависимы.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме вопрос о линейной зависимости векторов $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$ сводится к вопросу о существовании нетривиального решения однородной системы линейных уравнений

$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ В этой системе число уравнений n, а число неизвестных k. Но мы знаем, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то в системе есть свободные неизвестные и , следовательно, есть нетривиальные решения. Поэтому, если $k > n$, то система векторов $\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$ линейно зависима.

Теорема 4. В пространстве R^n существует n линейно независимых векторов.

Доказательство. Рассмотрим векторы $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и

убедимся, что они линейно независимы. Действительно, матрица соответствующей однородной системы из теоремы 2 - единичная матрица Е. Система $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ имеет единственное тривиальное решение. решение $x_1 = 0, \dots, x_n = 0,$ следовательно векторы $\mathbf{e_1}$, ..., $\mathbf{e_n}$ линейно независимы.

Определение 4. Пусть *M* - подмножество векторов в R^n. Векторы $\mathbf{m_1,\dots, m_k}$ называются базисом множества М, если $\mathbf{m_1,\dots, m_k}$ - максимальная линейно независимая система векторов этого подмножества (то есть добавление любого вектора из М к этой системе делает ее линейно зависимой).

Пример. Система векторов $\mathbf{e_1}$, ..., $\mathbf{e_n}$ является базисом пространства R^n . Действительно, эти векторы линейно независимы и система этих векторов максимальна, так как по теореме 3 максимальная линейно независимая система в R^n не может содержать больше, чем n векторов. Базис $\mathbf{e_1}$, ..., $\mathbf{e_n}$ называется стандартным.

Существуют ли другие базисы в R^n ? Если существуют, то могут ли они содержать различное количество векторов.? В пространстве R^3 , как известно, базисов бесконечно много, но все они содержат одинаковое число векторов. Любые три некомпланарных вектора образуют базис. Для построения такого базиса достаточно взять три вектора $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ такие, что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ниже мы получим аналогичный результат в пространстве R^n .

Теорема 5. Пусть $\mathbf{m_1,\dots, m_k}$ - базис множества М, тогда любой вектор $\mathbf{m}$ является линейной комбинацией базисных векторов. То есть существуют числа $x_1, \dots, x_k$ такие, что $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \boldsymbol{m}_i$.

Доказательство. $\mathbf{m_1,\dots,m_k}$– базис множества М, т.е. максимальная совокупность линейно независимых векторов, то для любого вектора $\mathbf{m}$ система $\mathbf{m_1,\dots, m_k, m}$ линейно зависима, то есть существуют числа λ_0, $\lambda_1,\dots,\lambda_к$ не все равные нулю и такие, что $\lambda_0 \, \boldsymbol{m} + \lambda_1 \boldsymbol{m_1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{m_k} = \mathbf{0}$. Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, так как иначе $\lambda_1 \boldsymbol{m_1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{m_k} = \mathbf{0}$ и среди

коэффициентов λ_i i=1,2..k есть ненулевые. Но это противоречит линейной независимости базисных векторов. Если $\lambda_0 \neq 0$, то

$$\boldsymbol{m} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\boldsymbol{m_1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0}\boldsymbol{m_k} = x_1\,\boldsymbol{m_1} + \ldots + x_k\,\boldsymbol{m_k}\text{, где } x_i == -\frac{\lambda_i}{\lambda_0}.$$

Определение 5. Числа $x_1, \ldots x_k$ называются координатами вектора $\boldsymbol{m}$ в данном базисе. Это- коэффициенты в линейной комбинации базисных векторов равной вектору $\mathbf{m}$. Запись $\mathbf{m} = x_1\,\boldsymbol{m_1} + \ldots + x_k\,\boldsymbol{m_k}$ – разложение вектора по базису.

Пример. Найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в стандартном базисе $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$. Из определения 5 следует, что для нахождения координат нужно разложить вектор $\mathbf{x}$ в линейную комбинацию базисных векторов $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\,\mathbf{e_1} + \ldots + x_n\,\boldsymbol{e}_n . \qquad (7)$$

Теорема 6. Любые два базиса подмножества M в R^n содержат одинаковое число векторов.

Прежде, чем доказывать эту теорему, сформулируем и докажем важное вспомогательное утверждение.

Основная лемма о двух системах векторов. Если линейно независимая система векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^k}$ в пространстве R^n линейно выражается через векторы другой системы векторов $\mathbf{b^1}, \mathbf{b^2}, \ldots, \mathbf{b^l}$, то $l \geq k$.

Доказательство. Запишем выражение векторов первой системы через векторы второй системы $\mathbf{a^1} = \alpha_1^1\,\boldsymbol{b^1} + \ldots + \alpha_l^1\,\boldsymbol{b^l}$, …, $\mathbf{a^k} = \alpha_1^k\,\boldsymbol{b^1} + \ldots + \alpha_l^k\,\boldsymbol{b^l}$. Предположим, что $l < k$ и покажем, что это предположение приводит к противоречию с линейной независимостью системы векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^k}$. Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов с коэффициентами $x_1, \ldots, x_к$. $x_1\,\boldsymbol{a}^1 + \cdots + x_k\boldsymbol{a^k} = x_1\,(\alpha_1^1\boldsymbol{b^1} + \ldots + \alpha_l^1\,\boldsymbol{b^l}) + \ldots + x_к\,(\alpha_1^k\boldsymbol{b^1} + \ldots + \alpha_l^k\,\boldsymbol{b^l}) = (x_1\,\alpha_1^1 + \ldots + x_к\,\alpha_1^k)\,\mathbf{b^1} + \ldots + (x_1\,\alpha_l^1 + \ldots + x_к\,\alpha_l^k)\,\mathbf{b^l}$. Это - линейная комбинация векторов $\mathbf{b^1}, \mathbf{b^2}, \ldots, \mathbf{b^l}$, про линейную зависимость или независимость которых ничего неизвестно. Однако, если числа стоящие в скобках будут равны нулю, то линейная комбинация, как векторов $\mathbf{b^1}, \mathbf{b^2}, \ldots, \mathbf{b^l}$, так и векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^k}$, будет равна нулевому вектору.

$\begin{cases} x_1\,\alpha_1^1 + \ldots + x_k\,\alpha_1^k = 0 \\ \quad\ldots. \\ x_1\,\alpha_l^1 + \ldots + x_k\,\alpha_l^k = 0 \end{cases}$ - однородная система l линейных уравнений с k неизвестными. Такая система совместна и имеет бесконечно много решений при $l < k$, в том числе и нетривиальных. Но наличие нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^k}$ равной $\mathbf{0}$ противоречит линейной независимости этих векторов. Полученное противоречие проистекло из предположения, что $l < k$. Следовательно $l \geq k$.

Докажем теорему 6. Пусть $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^k}$ и $\mathbf{b^1}, \mathbf{b^2}, \ldots, \mathbf{b^l}$ два базиса множества M, тогда каждая из этих систем линейно независима и ,согласно теореме 5, линейно выражается через векторы другой. Из основной леммы следуют оценки $l \geq k$ и $k \geq l$? Следовательно $l = k$.

Теорема 7. Координаты вектора в данном базисе определены однозначно.

Доказательство. Предположим, что вектор $\mathbf{m}$ раскладывается по базису $\mathbf{m_1,\ldots,m_k}$ двумя способами $\mathbf{m} = x_1\boldsymbol{m_1} + \ldots + x_k\boldsymbol{m_k}$ и $\mathbf{m} = y_1\boldsymbol{m_1} + \ldots + y_k\boldsymbol{m_k}$, тогда $(x_1 - y_1)\,\boldsymbol{m_1} + \ldots + (x_k - y_k)\,\boldsymbol{m_k} = \mathbf{0}$.

Мы получили линейную комбинацию линейно независимых базисных векторов равную $\mathbf{0}$. Такое возможно только, если все коэффициенты в линейной комбинации равны нулю. $x_i - y_i = 0$ при i=1,2,..,k. То есть $x_i = y_i$.

Теорема 8. При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число – умножаются на это число.

Доказательство. Рассмотрим два вектора $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ и их разложение по базису $\mathbf{m_1,\ldots,m_k}$: $x_1\boldsymbol{m_1} + \ldots + x_k\boldsymbol{m_k}$ и $\mathbf{n} = y_1\boldsymbol{m_1} + \ldots + y_k\boldsymbol{m_k}$. Сложим эти векторы $\mathbf{m+n} \equiv (x_1+y_1)\,\boldsymbol{m_1} + \ldots + (x_k+y_k)\,\boldsymbol{m_k}$. Это -разложение вектора $\mathbf{m+n}$ по базису, значит в скобках стоят координаты. Умножим вектор $\mathbf{m}$ на число . $\lambda\,\mathbf{m} = \lambda(x_1\boldsymbol{m_1} + \ldots + x_k\boldsymbol{m_k}) = (\lambda x_1)\boldsymbol{m_1} + \ldots + (\lambda x_k)\boldsymbol{m_k}$ В скобках стоят координаты вектора $\lambda\,\mathbf{m}$.

§ 4. Линейные подпространства.

Определение 6. Подмножество L линейного координатного пространства R^n называется линейным подпространством, если оно обладает следующими свойствами

1. $\mathbf{0} \in L$

2. Если $\boldsymbol{v_1} \in$ L и $\boldsymbol{v_2} \in$ L, то $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in$ L.
3. Если $\mathbf{v} \in$ L и $\lambda \in$ R, то $\lambda\mathbf{v} \in$ L.

Линейные подпространства в R^n являются естественным обобщением одномерных векторных пространств V^1 (прямых) и двумерных векторных пространств V_2 (плоскостей) в трехмерном векторном пространстве V^3.

Действительно, опишем все линейные подпространства L в линейном пространстве R^3 , для которого геометрической моделью служит трехмерное векторное пространство V^3. Согласно свойству 1 определения 6 , L не пусто и содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$. Может оказатся , что других векторов в L нет. Так как свойства 2 и 3 определения в этом случае выполняются, то L={0}-линейное подпространство. Если в линейном подпространстве L есть хотя бы один отличный от нуля вектор $\boldsymbol{a}$, то согласно свойству 3 определения 6,в подпространстве L содержатся все векторы коллинеарные $\boldsymbol{a}$. Может оказаться, что других векторов в L нет . В этом случае множество $L= \{\lambda\boldsymbol{a};\ \lambda \in R\}$ - линейное подпространство, так как все три свойства определения выполняются. Геометрической моделью L в этом случае является одномерное векторное пространство V_1 .Пусть в линейном подпространстве L есть два неколлинеарных (линейно независимых) вектора $\boldsymbol{a}$ и $\mathbf{b}$, тогда из свойств 2 и 3 следует, что любая линейная комбинация этих векторов тоже находится в L.Если этим все линейное подпространство L исчерпывается, то есть

$L= \{\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b};\ \lambda, \mu \in R\}$. Геометрической моделью L в этом случае будет двумерное векторное пространство V^2 .Так как три линейно независимых вектора линейно порождают все трехмерное пространство V^3 ,которое удовлетворяет всем трем свойствам линейного подпространства, то R^3 – линейное подпространство. Других, кроме перечисленных выше линейных подпространств в R^3 нет. Координатное пространство R^3 и $L=\{\mathbf{0}\}$ называются тривиальными подпространствами.

Определение7. Линейной оболочкой векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k}$ в пространстве R^n называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Линейная оболочка векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k}$ обозначается $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k})$

Теорема 9. Линейная оболочка векторов $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k})$ является линейным подпространством пространства R^n .

Доказательство. Проверим, что выполняются все три свойства определения линейного подпространства. Нулевой вектор принадлежит линейной оболочке, так как $\mathbf{0}=0\,\mathbf{a^1}+0\,\mathbf{a^2}+...+0\mathbf{a^k}$. Если $\mathbf{v_1}=\alpha_1\,\mathbf{a^1} + \alpha_2\,\mathbf{a^2}+...+\alpha_k\,\mathbf{a^k}$ и $\mathbf{v_2}=\beta_1\,\mathbf{a^1} + \beta_2\,\mathbf{a^2}+...+\beta_k\,\mathbf{a^k}$ две различных линейных комбинации (два вектора из линейной оболочки векторов $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k})$ то их сумма $\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}=$ $(\alpha_1\,\mathbf{a^1} + \alpha_2\,\mathbf{a^2}+...+\alpha_k\,\mathbf{a^k})+(\beta_1\,\mathbf{a^1} + \beta_2\,\mathbf{a^2}+...+\beta_k\,\mathbf{a^k}) =(\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{a^1} + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{a^2}$

$+\ldots+(\alpha_к+\beta_k)\ \mathbf{a^k}$ – линейная комбинация векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}$ и следовательно вектор множества $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k})$. Если $\mathbf{v}=\alpha_1\ \mathbf{a^1}+\alpha_2\ \mathbf{a^2}+\ldots+\alpha_k\ \mathbf{a^k}$ – вектор множества $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k})$, то $\lambda\,\boldsymbol{v}=\lambda(\alpha_1\ \mathbf{a^1}+\alpha_2\ \mathbf{a^2}+\ldots+\alpha_k\ \mathbf{a^k})=\lambda\alpha_1\ \mathbf{a^1}+\lambda\alpha_2\ \mathbf{a^2}+\ldots+\lambda\ \alpha_k\ \mathbf{a^k}$ - линейная комбинация векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}$, то есть элемент множества $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k})$.

Все линейные подпространства L, в пространства R^3, описанные выше, являются линейными оболочками некоторого множества векторов. Можно ли утверждать, что линейная оболочка векторов является универсальным способом описания линейных подпространств в R^n ?

Теорема 10. Любое линейное подпространство в R^n является линейной оболочкой своего базиса.

Доказательство. Рассмотрим линейное подпространство L и его базис. Заметим, что в любом подмножестве M пространства R^n, содержащем хотя бы один ненулевой вектор, существует базис - максимальная линейно независимая система векторов. В этой системе, как следует из теоремы 2 §3, не более, чем n векторов. Пусть $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}$ базис подпространства L, тогда согласно теореме 4 §3 любой вектор $\mathbf{v}\in L$ можно записать в виде линейной комбинации базисных векторов $\mathbf{v}=\alpha_1\ \mathbf{a^1}+\alpha_2\ \mathbf{a^2}+\ldots+\alpha_k\mathbf{a^k}$. Следовательно, $L\subset L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k})$. Верно и обратное включение. Действительно, векторы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}$ принадлежат множеству L. В силу того, что L- линейное подпространство , то есть множество замкнутое относительно операций сложения и умножения, любая линейная комбинация векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}$ принадлежит L. $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}) \subset L$. Множества совпадают $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^k}) = L$.

Однако, не только линейная оболочка векторов является универсальным примером линейного подпространства. Другим таким примером будет множество решений $V(\widehat{A})$ **о**днородной системы линейных уравнений .

Теорема 11. Множество решений $V(\widehat{A})$ однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством в пространстве R^n, где n число неизвестных системы.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений AX=O и ее множество решений $V(\widehat{A})$. Каждое решение – набор из n чисел, где n-число неизвестных в системе. Покажем, что это множество удовлетворяет всем трем свойствам определяющим линейное подпространство в пространстве R^n .Действительно, $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ является решением однородной системы и следовательно $\mathbf{0}\in V(\widehat{A})$.

Если $X_1 \in V(\widehat{A})$ и $X_2 \in V(\widehat{A})$, то есть $AX_1=O$ $AX_2=O$, то $A(X_1 + X_2)= AX_1+ AX_2=O$.(Дистрибутивность умножения матриц по отношению к сложению). Таким образом $X_1 + X_2 \in V(\widehat{A})$. Наконец, если $AX=O$, то $A(\lambda X) = \lambda AX=O$ и множество $V(\widehat{A})$- замкнуто относительно операций сложения и умножения на число.

Заметим, что для неоднородной системы линейных уравнений множество решений $V(\widehat{A})$ не является линейным подпространством, ибо ни одно свойство линейного подпространства не выполняется для этого множества.

Теорема 12. Любое линейное подпространство в R^n является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений (может быть задано некоторой системой однородных линейных уравнений).

Доказательство . Будет описан алгоритм нахождения однородной системы линейных уравнений, задающей данное линейное подпространство. Пусть линейное подпространство L задано, как линейная оболочка векторов L = $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k})$, где $\mathbf{a^1}=\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \cdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}$,..., $\mathbf{a^k} = \begin{pmatrix} a_1^k \\ \cdots \\ a_n^k \end{pmatrix}$. Вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ принадлежит линейному подпространству L тогда и только тогда, когда его можно записать в виде $\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \cdots \\ a_n^1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_1^2 \\ \cdots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_1^k \\ \cdots \\ a_n^k \end{pmatrix}$. Но это – векторная запись неоднородной системы линейных уравнений, в которой λ_1 , ... , $\lambda_к$ – неизвестные, вектор $\mathbf{x}$ – столбец свободных членов. Неоднородные системы линейных уравнений не всегда совместны. Для совместности системы необходимо и достаточно , чтобы после приведения расширенной матрицы системы $\widehat{A}$ к главному ступенчатому виду столбец свободных членов не оказался главным. С помощью этого условия мы получим искомую однородную систему уравнений, задающую подпространство L.

Пример. Для простоты записи, доказательство продолжим на конкретном примере в пространстве R^4 . Пусть линейное подпространство L = $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2})$, где $\mathbf{a^1}= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a^2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in$ L тогда и только тогда, когда система уравнений с расширенной матрицей $\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 \\ 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$ совместна. Приведем матрицу $\widehat{A}$ к главному ступенчатому

виду $\begin{pmatrix}1 & -1 & x_1\\ 0 & -2 & x_2\\ 2 & 0 & x_3\\ 1 & 1 & x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & x_1\\ 0 & -2 & x_2\\ 0 & 2 & x_3-2x_1\\ 1 & 1 & x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & x_1\\ 0 & -2 & x_2\\ 0 & 2 & x_3-2x_1\\ 0 & 2 & x_4-x_1\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1 & -1 & x_1\\ 0 & -2 & x_2\\ 0 & 0 & x_3-2x_1+x_2\\ 0 & 0 & x_4-x_1+x_2\end{pmatrix}$.

Уже на этом этапе приведения матрицы $\widehat{A}$ к главному ступенчатому виду видно, что первые два столбца будут главными, а столбец свободных членов не будет главным тогда и только тогда, когда две последние строки будут нулевыми. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $x_3-2x_1+x_2=0$ и

$x_4-x_1+x_2=0$.

$\begin{cases}x_3-2x_1+x_2=0\\ x_4-x_1+x_2=0\end{cases}$ –это и есть искомая система уравнений, задающая подпространство L.

§5. Ранг матрицы

Поскольку любые два базиса подмножества M в пространстве R^n содержат одинаковое число векторов (теорема 5 §3) , можно ввести важную числовую характеристику линейного подпространства-его размерность.

Определение 8. Размерностью линейного подпространства L называется число векторов в его базисе, которое обозначается dim L.

Пример. Размерность линейного координатного пространства R^n равна n (dim R^n =n), а размерность линейного подпространства состоящего из нулевого вектора равна 0 (dim {**0** } =0). Рассмотрим линейную оболочку векторов L= L($\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$) и найдем ее размерность.

Теорема13. Размерность линейной оболочки L($\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^m}$) равна максимальному числу линейно независимых векторов в системе $\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^m}$, то есть числу векторов в базисе конечного множества $\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$,..., $\mathbf{a^k}$ образуют базис конечного множества M=$\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$ (m≥ k), тогда каждый вектор множества M можно записать в виде линейной комбинации базисных векторов (теорема 4 § 3). В частности , $a^{k+1}=\alpha_1^{к+1}a^1+\cdots+\alpha_к^{к+1}a^k$, ..., a^m =

$\alpha_1^m \mathbf{a^1} + \cdots + \alpha_k^m \mathbf{a^k}$. Покажем, что векторы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k}$ образуют базис линейной оболочки $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m})$. Векторы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k}$ линейно независимы, как базис множества М. Проверим, что $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k}$ максимальная линейно независимая система векторов в линейной оболочке $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m})$. Для этого достаточно убедиться в том, что любой вектор $\mathbf{a}$ из $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m})$ является линейной комбинацией векторов системы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^k}$. В этом случае добавление любого вектора к системе превращает ее в линейно зависимую. $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a^1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{a^k} + \lambda_{k+1} \mathbf{a^{k+1}} + \cdots + \lambda_m \mathbf{a^m} = \lambda_1 \mathbf{a^1} + \cdots + \lambda_k \mathbf{a^k} + \lambda_{k+1} (\alpha_1^{к+1} \mathbf{a^1} + \cdots + \alpha_к^{к+1} \mathbf{a^k}) + ... + \lambda_m (\alpha_1^m \mathbf{a^1} + \cdots + \alpha_k^m \mathbf{a^k}) = (\lambda_1 + \lambda_{k+1} \alpha_1^{к+1} + \cdots + \lambda_m \alpha_1^m) \mathbf{a^1} + ... + (\lambda_k + \lambda_{k+1} \alpha_k^{к+1} + \cdots + \lambda_m \alpha_k^m) \mathbf{a^k}$. Следовательно, $\dim L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}) = k$.

Выясним, как искать базис конечной системы векторов.

Определение 9. Рангом матрицы $A \in M_m^n$ называется максимальное число линейно независимых столбцов этой матрицы и обозначается rkA.

Ранг матрицы определяет число базисных векторов множества столбцов матрицы и, согласно предыдущей теореме , совпадает с размерностью линейной оболочки ее столбцов.

Примеры.

a) $A = O = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $rkA = 0$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $rkA = 1$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $rkA = 3$

Теорема 14. Ранг матрицы главного ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Рассмотрим матрицу главного ступенчатого вида $A_{гл.ст}$, в которой r ненулевых строк. Ее главные столбцы- векторы $\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_r}$, а остальные столбцы (последние n-r координат у всех векторов нулевые) линейно выражаются через главные столбцы.(См. формулу 1 §3). Тем самым главные столбцы образуют базис множества столбцов матрицы главного ступенчатого вида. Следовательно $rk\, A_{гл.ст} = r$.

Следствие. Ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.

Известно, что любую матрицу с помощью элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому и к главному ступенчатому виду. Но что происходит с рангом матрицы при этих преобразованиях пока нам неизвестно.

Рассмотрим произвольный набор векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}$ пространства R^n .Верное равенство вида $\alpha_1\mathbf{a^1} + \alpha_2\,\mathbf{a^2} + ... + \alpha_m\,\mathbf{a^m} = \mathbf{0}$ называется линейным соотношением между векторами $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}$. Например, если $\mathbf{a^1} = 2\,\mathbf{a^2}$, то это- линейное соотношение между векторами $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}$, так как $\mathbf{a^1} - 2\,\mathbf{a^2} + 0\,\mathbf{a^3} + ... + 0\,\mathbf{a^m} = \mathbf{0}$.Если векторы системы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}$ линейно зависимы, то между ними существуют нетривиальные линейные соотношения ,а если линейно независимы, то – только тривиальное.

Теорема 15. При элементарных преобразованиях над строками матрицы $A \in M_m^n$ линейные соотношения между ее столбцами сохраняются.

Доказательство. Рассмотрим векторную запись однородной системы линейных уравнений вида $x_1\mathbf{a^1} + x_2\,\mathbf{a^2} + ... + x_n\,\mathbf{a^n} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^n}$ – столбцы матрицы системы А. Любое линейное соотношение $\alpha_1\mathbf{a^1} + \alpha_2\,\mathbf{a^2} + ... + \alpha_n\,\mathbf{a^n} = \mathbf{0}$ между векторами $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^n}$ задает набор чисел α_1 ,..., α_n , который является решением системы и наоборот, любое решение рассматриваемой системы определяет линейное соотношение между столбами матрицы А. При элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы система переходит в эквивалентную, то есть множество решений не меняется и , следовательно ,не меняются линейные соотношения между столбцами.

Следствие 1. При элементарных преобразованиях над строками матрицы линейная зависимость или линейная независимость столбцов сохраняется.

Следствие 2.При элементарных преобразованиях над строками матрицы ранг матрицы не меняется.

Метод нахождения ранга матрицы и базиса конечной системы векторов.

.Для нахождения ранга матрицы нужно привести матрицу к ступенчатому (к главному ступенчатому) виду и посчитать число ненулевых строк полученной матрицы. Это число и будет рангом матрицы.

Для нахождения базиса конечного множества векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}$ или размерности линейной оболочки $L(\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m})$ нужно записать матрицу А, столбцами которой будут векторы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},..., \mathbf{a^m}$. $A \in M_n^m$.Затем привести ее к главному ступенчатому виду. Число ненулевых строк будет рангом матрицы. $rk\ A = r$. Главные столбцы, как следует из доказательства теоремы 2, имеют вид $\mathbf{e_1}$, ..., $\mathbf{e_r}$ и являются базисом

столбцов матрицы $A_{\text{гл.ст}}$. Остальные столбцы этой матрицы линейно выражаются через главные столбцы естественным образом .Из теоремы 3 следует, что столбцы исходной матрицы А с теми же номерами, что и главные столбцы матрицы $A_{\text{гл.ст}}$ образуют базис множества векторов $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2},\ldots, \mathbf{a^m}$. Остальные векторы множества линейно выражаются через базисные векторы с теми же коэффициентами, с какими столбцы матрицы $A_{\text{гл.ст}}$ теми же номерами выражаются через векторы $\mathbf{e_1}$, ..., $\mathbf{e_r}$

Пример. Рассмотрим множество векторов $\mathbf{a^1}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a^3}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a^4}=\begin{pmatrix}-2\\1\\8\end{pmatrix}$ $\mathbf{a}^5=\begin{pmatrix}4\\7\\2\end{pmatrix}$. Найдем базис этой системы векторов и выразим остальные векторы через базисные. Согласно методу описанному выше ,запишем матрицу $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$, в столбцах которой стоят векторы рассматриваемой системы, и приведем ее к главному ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&-0&-1&5&-1\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}\to$$
$$\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&-0&-1&5&-1\\0&0&-2&10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$
$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-1&2\\0&0&1&-5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{13}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

Обозначим полученную матрицу главного ступенчатого вида через В, а ее столбцы через , $\mathbf{b^1}$ … , $\mathbf{b^5}$.Базисные столбцы – первый и третий, то есть $\mathbf{b^1}=\mathbf{e^1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b^3}=\mathbf{e^2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Выразим остальные столбцы матрицы В через базисные $\mathbf{b^2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\mathbf{b^1}$, $\mathbf{b^4}=\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\-5\\0\end{pmatrix}=\frac{13}{2}\mathbf{b^1}-5\mathbf{b^3}$, $\mathbf{b^5}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\mathbf{b^1}+\mathbf{b^3}$.

Для столбцов матрицы A по теореме 3 справедливы те же соотношения. Таким образом

$\mathbf{a^1} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$ и $\mathbf{a^3} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$ - базис системы векторов $\mathbf{a^1}$,..., $\mathbf{a^5}$, причем

$\mathbf{a^2} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{a^1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a^4} = \begin{pmatrix}-2\\1\\8\end{pmatrix} = \frac{13}{2}\mathbf{a^1} - 5\ \mathbf{a^3} = \frac{13}{2}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$,

$\mathbf{a^5} = \begin{pmatrix}4\\7\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{a^1} + \mathbf{a^3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$.

Ранг матрицы A равен рангу матрицы B и равен 2.

Используя понятие ранга матрицы можно сформулировать критерий совместности неоднородной системы линейных уравнений.

Теорема16. Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда , когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы ($\mathrm{rk}\,A = \mathrm{rk}\,\hat{A}$).

Доказательство .Приведем $\hat{A}$ к главному ступенчатому виду $\hat{A}_{\text{гл.ст.}}$, при этом матрица A приведется к $A_{\text{гл.ст.}}$ Согласно следствию 2 из теоремы 3 при элементарных преобразованиях над строками матрицы ее ранг не меняется.

$\mathrm{rk}\,A = \mathrm{rk}\,A_{\text{гл.ст.}}$, а $rk\hat{A} = \mathrm{rk}\,\hat{A}_{\text{гл.ст}}$.Ранг матрицы главного ступенчатого вида равен числе ее ненулевых строк. Линейная система совместна тогда и только тогда, когда столбец свободных членов не является главным. Но это бывает в том и только в том случае, когда у матриц $A_{\text{гл.ст.}}$ и $\hat{A}_{\text{гл.ст.}}$ одинаковое число ненулевых строк, то есть одинаковые ранги.

§ 6. Фундаментальная система решений. Формула общего решения.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений AX=O и ее множество решений $V(\widehat{A})$. В теореме 3 § 4 было доказано, что $V(\widehat{A})$- линейное подпространство в R^n , где n- число неизвестных в системе. Будем называть $V(\widehat{A})$ пространством решений однородной системы.

Определение10. Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис в пространстве решений этой системы.

Это- конечный набор решений $\mathbf{c^1}=\begin{pmatrix} c_1^1 \\ \cdots \\ c_n^1 \end{pmatrix}$,..., $\mathbf{c^k}=\begin{pmatrix} c_1^k \\ \cdots \\ c_n^k \end{pmatrix}$, причем k≤n. Эти векторы линейно независимы и вектор решения $\mathbf{x} \in V(\widehat{A})$ линейно выражается через векторы $\mathbf{c^1}, \mathbf{c^2},..., \mathbf{c^k}$

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{c^1} + \alpha_2 \mathbf{c^2} + ... + \alpha_к \mathbf{c^k} = \alpha_1 \begin{pmatrix} c_1^1 \\ \cdots \\ c_n^1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} c_1^2 \\ \cdots \\ c_n^2 \end{pmatrix} + ... + \alpha_к \begin{pmatrix} c_1^к \\ \cdots \\ c_n^к \end{pmatrix} \quad (8)$$

Возникает естественный вопрос. Чему равно число k – число векторов в фундаментальной системе решений ? Согласно определению 1 предыдущего параграфа, размерность пространства решений будет равна k.dim $V(\widehat{A})$=k.

Теорема 17.(О размерности пространства решений). dim $V(\widehat{A})$=n-r , где n-число неизвестных в однородной системе, а r- ранг матрицы A-матрицы системы .

Доказательство. Пусть r=rk A, тогда после приведения матрицы A к главному ступенчатому виду $A_{гл.ст.}$ у нее будет r ненулевых строк , r главных столбцов и столько же главных неизвестных. Свободных неизвестных будет n-r. Для удобства записи так же, как и в § 2 рассмотрим случай, когда первые r столбцов- главные. Система уравнений, соответствующая $A_{гл.ст.}$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_1^{r+1} * x_{r+1} + \cdots + a_1^n * x_n = 0 \\ x_2 + a_2^{r+1} * x_{r+1} + \cdots + a_2^n * x_n = 0 \\ \vdots \\ x_r + a_r^{r+1} x_{r+1} + \cdots + a_r^n x_n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Разделим неизвестные :

$$\begin{cases} x_1 = -a_1^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_1^n * x_n, \\ x_2 = -a_2^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_2^n * x_n, \\ \vdots \\ x_r = a_r^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_r^n * x_n \end{cases}$$

Дополним систему тождествами :

$$\begin{cases} x_1 = -a_1^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_1^n * x_n \\ x_2 = -a_2^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_2^n * x_n \\ \cdots \\ \vdots \\ x_r = a_r^{r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_r^n * x_n \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ \cdots \\ x_n = x_n \end{cases} \quad (10)$$

Придадим свободным неизвестным произвольные значения x_{r+1} =$\alpha_{r+1,\ldots}$, x_n=α_n и подставим правую часть системы (10).

$$\begin{cases} x_1 = -a_1^{r+1} * \alpha_{r+1} - \cdots - a_1^n * \alpha_n \\ x_2 = -a_2^{r+1} * \alpha_{r+1} - \cdots - a_2^n * \alpha_n \\ \cdots \\ \vdots \\ x_r = a_r^{r+1} * \alpha_{r+1} - \cdots - a_r^n * \alpha_n \\ x_{r+1} = \alpha_{r+1} \\ \cdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases} \qquad (11)$$

Запишем полученное решение системы в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} .. = \alpha_{r+1} \begin{pmatrix} -a_1^{r+1} \\ -a_2^{r+1} \\ \cdots \\ -a_r^{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{r+2} \begin{pmatrix} -a_1^{r+2} \\ -a_2^{r+2} \\ \cdots \\ -a_r^{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} -a_1^n \\ -a_2^n \\ \cdots \\ -a_r^n \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Введем обозначения $\mathbf{c^1} = \begin{pmatrix} -a_1^{r+1} \\ -a_2^{r+1} \\ \cdots \\ -a_r^{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c^2} = \begin{pmatrix} -a_1^{r+2} \\ -a_2^{r+2} \\ \cdots \\ -a_r^{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$,..., $\mathbf{c^{n-r}} = \begin{pmatrix} -a_1^n \\ -a_2^n \\ \cdots \\ -a_r^n \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Каждый из этих векторов является решением системы, то есть $\mathbf{c^i} \in V(\widehat{A})$ i=1,…,n-r. Любой вектор решения $\mathbf{x}$, как следует из формулы (12),линейно выражается через векторы $\mathbf{c^1}$,..., $\mathbf{c^{n-r}}$. Осталось проверить линейную независимость векторов $\mathbf{c^1}$,..., $\mathbf{c^{n-r}}$.Рассмотрим линейную комбинацию этих

векторов и приравняем ее к нулю. $\lambda_1 \mathbf{c^1} + \lambda_2 \mathbf{c^2} + \ldots + \lambda_{n-r}\mathbf{c^{n-r}} = \begin{pmatrix} -a_1^{r+1} \\ -a_2^{r+1} \\ \cdots \\ -a_r^{r+1} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix} =$

$\mathbf{0}$.Следовательно все $\lambda_i = 0$ при i=1,…,n-r, векторы $\mathbf{c^1}, \ldots, \mathbf{c^{n-r}}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $V(\widehat{A})$. Векторная запись общего решения однородной системы принимает вид $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{c^1} + \alpha_2 \mathbf{c^2} + \ldots + \alpha_к \mathbf{c^k}$ (см. формулу (8).)

В ходе доказательства теоремы 1 мы не только нашли размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений, но и указали алгоритм построения фундаментальной системы решений (одной из возможных).

Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений AX=B и предположим, что она совместна, то есть rk A =rk $\hat{A}$. Пусть $\mathbf{x_0}$ - вектор частного решения системы то есть $AX_0=B$. Если $\mathbf{x}$ –другое решение системы, то AX=B и $A(X-X_o)=0$. Это означает, что вектор $\mathbf{x-x_0}$ является решением соответствующей однородной системы линейных уравнений AX=0. Верно и обратное утверждение: если $\mathbf{x_0}$ –вектор частного решения неоднородной системы линейных уравнений $AX_o=B$, а $\mathbf{c}$ – вектор какого-либо решения соответствующей однородной системы AC=0, то вектор $\mathbf{x=x_0+c}$ является решением неоднородной системы, так как $A(Xo+C)=B$. Тем самым доказана

Теорема 18. Об общем решении неоднородной системы**.** Общее решение неоднородной системы линейных уравнений есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы. $V(\widehat{A})_{неод.} = \mathbf{x_0} + V(\widehat{A})_{од.}$

Таким образом, если векторы $\mathbf{c^1}, \ldots, \mathbf{c^{n-r}}$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений AX=O и $\mathbf{x_0}$ – частное решение неоднородной системы AX=B, то векторная запись общего решения неоднородной системы принимает вид:

$\mathbf{x=x_0} + \alpha_1 \mathbf{c^1} + \alpha_2 \mathbf{c^2} + \ldots + \alpha_к \mathbf{c^k}$ (13)

Геометрически множество $V(\widehat{A})_{неод.}$ представляет собой сдвиг на вектор $\mathbf{x_0}$ линейного подпространства $V(\widehat{A})_{од.}$ Такие подмножества называются линейными многообразиями.

§ 7. Пример решения Домашней работы 1.

Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1.

а) Записать систему линейных уравнений, расширенной матрицей которой служит матрица *A*.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$ Это- неоднородная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

б) Привести матрицу *A* с помощью элементарных преобразований над строками к главному ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & 12 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- матрица главного ступенчатого вида, в которой первые два столбца – главные.

в) Записать соответствующую систему главного ступенчатого вида. Указать, какие неизвестные в системе уравнений, являются главными, а какие − свободными.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Система главного ступенчатого вида эквивалентная исходной, в которой x_1 и x_2 –главные неизвестные, а x_3 и x_4 – свободные.

г). Найти общее решение этой системы уравнений. Решение выразить в параметрической форме; в векторно-параметрической форме. Найти какое-либо частное решение системы.

Разделяем неизвестные $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 - 2 \end{cases}$ и добавляем в систему тождества $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 - 2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ Придаем свободным неизвестным x_3 и x_4 произвольные значения $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$ и подставляем в правую часть полученной системы.

$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta + 1 \\ x_2 = \alpha + 2\beta - 2 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$ Это- общее решение системы в параметрической форме.

Запишем решение системы в векторном виде.

$\mathbf{x}= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$- частное решение.

д).Записать однородную систему линейных уравнений, соответствующую системе, построенной в пункте а).

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

е). Найти общее решение однородной системы и базис подпространства ее решений.

Однородная система равносильна системе главного ступенчатого вида :

$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$, общее решение которой в векторной форме имеет вид:

$\mathbf{x}= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Пространство решений $V(\widehat{A})$- линейная оболочка векторов $\mathbf{c^1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{c^2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

ж) Записать общее решение неоднородной системы уравнений как сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы (в векторном виде).

По теореме об общем решении неоднородной системы линейных уравнений $V(\widehat{A})_{неод.} = \mathbf{x_0} + V(\widehat{A})_{од.}$ (формула (13)) . В векторном виде:

$$\mathbf{x = x_0} + \alpha\, \mathbf{c^1} + \beta\, \mathbf{c^2}$$

2. а) Найти базис набора столбцов матрицы А.

Запишем матрицу А и приведем ее к главному ступенчатому виду (см. 1. б)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

В матрице В первые два столбца главные. Они образуют базис множества столбцов этой матрицы. Так как линейные соотношения между столбами матрицы сохраняются при элементарных преобразованиях над строками, то в матрице А первые два столбца так же будут базисом множества столбцов матрицы А.

б) Выразить каждый столбец в виде линейной комбинации базисных столбцов.

Столбцы матрицы В выражаются через первые два столбца $\mathbf{b^1}$ и $\mathbf{b^2}$естественным образом : $\mathbf{b^3} = \mathbf{b^1} - \mathbf{b^2}$, $\mathbf{b^4} = \mathbf{b^1} - 2\,\mathbf{b^2}$,$\mathbf{b^5} = \mathbf{b^1} - 2\,\mathbf{b^2}$.Те же соотношения справедливы для столбцов матрицы А в силу теоремы о сохранении линейных соотношений между столбцами. $a^3 = a^1 - a^2$, $\mathbf{a^4} = a^1 - 2\,a^2$,$a^5 = a^1 - 2\,a^2$ (проверьте!)

в) Найти ранг матрицы А.

Так как ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях над строками, а ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк , то rkA = rkB =2.

§ 8. Обратная матрица.

В § 2 главы 1 для матрицы A было введено понятие обратной матрицы. Это такая матрица B , что AB=BA=E.

Теорема 19. Из соотношений AB=BA=E следует, что матрицы A и B – квадратные матрицы одного порядка.

Доказательство. Если $A \in M_n^k$, $B \in M_m^r$, то k- число столбцов матрицы A должно быть равно n-числу строк матрицы B, иначе произведение AB не определено. При этом произведение $AB \in M_m^r$. Из равенства AB=E следует, что m=r так как матрица E- квадратная матрица . Итак $A \in M_m^n$, $B \in M_n^m$. Произведение BA в этом случае определено , так как m- число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A и представляет собой квадратную матрицу порядка n равную E. Следовательно n=m.

Теорема 20. Если у матрицы A существует обратная, то она единственна.

Доказательство. Пусть B и C обратные матрицы для матрицы A, то есть AB=BA=E и AC=CA=E. Рассмотрим произведение B(AC). В силу свойства ассоциативности умножения B(AC)= (BA)C. Но AC=E и BA=E, следовательно B=C.

Однозначно определенную обратную матрицу для матрицы A будем обозначать A^{-1}.

Теорема 21. Первый критерий обратимости матрицы. Пусть A квадратная матрица порядка n, тогда обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда rkA=n.

Доказательство. Достаточность. Если rkA=n, то все столбцы матрицы линейно независимы и главный ступенчатый вид матрицы A- матрица E. Элементарные преобразования над строками, приводящие матрицу A к матрице E, можно осуществить, умножая матрицу A слева на элементарные матрицы: $Э_к\, Э_{к-1}...Э_2Э_1A=E$. Обозначим через B произведение $Э_к\, Э_{к-1}....Э_1$ и заметим, что BA=E. Матрицу A в свою очередь тоже можно разложить в произведение элементарных матриц: $A=Э_1^{-1}Э_2^{-1}...Э_{к-1}^{-1}Э_к^{1}$.

Проверим, что AB=E.

$AB=A\ Э_k\ Э_{k-1}...Э_2Э_1= \quad Э_1^{-1}\ Э_2^{-1}...Э_{к-1}^{-1}\ Э_к^{-1}\ Э_к\ Э_{к-1}...Э_2Э_1$. В силу свойства ассоциативности умножения матриц, скобки в этом произведении можно

расставлять произвольным образом. $AB= Э_1^{-1} (Э_2^{-1}..(.Э_{к-1}^{-1} (Э_к^{-1} Э_к)Э_{к-1})..Э_2)Э_1 = Э_1^{-1} (Э_2^{-1}..(.Э_{к-1}^{-1} (E)Э_{к-1})..Э_2)Э_1$.

В результате AB=E. Таким образом у матрицы A ранга n существует обратная матрица $A^{-1} = Э_к Э_{к-1}....Э_1$.

Необходимость. Покажем, что если rkA<n , то у матрицы A не может быть обратной матрицы. Приведем матрицу A к главному ступенчатому виду $A_{гл.ст.}$ с помощью элементарных преобразований над строками.

$Э_кЭ_{к-1}...Э_2Э_1A=A_{гл.ст.}$.Так как rkA<n, то у матрицы $A_{гл.ст.}$ последняя строка нулевая. Предположим, что существует обратная матрица A^{-1}, тогда

$(Э_кЭ_{к-1}...Э_2Э_1A) A^{-1} = A_{гл.ст}.A^{-1} . Э_к Э_{к-1}...Э_2Э_1 (A A^{-1)}=$

$Э_к Э_{к-1}...Э_2Э_1E$. Эта матрица получается из E с помощью элементарных преобразований над строками. При этом ранг матрицы не меняется, следовательно $rk(Э_к Э_{к-1}...Э_2Э_1E)=n$. С другой стороны, у произведения Агл.ст.А-1 последняя строка- нулевая. (При умножении матриц элементы строк матрицы $A_{гл.ст.}$ умножаются на элементы столбцов матрицы A и складываются). Но если у матрицы нулевая строка, то ее ранг меньше n. Полученное противоречие проистекло из предположения о существовании обратной матрицы.

В ходе доказательства Теоремы 3 мы получили алгоритм нахождения обратной матрицы. Если $Э_к Э_{к-1}...Э_2Э_1A = E$, то $A^{-1} = Э_к Э_{к-1}...Э_2Э_1 = Э_к Э_{к-1}...Э_2Э_1 E$. Это означает, что A^{-1} получается из матрицы E с помощью последовательности элементарных преобразований, которые привели матрицу A к единичной.

Алгоритм Гаусса нахождения обратной матрицы.

Пусть rkA=n, записываем расширенную матрицу (A⋮ E). Это матрица, в которой n строк и 2n столбцов. Элементарными преобразованиями над строками этой матрицы приводим ее к главному ступенчатому виду. Так как столбцы матрицы A линейно независимы они преобразуются в столбцы единичной матрицы. При этом на месте матрицы E получается A^{-1} .

Пример. $A= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, rkA=2 .Из критерия обратимости следует, что матрица A^{-1} существует и может быть найдена методом Гаусса.

$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. Сделаем проверку! $AA^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} = E$ и $A^{-1}A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} = E$.

§ 9. Упражнения.

1. Пусть система векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ из пространства R^n линейно независима. При каких λ система векторов $\lambda\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}, \mathbf{a_1} + \lambda\mathbf{a_2}$ будет линейно независимой?

2. Доказать, что любая часть линейно независимой системы векторов пространства R^n также линейно независима. Верно ли аналогичное утверждение для линейно зависимой системы векторов?

3. В каком случае конечная система векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_к}$ пространства R^n имеет единственный базис?

4. Система $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ состоит из одного уравнения. Указать два различных базиса в подпространстве решений.

5. Векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ являются базисом линейной оболочки $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_к})$. Будут ли векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}, \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}$ базисом этой оболочки?

6. Сравнить размерности линейных оболочек векторов $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_к})$ и $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_к}, \dots, \mathbf{a_n})$.

7. Задать линейную оболочку векторов $\mathbf{a_1}$= (1 0 2 0) и $\mathbf{a_2}$ =(1 1 0 1) системой линейных уравнений.

8. L_1 и L_2 – линейные подпространства в R^n. Будет ли линейным подпространством множество а) $L_1 \cap L_2$, б) $L_1 \cup L_2$?

9. L_1 и L_2 – линейные подпространства в R^n, $L_1 \subset L_2$. Доказать, что $\dim L_1 \leq \dim L_2$.

10. L_1 и L_2 – линейные подпространства в R^n. $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = \dim L_2$. Доказать, что $L_1 = L_2$.

11. L_1 и L_2 – линейные подпространства в R^n, $\dim L_1 + \dim L_2 > \dim R^n$ Доказать, что $L_1 \cap L_2$ содержит ненулевой вектор.

12. Проверить, что множество M является линейным подпространством в R_5, и задать его системой однородных линейных уравнений. Найти базис и размерность множества M .

a) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in R \right\}$, b) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in R \right\}$

c) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in R \right\}$. d) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in R \right\}$

Глава 3. Теория определителей .

§ 1. Детерминант матрицы и его основные свойства.

Определение 1. Детерминантом квадратной матрицы порядка n называется число, уловлетворяющее следующим условиям:

1.Если n =1, то детерминант матрицы A=(a) равен числу a.

2.Если известны детерминанты матриц порядка n-1,то детерминант матрицы $A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ порядка n определяется по формуле

$$\det A = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} a_1^n \begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (1)$$

В этой сумме элементы первой строки a_1^i матрицы A умножаются на детерминанты матриц порядка n-1,полученных из матрицы A вычеркиванием первой строки и i-ого столбца, и на число$(-1)^{i+1}$, а затем складываются.Такого сорта определения называются индуктивными, а формула (1) называется разложением определителя по первой строке. В курсе геометрии мы изучили определители второго и третьего порядка и их свойства, которые остаются справедливыми для определителя матрицы любого порядка n.

Теорема 1.О транспонировании**.** Определитель матрицы не меняется при транспонировании. detA = detA ^{т}.

Без доказательства.

Следствие. Строки и столбцы матрицы равноправны в теории определителей.

Заметим, что столбцы матрицы А- векторы пространства R^n · $\mathbf{a^1} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \cdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a^2} = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \cdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}$,…, $\mathbf{a^n} = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \cdots \\ a_n^n \end{pmatrix}$, поэтому детерминант матрицы можно рассматривать, как функцию от n векторных переменных detA= det(·$\mathbf{a^1, a^2,..., a^n}$).Изучим свойства этой функции.

Теорема 2. Свойство антисимметрии**.** При перестановке двух столбцов (двух строк) определитель меняет знак.

det(· $\mathbf{a^1, ..., a^i,..., a^j,..., a^n}$) = - det(· $\mathbf{a^1, ..., a^j,..., a^i,..., a^n}$)

Без доказательства.

Следствие. Если в матрице А два одинаковых столбца (строки), то ее определитель равен нулю. detA =0.

Доказательсто. При перестановке двух одинаковых столбцов матрица не меняется и, следовательно, не меняется ее определитель. С другой стороны из теоремы 2 следует, что что определитель должен поменять знак. Единственное число равное самому себе с противоположным знаком- 0.

Теорема 3.Свойство однородности**.** При умножении столбца (строки) матрицы на число, ее определитель умножается на это число.

. det(·$\mathbf{a^1, ..., \lambda a^i,..., a^n}$)=λ det(·$\mathbf{a^1, ...,a^i,..., a^n}$)

Без доказательства.

Следствие**.** Если у матрицы есть нулевой столбец (строка), то ее определитель равен 0.

Доказательство. Нулевой столбец матрицы можно рассматривать как результат умножения некоторого, произвольно выбранного вектора на число 0, следовательно согласно теореме 3 на ноль умножится детерминант матрицы, в которой вместо нулевого столбца записан произвольно выбранный вектор, что в результате даст число 0.

Теорема 4. Свойство аддитивности. Если какой либо столбец (строка) матрицы представляет собой сумму двух векторов , то ее определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, в каждом из которых на месте рассматриваемого столбца стоит одно из слагаемых , остальные столбцы у всех трёх определителей одни и те же.

$\det(\cdot \mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{b^i} + \mathbf{c^i}, \ldots, \mathbf{a^n}) = \det(\mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{b^i}, \ldots, \mathbf{a^n}) + \det(\cdot \mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{c^i}, \ldots, \mathbf{a^n})$.

Без доказательства.

Теоремы 3 и 4 утверждают, что детерминант матрицы, как функция ее столбцов, линеен по каждому переменному. Такие функции называются полилинейными.

Следствие. Если к некоторому столбцу (или строке) матрицы прибавить другой столбец (или строку) этой матрицы, умноженный на число, то ее определитель не изменится.

Доказательство. Применим теоремы 3 , 4 и следствие из теоремы 2 для вычисления определителя . $\det(\cdot \mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{a^i}+\lambda\mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^n}) = \det(\mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{a^i}, \ldots, \mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^n}) + \det(\mathbf{a^1}, \ldots, \lambda\mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^n}) = \det(\mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{a^i}, \ldots, \mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^n}) + \lambda \det(\cdot \mathbf{a^1}, \ldots, \mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^j}, \ldots, \mathbf{a^n}) = \det A$, так как во втором определителе два одинаковых столбца и , следовательно, он равен нулю.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$. Применим свойства определителя для упрощения вычисления. Прибавим к первому столбцу второй и третий. Согласно следствию , определитель при этом не измениться .Затем выносим общий множитель из первого столбца.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 1 \\ b+c+a & c & a & 1 \\ c+a+b & a & b & 1 \\ a+b+c & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & a & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

Теорема 5. Об определителе треугольной матрицы. Определитель треугольной матрицы равен произведению чисел, стоящих на ее диагонали.

Доказательство. Треугольные матрицы бывают двух видов верхние треугольные и нижние треугольные. Однако, треугольная матрицы одного вида превращается в треугольную матрицу другого вида при транспонировании, поэтому достаточно доказать теорему только для матриц одного из этих видов. Будем доказывать теорему методом математической

индукции для нижних треугольных матриц T = $\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$.

Пусть n=2 (случай n=1 тривиален),а T=$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$, тогда detT=$a_1^1\ a_2^2$.Предположим, что теорема верна для нижних треугольных матриц порядка к-1 и выведем из этого предположение справедливость теоремы для нижних треугольных матриц порядка к. Воспользуемся формулой (1) из определения детерминанта, то есть его разложением по первой строке.

detT=$a_1{}^1$ $\begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_к^2 & \cdots & a_к^к \end{vmatrix}$ –0 $\begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_к^1 & \cdots & a_к^к \end{vmatrix}$ + …. +(-1)$^{к+1}$ 0$\begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_к^1 & \cdots & a_к^{к-1} \end{vmatrix}$.

В этом выражении все слагаемые, кроме первого равны нулю.Первое же представляет собой произведение $a_1{}^1$ на определитель нижней треугольной матрицы порядка к-1, который по предположению индукции равен произведению его диагональных элементов. Следовательно, detT= $a_1{}^1$ $a_2{}^2$ … $a_k{}^k$.

Следствие. Определитель диагональной матрицы D = $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$ равен произведению ее диагональных элементов. DetD =$\prod_1^n d_i$. В частности , det E=1.

Мы применили метод математической индукции при доказательстве теоремы 5. Отметим, что теоремы 1-4 также доказываются методом математической индукции с использованием индуктивного определения детерминанта разложением по первой строке.

Детерминант матрицы может определяться не только индуктивно с помощью формулы (1), но и ,например, с помощью теории перестановок (см. различные учебники по линейной алгебре). Отметим, что детерминант матрицы, как функция ее столбцов ,определяется однозначно, при условии, что она обладает свойствами, указанными в теремах 2-5.

Теорема 6. Любая функция f($\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^n}$) от n векторных переменных, где $\mathbf{a^i} \in R^n$ антисимметрическая, полилинейная и такая, что f ($\mathbf{e_1}$, …, $\mathbf{e_n}$) =1 для векторов стандартного базиса, равна детерминанту матрицы , в столбцах которой стоят векторы $\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}, \ldots, \mathbf{a^n}$.

Доказательство приведем для случая n=2, в общем случае доказательство проводится аналогично.Рассмотрим f($\mathbf{a^1}, \mathbf{a^2}$) -антисимметрическую функцию двух переменных, линейную по каждому из них. Векторы $\mathbf{a^1}$ и $\mathbf{a^2}$ принадлежат пространству R^2 . $\mathbf{a^1} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a^2} = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix}$. Эти векторы можно разложить по стандартному базису : $\mathbf{a^1} = a_1^1\ \boldsymbol{e^1} + a_2^1\ \mathbf{e^2}$, $\mathbf{a^2} = a_1^2\ \mathbf{e^1} + a_2^2\ \mathbf{e^2}$ f($\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$)=f ($a_1^1\ \boldsymbol{e^1} + a_2^1\ \mathbf{e^2}$,$a_1^2\ \mathbf{e^1} + a_2^2\ \mathbf{e^2}$) = f ($a_1^1\ \mathbf{e^1}$, $a_1^2\mathbf{e^1}$)+ f ($a_1^1\ \mathbf{e^1}$, $a_2^2\ \mathbf{e^2}$)+ f ($a_2^1\ \mathbf{e^2}$, $a_1^2\ \mathbf{e^1}$)+ f ($a_2^1\ \mathbf{e^2}$, $a_2^2\ \mathbf{e^2}$). Мы воспользовались аддитивностью функции f по обоим переменным. Теперь воспользуемся однородностью: f($\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$)= $a_1^1\ a_1^2$ f($\boldsymbol{e^1}$, $\boldsymbol{e^1}$) + $a_1^1\ a_2^2$ f($\boldsymbol{e^1}$, $\boldsymbol{e^2}$) + $a_2^1\ a_1^2$ f($\boldsymbol{e^2}$, $\boldsymbol{e^1}$) + $a_2^1\ a_2^2$ f($\boldsymbol{e^2}$, $\boldsymbol{e^2}$). Из антисимметрии функции f следует, что f($\boldsymbol{e^1}$, $\boldsymbol{e^1}$)= f($\boldsymbol{e^2}$, $\boldsymbol{e^2}$)=0 и f($\boldsymbol{e^2}$, $\boldsymbol{e^1}$)= - f($\boldsymbol{e^1}$, $\boldsymbol{e^2}$) , кроме того f($\boldsymbol{e^1}$, $\boldsymbol{e^2}$)= 1. Получаем f($\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^2}$) = $a_1^1\ a_2^2 - a_2^1 a_1^2$ =det$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$.

Определение 2**.** Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля и вырожденной в противном случае.

Теорема 7**.** При элементарных преобразованиях над строками матрицы ее вырожденность или невырожденность сохраняется.

Доказательство. Проследим, что происходит с детерминантом матрицы при элементарных преобразованиях над ее строками. Из теремы 2 следует, что при элементарных преобразованиях первого типа (перестановке строк) определитель меняет знак на противоположный. Из теоремы 3 следует, что при умножении строки матрицы на отличное от нуля число λ , а только такие λ допускаются при элементарных преобразованиях второго типа, определитель умножается на это число. При элементарных преобразованиях третьего типа определитель матрицы не меняется(следствие из теоремы 4).

Следствие 1**.** Если матрица A не вырождена, то есть detA≠0, то ее ранг rkA равен n, а главный ступенчатый вид-единичная матрица E.

Доказательство. Так как при элементарных преобразованиях над строками матрицы A она остается невырожденной, то в ее ступенчатом виде не может быть нулевых строк. Следовательно ее ранг равен n, а главный ступенчатый вид-матрица E.

Следствие 2. Если матрица A вырождена, то есть detA=0, то ее ранг rkA меньше n, а главный ступенчатый вид содержит хотя бы одну нулевую строку.

Доказательство вытекает из того, что вырожденность и невырожденность матрицы альтернативные понятия.

Метод Гаусса вычисления определителя матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу А и приведем ее элементарными преобразованиями над строками к ступенчатому виду $A_{ст.}$ Из того , что матрица А квадратная следует, что ее ступенчатый вид -верхняя треугольная матрица. $A_{ст.}$=Т .Из теоремы 5 следует, что detT= $a_1^1\ a_2^2 \dots a_n^n$ - произведению чисел стоящих на диагонали. Детерминант исходной матрицы А может отличатся от этого произведения, но за его отличием легко проследить, используя доказательство теоремы 7, в котором описано ,как меняется определитель матрицы при элементарных преобразованиях над строками.

Пример .

1.Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$. Приведем матрицу к верхнему треугольному виду и проследим, как при этом изменяется определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_1^2\ (-1)} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_3^4\ (1)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 1 & -7 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{Э_4^2\ (1)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 1 & -7 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_2^1\ (3)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & -7 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_3^1\ (1)} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_2^3\ (-1)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$(-2)(-2)\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_3^2\ (-4)} =4 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & 25 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_4^2\ (-1)} =$$

$$4\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_4^3} =-4 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 25 \end{vmatrix} \xrightarrow{Э_4^3\ (-8)} =$$

$$-4\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4$$

§ 2.Мультиплекативное свойство определителя.

Рассмотрим M_n - множество квадратных матриц порядка n. Определитель - функция, заданная на этом множестве: A→detA. Изучим свойства этой функции. Определитель не является линейной фунцией на множестве M_n, так как он не аддитивен det(A+B)≠ detA + detB, в чем легко убедиться на примере $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, и не однороден, так как detλA=λ^ndetA. Однако, детерминант обладает важным свойством мультиплекативности det(AB)= detA detB .

Теорема 8. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

Доказательство. Пусть A и B матрицы из множества M_n, где B -произвольная матрица, а для матрицы A будем рассматривать различные случаи.

1 случай. Если A=E, то утверждение теоремы очевидно .Пусть A – элементарная матриц Э. Вычислим определители элементарных матриц. Если Э=$Э_i^j$-матрица , полученная из E перестановкой строк, то, согласно свойству антисимметрии,det$Э_i^j$=-detE=-1. Если Э=$Э_i(\lambda)$- матрица ,полученная из E умножением i-ой строки на число λ ,то из однородности определителя следует, что det $Э_i(\lambda)$=λdetE=λ. Наконец, если Э= $Э_i^j(\lambda)$ - матрица, полученная из E прибавлением к i-ой строке этой матрицы j-ой строки, умноженной на число λ, то преобразование не меняет определитель матрицы (следствие из теоремы 4 предыдущего параграфа), следовательно det$Э_i^j(\lambda)$=1. Рассмотрим произведение ЭB. Если Э = $Э_i^j$, то $Э_i^j$B- матрица, полученная из B перестановкой строк и, согласно свойству антисимметрии ее определитель отличается знаком от определителя матрицы B. det ($Э_i^j$B) =-det B=det $Э_i^j$ detB. Если Э= $Э_i(\lambda)$,

то $Э_i(\lambda)B$ - матрица, полученная из B умножением умноже i-ой строки на число λ ,то из однородности определителя следует,что $\det Э_i(\lambda)B=\lambda \det B=\det Э_i(\lambda) \det B$. Если $Э= Э_i^j(\lambda)$, то матрица $Э_i^j(\lambda)B$ из B прибавлением к i-ой строке этой матрицы j-ой строки, умноженной на число λ. .Это преобразование не меняет определитель матрицы $\det Э_i^j(\lambda)B =\det B=\det Э_i^j(\lambda) \det B$.

2 случай. A- произвольная невырожденная матрица то есть $\det A\neq 0$, тогда ее ранг равен n, а главный ступенчатый вид-единичная матрица E(следствие 1,теорема 7). Матрицу A в этом случае можно разложить в произведение элементарных матриц (теорема 8 ,глава 1). $A=Э_1Э_2....Э_к$. $\det AB = \det(Э_1Э_2....Э_к)B$. Воспользуемся свойством ассоциативности умножения матриц $de(Э_1Э_2....Э_к)B= \det Э_1(Э_2....Э_кB)$.Первый множитель – элементарная матрица, а второй , тот что в скобках-некоторая матрица $\widetilde{B}$. Это- случай 1 и $\det (AB)=\det Э_1 \det \widetilde{B}$. С матрицей $\widetilde{B} = Э_2....Э_кB$ проделаем то же самое к раз. В результате получим $\det (AB)= \det Э_1 \det Э_2..\det Э_к \det B$. Но из равенства $A=Э_1Э_2....Э_к$, рассуждая аналогичным образом, получим $\det A= \det Э_1 \det(Э_2....Э_к)=…= \det Э_1 \det Э_2...\det Э_к$. Таким образом $\det(AB) =\det A \det B$.

3 случай. A- произвольная вырожденная матрица. В этом случае $\det A=0$, ранг A меньше n, а главный ступенчатый вид содержит хотя бы одну нулевую строку. Матрицу A в этом случае можно разложить в произведение элементарных матриц и $A_{гл.ст.}$: $A=Э_1Э_2....Э_кA_{гл.ст.}$, $\det(AB) = \det(Э_1Э_2....Э_кA_{гл.ст.})B$. Воспользуемся снова свойством ассоциативности умножения матриц $\det AB= \det(Э_1Э_2....Э_кA_{гл.ст.})B=\det(Э_1Э_2....Э_k)(A_{гл.ст.}B)$. В первой скобке- произведение элементарных матриц, которое невырождено-матрица $\widetilde{A}$, а вторая скобка - матрица $\widetilde{B}$. Это- случай 2, поэтому $\det(AB)=\det \widetilde{A} \det \widetilde{B}$. Но $\widetilde{B} = A_{гл.ст.}B$, где у матрицы $A_{гл.ст.}$ последняя строка –нулевая и , следовательно, у матрицы $\widetilde{B}$ последняя строка – нулевая и

$\det \widetilde{B}=0$. Итак $\det(AB)=0=\det A \det B$, так как $\det A=0$.

Теорема 9. Второй критерий обратимости матрицы. Квадратная матрица порядка n обратима тогда и только тогда, когда она невырождена.

Доказательство . Необходимость. Пусть матрица A обратима и A^{-1} ее обратная, тогда $AA^{-1} =E$ и согласно теореме 1, $\det (AA^{-1})= \det (A) \det (A^{-1})$. С другой стороны $\det (AA^{-1})=\det E =1$, следовательно оба множителя $\det (A)$ и $\det (A^{-1})$ отличны от нуля и матрица A невырождена.

Достаточность. Если $\det (A) \neq 0$, то ранг матрицы A равен n и , согласно первому критерию обратимости, существует A^{-1}.

Следствие. Если у матрицы A существует обратная, то $\det (A^{-1})= (\det A)^{-1.}$

§ 3 .Алгебраические дополнения и их свойства.

Рассмотрим матрицу A=$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & a_i^j & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ порядка n и ее произвольный элемент a_i^j. Вычеркним сроку с номером i и столбец с номером j.Мы получим матрицу порядка n-1. Определитель этой матрицы со знаком $(-1)^{i+j}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_i^j и обозначается A_i^j.

$A_i^j=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_1^1 & \vdots & a_1^n \\ \vdots & \dots\dots\vdots\dots & \vdots \\ a_n^1 & \vdots & a_n^n \end{vmatrix}$ (в определителе вычеркнуты i-ая строка и j-ый столбец).

Пример. Найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Нам придется вычислить девять определителей второго порядка и учесть знак $(-1)^{i+j}$.

$A_1^1=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ =-2, $A_1^2=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ =4 , $A_1^3=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$=-2,

$A^1_2=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ =-4, $A_2^2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ =4 , $A_2^3=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$=4,

$A_3^1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ =2, $A_3^2=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ =0 , $A_3^3=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$=2.

Определение3**.** Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A называется присоединенной и обозначается A*.

A*=$\begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & A_i^j & \vdots \\ A_n^1 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}$

Пример . Запишем присоединенную матрицу к матрице A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ из предыдущего примера. A*=$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Транспонируем эту матрицу $(A^*)^T=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, и найдем произведение исходной матрицы A и

транспонированной присоединенной матрицы $A(A^*)^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-4&2\\4&4&0\\-2&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}$. Мы получили скалярную матрицу, причем на диагонали стоит detA. Действительно, $\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1&1\\3&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&0\\3&2\end{vmatrix}=-2+8+2=8$. При вычислении определителя мы воспользовались формулой (1)– разложением определителя по первой строке:

$$\det A=a_1^1\begin{vmatrix}a_2^2&\cdots&a_2^n\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_n^2&\cdots&a_n^n\end{vmatrix}-a_1^2\begin{vmatrix}a_2^1&\cdots&a_2^n\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_n^1&\cdots&a_n^n\end{vmatrix}+\ldots.+(-1)^{n+1}a_1^n\begin{vmatrix}a_2^1&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_n^1&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

После введения понятия алгебраического доплнения элемента матрицы разложение определителя по первой строке можно записать в виде: $\det A=\sum_{i=1}^{n}a_1^i A_1^i$ ($\det A=a_1^1A_1^1+a_1^2A_1^2+\ldots+a_1^nA_1^n$).

Теорема 10. О разложении определителя по любой строке. Сумма произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения равна детерминанту матрицы. То есть, для любой строки матрицы A с номером k справедлива формула $\det A=\sum_{i=1}^{n}a_к^i A_к^i$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу A и ее вектор-строки $A=\begin{pmatrix}\overline{a_1}\\\cdots\\\overline{a_k}\\\cdots\\\overline{a_n}\end{pmatrix}$.

Переставим k-ую строку на первое место, при этом придется сделать k-1 перестановку строк , каждая из которых меняет знак определителя. В результате перестановок получится новая матрица $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\overline{a_k}\\\overline{a_1}\\\cdots\\\overline{a_{k-1}}\\\overline{a_{k+1}}\\\cdots\\\overline{a_n}\end{pmatrix}$, причем $\det\widetilde{A}=(-1)^{k-1}\det A$. $\det A=(-1)^{k-1}\det\widetilde{A}$. Из определения детерминанта разложением по первой строке следует, что $\det\widetilde{A}=\tilde{a}_1^1\widetilde{A}_1^1+\tilde{a}_1^2\widetilde{A}_1^2+\ldots+\tilde{a}_1^n\widetilde{A}_1^n$. Но элементы первой строки матрицы $\widetilde{A}$- это соответствующие элементы k-ой строки матрицы A: $\tilde{a}_1^i=a_k^i$.Рассмотрим алгебраическое дополнение $\widetilde{A}_1^i$ элемента $\tilde{a}_1^i$.Это-определитель матрицы, полученный из $\widetilde{A}$ вычеркиванием первой строки и i-ого столбца, со знаком $(-1)^{1+i}$. Но вычеркивая из матрицы $\widetilde{A}$ первую строку и i-ый столбец, мы получим тот же определитель, который получится из

матрицы A, если в ней вычеккнуть k-ую строку и i-ый столбец. Обозначим этот определитель через Δ. Итак алгебраическое дополнение $\widetilde{A}_1^i = (-1)^{1+i}\Delta$, а алгебраическое дополнение $A_k^i=(-1)^{i+к}\Delta$, следовательно $\Delta= (-1)^{i+к} A_k^i$,а $\widetilde{A}_1^i = (-1)^{1+i}(-1)^{i+к} A_k^i =(-1)^{k+1}A_k^i$

$\det A= =(-1)^{k-1}\det\widetilde{A} = (-1)^{k-1}(\widetilde{a_1^1}\widetilde{A}_1^1+\tilde{a}_1^2\widetilde{A}_1^2+...+\tilde{a}_1^n\widetilde{A}_1^n) =$

$(-1)^{k-1}(a_k^1(-1)^{1+k}A_k^1+ a_k^2(-1)^{1+k}A_k^2+...+a_k^n(-1)^{1+k}A_k^n)= \sum_1^n a_к^i A_к^i$.

$\det A = \sum_{i=1}^n a_к^i A_к^i$. (2)

Следствие.Справедливо разложение определителя матрицы A по любому столбцу: $\det A = \sum_{i=1}^n a_i^k A_i^k$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1 о транспонировании определителя.

Строки матрицы A^T- это столбцы матрицы A, следовательно $(a^T)_k^i=a_i^k$, алгебраическое дополнение $(A^T)_k^i=(-1)^{k+i}\Delta$, где Δ-определитель матрицы, полученной из A^T вычеркиванием к-ой строки и i-ого столбца. Но тот же самый определитель получится, если в исходной матрице A, вычеркнуть i-ую строку и к-ый столбец, а затем матрицу транспонировать. Так как при транспонировании определитель матрицы не меняется, то $A_i^k=(-1)^{k+i}\Delta=(A^T)_k^i$. $\det A= \det(A^T)$.Запишем разложение определителя матрицы A^T по к-ой строке: $\det(A^T)=(a^T)_k^1(A^T)_k^1+\ldots+(a^T)_k^n(A^T)_k^n = \sum_1^n a_i^k A_i^k$.

Пример .

Вычислим определитель $\begin{vmatrix}1&0&2&a\\2&0&b&0\\3&c&4&5\\d&0&0&0\end{vmatrix}$, используя формулы разложения определителя по различным строкам и столбцам. При этом будем выбирать строки и столбцы с максимальным числом нулевых элементов.

$\begin{vmatrix}1&0&2&a\\2&0&b&0\\3&c&4&5\\d&0&0&0\end{vmatrix}$ =-d $\begin{vmatrix}0&2&a\\0&b&0\\c&4&5\end{vmatrix}$=-dc$\begin{vmatrix}2&a\\b&0\end{vmatrix}$=abcd.

Теорема 11.О разложении определителя по “ чужой “ строке**.** Сумма произведений элементов одной строки матрицы на соответствующие алгебраические дополнения другой строки равна нулю.То есть, для любых двух строк матрицы A с номерами i и j справедлива формула $\sum_{к=1}^n a_i^k A_j^k$ =0

Доказательство. Рассмотрим матрицу A= $\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \dots \\ \overline{a_i} \\ \dots \\ \overline{a_j} \\ \dots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$ и вспомогательную матрицу B= $\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \dots \\ \overline{a_i} \\ \dots \\ \overline{b} \\ \dots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$, в которой все строки, кроме j-ой , совпадают со строками матрицы A, а в j-ой строке стоят числа $b_1, b_{2,\dots}, b_n$.Запишем разложение определителя матрицы B по j-ой строке : $detB=b_1B_j^1+b_2B_j^2+\dots+b_nB_j^n$. Алгебраическое дополнение B_j^k элемента b_k- определитель матрицы, полученный из матрицы B вычеркиванием j-ой строки и к-ого столбца со знаком $(-1)^{j+k}$. Но тот же самый определитель и с тем же знаком мы получим при вычислении алгебраического дополнения элемента a_j^k в матрице A. Таким образом $B_j^k = A_j^k$ и $detB=b_1A_j^1+b_2A_j^2+\dots+ b_nA_j^n$. Пусть $b_1=a_i^1, b_2=a_i^2 \dots, b_n=a_i^n$, то есть мы подставили в j-ую строку матрицы B элементы i-ой строки матрицы A. Теперь матрица B имеет вид: B= $\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \dots \\ \overline{a_i} \\ \dots \\ \overline{a_i} \\ \dots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$. Это матрица с двумя одинаковыми строками и , следовательно, ее детерминант detB =0. С другой стороны, $detB=a_i^1 A_j^1+a_i^2 A_j^2+\dots+ a_i^n A_j^n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k A_j^k = 0 . \qquad (3)$$

Следствие. Для разложения по “чужому” столбцу справедлива аналогичная формула: $\sum_{k=1}^{n} a_k^i A_k^j = 0$.

Теорема 12. Формула для обратной матрицы. Пусть A – невырожденная матрица, тогда матрица B= $\frac{1}{detA}(A^*)^T$, где A*-присоединенная матрица, является обратной для матрицы A.

Доказательство.Нужно проверить, что AB=BA=E. Проведем эти вычисления , используя формулы (2) и (3).

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^1 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}$, $(A^*)^T = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}$

$BA = \frac{1}{detA}(A^*)^T A = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_i^1 a_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^n A_i^1 a_i^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_i^n a_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^n A_i^n a_i^n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} detA & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & detA \end{pmatrix} = E$

$AB = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{detA} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_1^i a_1^i & \cdots & \sum_{i=1}^n A_n^i a_1^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_1^i a_n^i & \cdots & \sum_{i=1}^n A_n^i a_n^i \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} detA & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & detA \end{pmatrix} = E.$ Мы доказали формулу:

$A^{-1} = \frac{1}{detA}(A^*)^T$ (4)

Следствие 1**.** Формула (4) позволяет доказать достаточность второго критерия обратимости матрицы без использования ранга матрицы и первого критерия.Действительно, если detA ≠0, то A^{-1}существует и может быть найдена по формуле.

Следствие 2. Если исходная матрица А целочисленная и обратимая, то ее обратная матрица A^{-1} целочисленная тогда и только тогда, когда

определитель detA=1 или detA=-1.

Доказательство. Необходимость. Пусть А и A^{-1} – целочисленные матрицы, тогда их определители - целые числа. Это следует из индуктивного определения детерминанта матрицы разложением по первой строке. Кроме того $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. Но среди целых чисел только у 1 и -1 обратные числа тоже целые.

Достаточность. Алгебраические дополнения элементов целочисленной матрицы – целые числа, поэтому матрица $(A^*)^T$ - целочисленная о остается такой же при умножении на 1 или -1.

Рассмотрим произвольную матрицу второго порядка $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и предположим, что ее определитель отличен от нуля:

$\Delta=\det A = ad - bc \neq 0$.В этом случае можно воспользоваться формулой (4) для A^{-1} . Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A. $A_1^1=d$, $A_1^2=-c$, $A_2^1=-b$, $A_2^2=a$. Присоединенная матрица $A^*=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, а транспонированная к ней $(A^*)^T=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Полученную формулу легко запомнить. Для нахождения обратной матрицы нужно поменять местами элементы главной диагонали, у элементов побочной диагонали поменять знаки и поделить все полученные числа на определитель Δ.

Примеры.

1). Вернемся к предыдущим примерам. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^*)^T=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, а $\det A=8$, то обратная матрица существует и может быть найдена по формуле (4). $A^{-1}=\frac{1}{detA}(A^*)^T=\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2).Найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.Сначала убедимся, что обратная матрица существует для чего посчитаем ее определитель $\det A=-1 \neq 0$, а затем применим формулу (5). $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 4. Приложения.

1. Решение систем линейных уравнений с квадратной матрицей системы.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ . \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \cdots + a_n^n x_n = b_n \end{cases} \qquad (6)$$

Матрица A этой системы – квадратная. Исследуем, как устроено множество решений этой системы $V(\widehat{A})$.

Теорема 13. (Теорема Крамера). Пусть матрица системы линейных уравнений A квадратная и невырожденная, тогда система совместна и определена.

Доказательство. Требуется доказать, что если detA≠ 0, то у системы (6) существует решение и оно единственное. Матрицы A невырожденная, следовательно у нее существует обратная матрица A^{-1} . Запишем систему (6) в матричном виде AX=B, где $A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец неизвестных, а $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов. Если вектор-столбец X_o- решение системы, то $AX_o=B$ и $A^{-1}(AX_o)= A^{-1} B$. По свойству ассоциативности умножения матриц $(A^{-1} A)X_o= A^{-1} B$ и , так как $A^{-1} A =E$, то $X_o= A^{-1} B$. Мы доказали единственность решения системы, если оно существует. Проверим, что вектор $A^{-1}B$ будет решением матричного уравнения AX=B. Действительно, подставив этот вектор вместо столбца X в уравнение, получим $A(A^{-1} B)=(A A^{-1})B =EB=B$.

Теорема 14(Формулы Крамера)**.** Если матрица системы линейных уравнений квадратная и невырожденная, то ее единственное решение можно найти по формулам: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$,…, $x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ=det A, а Δ_i- определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i-ого столбца на столбец свободных членов.

Доказательство. Рассмотрим вектор решения $X_o= A^{-1} B$, найденный в предыдущей теореме и воспользуемся формулой (4) для обратной матрицы $A^{-1}=\frac{1}{detA}(A^*)^T$.

$X_o=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_i^1 b_i \\ \sum_{i=1}^n A_i^2 b_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n A_i^n b_i \end{pmatrix}$. Но $\sum_{i=1}^n A_i^1 b_i$ – разложение по первому столбцу определителя матрицы A_1 = (**b a²… aⁿ**), то есть $\sum_{i=1}^n A_i^1 b_i=\Delta_1$. $\sum_{i=1}^n A_i^2 b_i$- разложение по второму столбцу определителя матрицы A_2 = (**a¹ b … aⁿ**),то есть $\sum_{i=1}^n A_i^2 b_i= \Delta_2$ и, наконец , сумма $\sum_{i=1}^n A_i^n b_i$- разложение по n-ому столбцу определителя матрицы A_n = (**a¹ a²… b**) , то есть Δ_n. Таким образом $X_o=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$ или $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$,…, $x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Пример. Решить систему методом Крамера.

$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$ – система двух уравнений с двумя неизвестными. Матрица системы $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$- невырожденная Δ=-1. Воспользуемся формулами Крамера.

$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-3}{-1}=3$, $y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{1}{-1}=-1$.

2. Решение матричных уравнений .

Рассмотрим множество матриц порядка n и уравнение AX=B. Начнем с простейшего случая n=1. В этом случае уравнение принимает вид: ax=b, где a и b - действительные числа. Возможны три случая:1) $a\neq 0$,2) a=0,$b\neq 0$ 3) a=b=0 .

В первом случае уравнение имеет единственное решение $x=\frac{b}{a}$, во втором случае уравнение несовместно и решений нет, наконец, в третьем случае любое число x является решением, то есть имеется бесконечно много решений. Похожую картину мы будем наблюдать для любого n.

Пусть матрица A-невырожденная. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Если матричное уравнение имеет решение X_o, то $AX_o=B$ и $A^{-1}(AX_o)=A^{-1}B$. Но $A^{-1}(AX_o)=(A^{-1}A)X_o=X_o$ и следовательно $X_o=A^{-1}B$ и решение

матричного уравнения единственно. Покажем, что решение существует. Рассмотрим матрицу $A^{-1}B$ и подставим ее в левую часть матричного уравнения вместо неизвестной матрицы X. $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=B$. Следовательно $A^{-1}B$ -решение уравнения .

Пусть теперь матрица A – вырожденная, detA=0. Если при этом матрица B-невырожденная, то есть $detB\neq 0$,то матричное уравнение не имеет решения. Действительно, если бы решение X существовало, то det(AX)=detB. Воспользуемся мультиплекативным свойством определителя матрицы det(AX)=detAdetX=0,что противоречит условию $detB\neq 0$.

В случае, если обе матрицы A и B вырожденные, ситуация усложняется .

Примеры.

1.Решим матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ X= $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$.

$det\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$=det $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$=0

Запишем неизвестную матрицу в виде: X= $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ и подставим ее в матричное уравнение. $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$. Отсюда следует, что

$\begin{cases}2x-3z=2\\ 2y-3t=3\\ 4x-6z=4\\ 4y-6t=6\end{cases}$. Это неоднородная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Можно решать ее методом Гаусса, но в данном случае легко заметить, что третье уравнение равносильно первому, а четвертое уравнение – второму. Система упрощается и сводится к системе двух уравнений с четырьмя неизвестными:

$\begin{cases}x-\frac{3z}{2}=\frac{1}{2}\\ y-\frac{3t}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$. Это- система главного ступенчатого вида, где x,y – главные неизвестные, а z и t – свободные. Решение системы запишем в параметрическом виде x=$\frac{3\alpha}{2}+1$, y=$\frac{3\beta}{2}+\frac{3}{2}$,z= α ,t= β .Следовательно, любая матрица X=$\begin{pmatrix}\frac{3\alpha}{2}+1 & \frac{3\beta}{2}+\frac{3}{2}\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$ будет решением исходного матричного уравнения и решений будет бесконечно много.

2. Решим матричное уравнение $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$ X= $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

$det\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$ =$det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ =0

Снова запишем неизвестную матрицу в виде: X= $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ и подставим ее в матричное уравнение. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что

$\begin{cases} 4x+6z=1 \\ 4y+6t=1 \\ 6x+9z=1 \\ 6y+9t=1 \end{cases}$ – неоднородная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Убедимся , что в отличие от предыдущего примера, эта система несовместна. Запишем расширенную матрицу этой системы $\widehat{A}$ и приведем ее к ступенчатому виду $\widehat{A}_{\text{ст.}}$

$$\widehat{A}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} Э_3^1\left(-\frac{3}{2}\right)\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 6 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Э_4^2\ \left(-\frac{3}{2}\right)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_4^3\ (-1)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Ранг матрицы системы A равен двум, в то время, как ранг расширенной матрицы $\widehat{A}$ равен трем. Система несовместна по теореме Кронекера-Капелли. Матричное уравнение не имеет решения.

Теорема 15. (Критерий разрешимости матричного уравнения). Матричное уравнение AX=B разрешимо тогда и только тогда, когда rkA=rk(A⋮B).

Доказательство. Рассмотрим матричное уравнение

$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}$. Для решения этого уравнения нужно найти n^2элементов матрицы X. Перемножив матрицы A и X и приравняв соответствующие элементы к элементам матрицы B, получим неоднородную систему n^2 линейных уравнений с n^2 неизвестными. Из определения произведения матриц следует, что эта система распадается на n систем с n различными неизвестными. Действительно, первый столбец произведения AX можно найти умножая матрицу A на первый столбец

матрицы X. В результате получаем соотношение $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \cdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \cdots \\ b_n^1 \end{pmatrix}$.Но это- неоднородная система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1^1,.., x_n^1$. Вычисляя второй столбец произведения AX и приравнивая его ко второму столбцу матрицы B, получим систему вида $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \cdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ \cdots \\ b_n^2 \end{pmatrix}$- неоднородную систему с n неизвестными $x_1^2,.., x_n^2$. Наконец, для последнего столдца произведения AX получим соотношения $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \cdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \\ \cdots \\ b_n^n \end{pmatrix}$.Это- неоднородная система с неизвестными $x_1^n,.., x_n^n$. Для существования решения матричного уравнения необходимо и достаточно, чтобы все полученные системы были совместны. Для этого, согласно критерию совместности, необходимо и достаточно, чтобы у каждой системы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы системы.Матрица системы во всех случаях-это матрица A. Расширенные матрицы получаются присоединением одного из столбцов матрицы B. Каждое такое присоединение не должно увеличивать ранг матрицы A. Это означает, что все столбцы матрицы B линейно выражаются через базисные столбцы матрицы A. А это равносильно утверждению, что rkA=rk(A⋮B).

Следствие 1. Если rkA=rk(A⋮B)=n, то матричное уравнение AX=B имеет решение и притом только одно.

Следствие 2. Если rkA=rk(A⋮B)<n, то матричное уравнение AX=B имеет бесконечно много решений.

Посмотрим на примеры 1 и 2.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$X=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\text{rk}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \text{rk}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -0 \end{pmatrix} = 1$

rk(A⋮B)= $\text{rk}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$= $\text{rk}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=1. Ранги равны и меньше порядка матрицы A. Матричное уравнение имеет бесконечно много решений.

2. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ X= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\text{rk}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \text{rk}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$=1

rk(A⋮B)= rk$\begin{pmatrix}4 & 6 & 1 & 1\\ 6 & 9 & 1 & 1\end{pmatrix}$= rk$\begin{pmatrix}4 & 6 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$=2. Ранги матриц не равны, матричное уравнение не имеет решения.

Заметим, что критерий разрешимости матричного уравнения AX=B дословно переносится (вместе с доказательством) на случай прямоугольных матриц, порядки которых согласованы нужным образом.

§ 5. Пример решения Домашней работы 2.

Задание.

1.Решить матричное уравнение AX = B.

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ X=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

а). Найти определитель матрицы A

б). Найти матрицу, обратную к A, методом Gauss'a.

в). Найти матрицу, обратную к A, через алгебраические дополнения.

г). Вычислить матрицу $A^{-1}B$.

д). Убедиться, что эта матрица является решением данного уравнения.

2. Решить матричное уравнение AXB = C

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}$ X $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}2 & 2\\ -8 & -8\end{pmatrix}$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение. Оно отличается от рассмотренных выше, так как матрица B не квадратная, в отличии от матрицы A. Матрица X, которую мы ищем, тоже не является квадратной. Матрицы X и B- матрицы порядка три на два.

а) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}$=-1$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$= -1 Определитель вычислен разложением по второй строке.

б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{Э_2^1\ (-1)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{Э_3^1\ (-1)}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{Э_2\ (-1)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{Э_2^3\ (-2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{Э_1^3\ (-3)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{Э_1^2\ (-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

в) Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

$A_1^1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-1$, $A_1^2=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-3$, $A_1^3=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$,

$A^1_2=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-1$, $A_2^2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1$, $A_2^3=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$,

$A_3^1=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$, $A_3^2=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$, $A_3^3=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$.

$A^*=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ – присоединенная матрица, $(A^*)^T=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$,

$A^{-1}=-(A^*)^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Оба способа привели к одному результату, что естественно в силу единственности обратной матрицы.

г). Вычислим матрицу $A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Мы вычисляли это произведение, так как предположение, что наше уравнение разрешимо, то есть существует X_o такое, что $AX_o=B$ приводит к $X_o=A^{-1}B$.

д). Проверим, что матрица $A^{-1}B$ действительно является решением.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Рассмотрим второе уравнение. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -8 & -8\end{pmatrix}$

Вычислим определители всех числовых матриц этого уравнения. $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$, $\begin{vmatrix}2 & 2\\ -8 & -8\end{vmatrix}=0$. Таким образом обе части матричного уравнения- вырожденные матрицы. Тот факт, что матрица $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ не вырожденная позволяет свести это уравнение к рассмотренному в § 5 типу матричных уравнений. Воспользуемся формулой (5) из § 4. $B^{-1}=1\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Умножим обе части матричного уравнения на B^{-1} справа и получим новое уравнение $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -8 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -8 & 16\end{pmatrix}$. Применим критерий разрешимости матричного уравнения (теорема 15, из § 5). $rk\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}=rk\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1$, $rk\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -4\\ -4 & 8 & -8 & 16\end{pmatrix}=rk\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$. Матричное уравнение разрешимо. Решений будет бесконечно много.Найдем все матрицы X. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -8 & 16\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x-2z=2\\ y-2t=-4\\ -4x+8z=-8\\ -4y+8t=16\end{cases}$. Система упрощается и сводится к системе двух уравнений с четырьмя неизвестными: $\begin{cases}x-2z=2\\ y-2t=-4\end{cases}$. Это- система главного ступенчатого вида, где x,y – главные неизвестные, а z и t – свободные. Решение системы запишем в параметрическом

виде : $x=2\alpha+2$, $y=2\beta-4$, $z=\alpha$,$t=\beta$. $X=\begin{pmatrix}2\alpha+2 & 2\beta-4\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$.

§ 6. Упражнения.

1. Как изменится определитель матрицы порядка n ,если у всех его элементов изменить знак на противоположный?

2. Как изменится определитель матрицы порядка n, если его строки написать в обратном порядке?

3. Многочленом степени n от квадратной матрицы A называется выражение $f(A)=a_n A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1 A+a_0 E$.

а) Доказать, что для каждой квадратной матрицы существует многочлен f(x) такой ,что f(A)=0. ($n\geq 1$)

Такой многочлен называется аннулирующим многочленом матрицы A.

b) Доказать, что аннулирующих многочленов данной матрицы бесконечно много.

4. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - квадратная матрица второго порядка. Доказать, что многочлен $f(x) = x^2 - trA\, x + \det A$ будет аннулирующим для матрицы A.

5. Как изменится определитель матрицы порядка n, если его строки написать в обратном порядке?

6. $A^T = A$, $\det A \neq 0$. Будет ли A^{-1} симметрической матрицей?

7. $A^T = -A$, $\det A \neq 0$. Будет ли A^{-1} кососимметрической матрицей?

8. $A^T A = E$. Чему равен $\det A$?

9. A – целочисленная обратимая матрица. В каком случае матрица A^{-1} будет целочисленной?

10. Решить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & n \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$

11. Как изменится A^{-1}, если в матрице A переставить две строки?

12 . Как изменится A^{-1}, если в матрице A умножить строку на число , отличное от нуля?

13 .Как изменится A^{-1}, если в матрице A к одной строке прибавить другую строку, умноженную на число?

14. Чему равен определитель целочисленной матрицы, если ее обратная матрица целочисленная?

Глава IV Комплексные числа и многочлены.

§1 Поле комплексных чисел

Пусть X – некоторое множество , на котором определенны две операции, то есть заданы два правила, по которым для любых двух элементов множества X однозначно определяется третий элемен,также принадлежащий множеству X.

$(x_1, x_2) \to x_1 \circ x_2$ - 1-ая операция

$(x_1, x_2) \to x_1 * x_2$ - 2-ая операция

Примеры**.**

1. R – множество действительных чисел, а операции –сложение $(x, y) \to x + y$ и умножение $(x, y) \to xy$.
2. $\mathrm{Q}-$ множество рациональных чисел с операциями сложения $(r_1, r_2) \to r_1 + r_2$ и умножения $(r_1, r_2) \to r_1 r_2$.
3. Z- множество целых чисел с операциями сложения $(n, m) \to n + m$ и умножения $(n, m) \to nm$.
4. M_n- множество квадратных матриц порядка n с операциями сложения $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} + \mathrm{B}$ и умножения $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{AB}$.
5. P[x] –множество многочленов от одной переменной x с операциями сложения и умножения многочленов.
6. Рассмотрим множество целых чисел Z и разобьем его на три класса в соответствии с остатком числа от деления на 3, которые мы соответственно обозначим [0], [1], [2]. Множество этих классов обозначим через Z_3. [0]$=\{\ldots -3,0,3,6, \ldots.\}$, [1]$=\{\ldots -2,1,4,7, \ldots.\}$, [2]$=\{\ldots -4, -1,2,5,8, \ldots.\}$. Определим две операции на множестве Z_3. Сложение :[x]+[y]= [x+y mod 3] и умножение: [x]*[y] =[xy mod 3].

Определение 1. Если операции $\circ, *$, заданные на множестве X , которые в дальнейшем будут называться сложением и умножением, обладают следующими свойствами:

- Обе операции коммутативны.
- Обе операции ассоциативны.
- Для каждой операции существует свой нейтральный элемент $0_{(\circ)} -$ для сложения и $1_{(*)}$ – для умножения.
- $0_{(\circ)} \neq 1_{(*)}$
- У любого элемента x существует противоположный элемент (-x) такой, что $x \circ (-\mathrm{x}) = 0_{(\circ)}$.
- У любого элемента $x \neq 0_{(\circ)}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $\mathrm{x} * \mathrm{x}^{-1} = 1_{(*)}$.
- Операции связанны законом дистрибутивности.

то множество X – называется полем.

В примерах 1-6, рассмотренных выше, R,Q и Z_3 являются полями, а остальные множества – нет.(Проверьте это !) Рассмотрим множество **C,** элементами

которого являются пары действительных чисел a и b. Такую пару будем обозначать $z = (a, b)$ и называть комплексным числом.

Определим на множестве C две операции: сложение и умножение.

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2;\ b_1 + b_2) \quad (1)$$

$$z_1 * z_2 = (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2;\ a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (2)$$

Теорема 1**.** Множество **C** с заданными операциями сложения и умножения является полем.

Доказательство. Проверим, что выполняются все свойства операций, перечисленные в определении 1. Если интерпретировать упорядоченную пару вещественных чисел ,как двумерный вектор и заметить, что сложение комплексных чисел по формуле (1)–это сложение соответствующих векторов, то свойства сложения можно считать установленными. Проверим свойства умножения. Умножение комплексных чисел коммутативно: $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$. Это следует из того факта, что формула (2) не меняется при перестановке индексов 1 и 2. Умножение комплексных чисел ассоциативно: $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$.Это проверяется непосредственным умножением по формуле (2). Во множестве C существует нейтральный элемент относительно умножения. Это- $1_{(*)} = (1,0)$. Действительно $(a, b) * (1,0) = (a, b)$ для любого комплексного числа (a, b). Проверим, что если $z \neq (0, 0)$, то у него существует обратный элемент z^{-1} такой, что $z * z^{-1} = (1, 0)$. Действительно, если $z = (a, b)$, а $z^{-1} = (x, y)$ то

$z * z^{-1} = (ax - by; ay + bx) = (1, 0)$. Приравнивая соответствующие элементы, получаем систему $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ – двух уравнений с двумя неизвестными. Определитель матрицы этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$, если $z \neq (0, 0)$. Можно применить формулы Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

$$z^{-1}\ \exists!\quad \text{и}\quad z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2};\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \quad (3)$$

Рассмотрим комплексное число, которое мы обозначим через i и будем называть мнимой единицей $i = (0; 1)$. Вычислим $i^2 = (0;\ 1)(0;\ 1) = (-1;\ 0)$.

Подобно тому, как векторы, расположенные на оси ОХ являются векторами плоскости, так и множество действительных чисел можно считать подмножеством комплексных чисел, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Поставим в соответствие действительному числу a комплексное число $(a, 0)$,а действительному числу b комплексное число $(b, 0)$, тогда сумме действительных чисел $a + b$ соответствует комплексное число $(a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$, а произведению ab - комплексное число $(ab, 0) = (a, 0)(b, 0)$. Будем записывать комплексное число $(a, 0)$ просто, как действительное число a , тогда полученное равенство $i^2 = (-1;\ 0)$ можно записать в виде $i^2 = -1$, а комплексное число z=$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.Такая запись числа $z = a + bi$ называется алгебраической записью комплексного числа z=(a, b).

Поле комплексных чисел получаеся присоединением к полю действительных чисел одного нового элемента – мнимой единицы. Число a в алгебраической записи комплексного числа z называется его действительной частью и обозначается $\mathrm{Re(z)}$, а число b называется мнимой частью и обозначается $\mathrm{Im(z)}$. Обе части комплексного числа и вещественная $\mathrm{Re(z)}$ и мнимая $\mathrm{Im(z)}$- действительные числа! $z = \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)}i$. Модулем комплексного числа называется неотрицательное вещественное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Модуль числа равен нулю тогда и только тогда, когда z=0. Число $a - bi$ называется сопряженным к числу $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$. Число z и его сопряженное $\bar{z}$ связаны соотношениями. Сумма и произведение двух комплексно сопряженных чисел – действительные числа. z+$\bar{z}$=2Rez , а z$\bar{z}$ = $|z|^2$

Определение 2. Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое число z_3, для которого $z_1 = z_2 z_3$.

Теорема2. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 , если $z_2 \neq 0$, в поле комплексных чисел существует частное .

Доказательство**.** Из того, что z_2 отлично от нуля следует, что у него существует обратное число z_2^{-1}. Умножим обе части равенства, определяющего частное, на z_2^{-1} и воспользуемся коммутативностью умножения . Мы получим $z_3=z_1\ z_2^{-1}$.Воспользуемся формулой (3) для обратного элемента $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2};\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

$$z_3 = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} . \qquad (4)$$

Формула (4) показывает, как найти частное двух комплексных чисел: записать частное в виде обыкновенной дроби $\frac{z_1}{z_2}$ (это- условная запись) , а

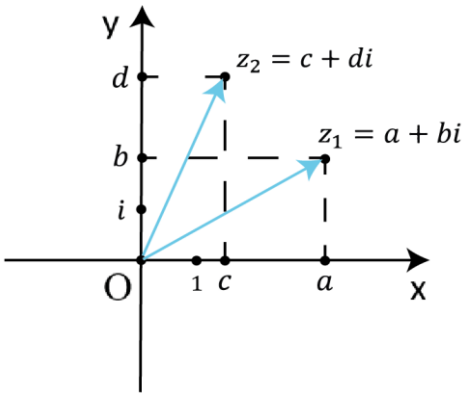
затем и числитель и знаменатель умножить на число сопряженное к знаменателю.

Пример. Найти частное двух комплексных чисел.

$$\frac{1-3i}{2+4i}=\frac{(1-3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{2-6i-4i+12i^2}{2^2-16i^2}=\frac{-10-10i}{20}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

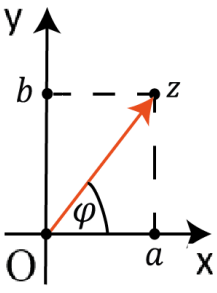
§2. Геометрическая модель поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Рассмотрим плоскость и фиксированную декартову систему координат OXУ. Каждому комплексному числу $z=a+bi$ соответствует точка плоскости Z с координатами Z(a;b) и вектор $\overrightarrow{OZ}$, идущий из начала координат в эту точку, причем это соответствие взаимно однозначное. Плоскость, каждая точка которой отождествлена с комплексным числом, называется комплексной плоскостью.



Вещественные числа $z=a$ находятся на оси OX,которая называется действительной осью, а комплексные числа z=bi, называемые чисто мнимыми, находятся на оси OY ,которая называется мнимой осью. Сумме комплексных чисел z_1+z_2 соответствует вектор $\overrightarrow{OZ}_1+\overrightarrow{OZ}_2$.

Что касается произведения комплексных чисел $z_1 * z_2$, то его геометрическая интерпретация потребует еще одной формы записи комплексного числа. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OZ}$, идущий из начала координат в точку Z(a;b), соответствующую комплексному числу $z=a+bi$. Модуль этого вектора равен модулю комплексного числа: $\left|\overrightarrow{OZ}\right| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.



Рассмотрим угол φ между вектором $\overrightarrow{OZ}$ и положительным направлением оси OX. Угол определен неоднозначно, с точностью до $2\pi к$, поэтому для однозначности мы фиксируем промежуток $\varphi \in (-\pi;\ \pi]$. Угол φ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $arg(z)$.

Отметим, что у числа 0 модуль равен нулю, а аргумент не определен.

Действительная и мнимая части комплексного числа однозначно выражаются через модуль и аргумент этого числа: $a = \sqrt{a^2 + b^2}cos(\varphi) = |z|cos(\varphi)$, $b = \sqrt{a^2 + b^2}sin(\varphi) = |z|\sin(\varphi)$ подставим эти выражения в алгебраическую форму записи комплексного числа. $z = a + bi = |z|cos(\varphi) + |z|sin(\varphi)i = |z|(cos(\varphi) + isin(\varphi))$.Такая форма записи называется тригонометрической формой комплексного числа

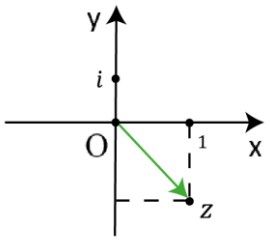
Примеры тригонометрической формы комплексных чисел:

$z = 1 = 1(cos(0) + isin(0)), \quad z = i = 1(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)).$

$z = -1 = 1(cos(\pi) + isin(\pi))$,$z = -i = 1(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right))$

Модули этих комплексных чисел равны 1, следовательно, на комплексной плоскости они располагаются на единичной окружности.

Пусть $z = 1 - i$,тогда модуль этого числа $|z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Для нахождения аргумента полезно сделать чертеж, из которого следует, что $arg(z) = -\frac{\pi}{4}$, а тригонометрическая форма $z = \sqrt{2}(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$.



Теорема 3. При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Вычислим произведение комплексных чисел в тригонометрической форме:

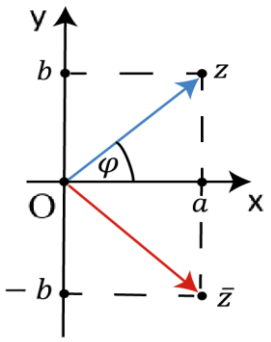
$$z_1 = |z_1|(cos(\varphi_1) + isin(\varphi_1)), \qquad z_2 = |z_2|(cos(\varphi_2) + isin(\varphi_2))$$

$z_1 * z_2 = |z_1||z_2|\big(cos(\varphi_1) + isin(\varphi_1)\big) * \big(cos(\varphi_2) + isin(\varphi_2)\big) = |z_1||z_2|((cos(\varphi_1)cos(\varphi_2) - sin(\varphi_1)sin(\varphi_2)) + i(cos(\varphi_1)sin(\varphi_2) + sin(\varphi_1)cos(\varphi_2))) = |z_1||z_2|(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)).$

$$|z_1 * z_2| = |z_1||z_2| \qquad (5)$$

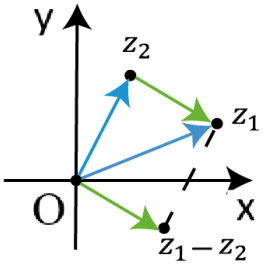
$$\arg(z_1 * z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} \qquad (6)$$

Эти формулы позволяют установить геометрический смысл умножения комплексных чисел. Зафиксируем комплексное число z_0 и будем умножать его на произвольное комплексное число z. Возникает отображение комплексной плоскости на себя: $z \to z_0 z$, при котором , согласно формулам (5) и (6) длина вектора $\overrightarrow{OZ}$ умножается на фиксированное число r= $|z_0|$,а угол этого вектора с положительным направлением действительной оси изменяется на фиксированный угол α= $\arg(z_0)$. Таким образом на плоскости происходит композиция поворота на угол α и гомотетии (подобия) с коэффициентом r. Умножение комплексного числа z на мнимую единицу $z \to z * i$ осуществляет поворот плоскости на 90^o.



Пусть $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ два комплексно сопряжённых числа , тогда соответствующие векторы $\overrightarrow{OZ}$ и $\overrightarrow{O\bar{Z}}$ симметричны относительно действительной оси, $|z| = |\bar{z}|$, а $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$.Числа, расположенные на действительной оси (вещественные числа) - самосопряжённые: $a = \bar{a}$.

Пример. Рассмотрим два комплексных числа z_1 и z_2 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и найдем расстояние d между соответствующими точками.

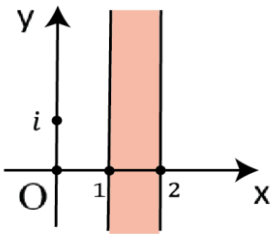


Из чертежа следует, что d= $|z_1 - z_2|$.

Многие линии и фигуры на плоскости удобно задавать с помощью комплексных чисел.

Примеры.

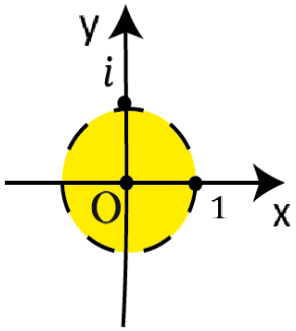
1. Вертикальная полоса может быть задана как множество M = {z; 1 ≤ Rez ≤ 2}.



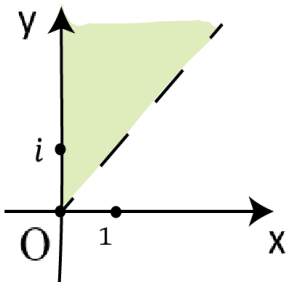
2.Внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат может быть задана, как множество M = {z; |z| < 1}. Если центр

окружности находится в точке z_0 , а ее радиус равен r, то окружность можно описать, как множество

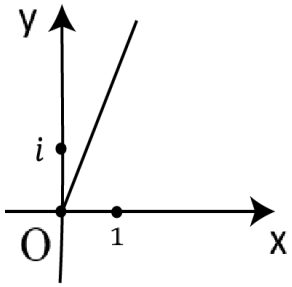
M = {z; $|z-z_0|$ = r}.



3. Угол между двумя лучами с вершиной в начале координат удобно описывать с помощью понятия аргумента комплексного числа. Например, множество M = {z, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$}- угол, изображенный на рисунке.



4. Множество M = {z, $\arg \bar{z} = -\frac{\pi}{3}$}, в силу соотношения $\arg(z)=-\arg(\bar{z})$, представляет собой луч, идущий под углом $\frac{\pi}{3}$ к оси OX.



§3. Возведение в степень и извлечение корней.

Рассмотрим тригонометрическую форму записи комплексного числа $z=|z|\left(cos(\varphi) + i\, sin(\varphi)\right)$ и введем обозначение $\left(cos(\varphi) + isin(\varphi)\right)= e^{i\varphi}$.Теперь комплексное число можно записать еще в одной форме, называемой эйлеровой формой : $z=|z|e^{in\varphi}$.

Примеры записи комплексного числа в эйлеровой форме.

i==$e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-1 = e^{i\pi}$, $1 = e^{i0}$. .

Теорема 4 .Для возведения комплексного числа в степень справедлива формула Муавра:

$$z^n=|z|^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right)=|z|^n * e^{in\varphi}. \qquad (7)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться утверждением теоремы 3 об умножении комплексны чисел в тригонометрической форме.
Примеры.

1.Найти z^{135}, если $z = 1+\sqrt{3}i$. Для начала найдем тригонометрическую форму числа z. Вычислим $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ и найдем угол $\varphi = \arg z$ следующим образом: запишем z= 2($\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$). (мы умножили и разделили число z на его модуль).Вещественная и мнимая части числа, записанного в скобках являются тригонометрическими функциями некоторого угла α. Действительно, каждое из этих чисел по модулю меньше единицы, а сумма их квадратов равна единице. Следовательно, из соотношений $cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем, что $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ и аргумент z с учетом ограничений $\varphi \in (-\pi;\ \pi]$ равен $\frac{\pi}{3}$,а $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Применяем формулу Муавра (7) и получаем : $z^{135} = 2^{135}e^{i\frac{\pi}{3}135}$. Эта формула нуждается в упрощении! Преобразуем угол $135\frac{\pi}{3} = 45\pi = \pi + 44\pi$, отбросим(с учетом ограничения $\varphi \in (-\pi;\ \pi]$) кратное число периодов $2k\pi$=44π и получим $z^{135} = 2^{135}e^{i\pi} = -2^{135}$.

2. Вычислить$(-1+i)^{98}$. $z = -1+i$, $|z| = \sqrt{2}$, arg(z) находим из условий $cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi \in (-\pi;\ \pi]$. Следовательно φ = $\frac{3\pi}{4}$,а $z^{98} = 2^{49}e^{\frac{i3\pi}{4}98}$=$-2^{49}e^{\frac{-i\pi}{2}}$, так как $\frac{3\pi}{4}98 = \frac{147\pi}{2} = 73\pi + \frac{\pi}{2} = 74\pi - \frac{\pi}{2}$.

Окончательно получаем $z^{98} = -2^{49}i$.

Извлечение корней из комплексных чисел.

Определение 3. Число $w \in \mathbb{C}$ называется корнем степени n (n∈ N)из числа z∈ $\mathbb{C}$, если $w^n = z$.

Запишем число в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и попробуем исходя из определения найти неизвестное число w . Пусть в

тригонометрической форме $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Из условия $w^n = z$ по формуле Муавра получаем: $w^n = |w|^n(\cos(\alpha n) + i\sin(\alpha n))$. Так как $w^n = z$, то $|w|^n = |z|$ и $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, $\cos(\alpha n)=\cos(\varphi)$, $\sin(\alpha n)=\sin(\varphi)$.

Из двух последних соотношений получаем $\alpha n = \varphi + 2k\pi$, $\alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$, где n – степень корня, а $k \in Z$.

Рассмотрим различные $k \in Z$ и соответствующие углы α :если $k = 0$, то $\alpha = \frac{\varphi}{n}$, если $k = 1$, то $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$,..., если $k = n-1$, то $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$. Все эти числа различны, а в случае $k = n$ $\alpha = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \frac{\varphi}{n}$ – совпадает со случаем к=0. Таким образом, мы получили n различных значений корня степени n из комплексного числа.

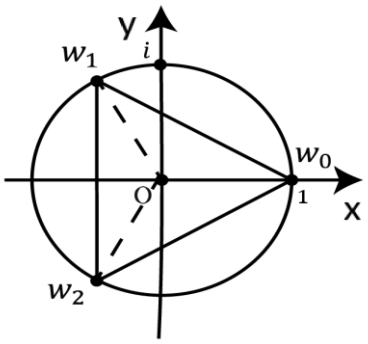
$$\sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1 \qquad (8)$$

Примеры. 1. Вычислить $\sqrt[3]{1}$. Запишем 1 в тригонометрической форме: $1 = 1\,(\cos 0 + i\,sin\,0)$. Формулы (8) дают три различных числа:

$$w_0 = 1\left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) = 1$$

$$w_1 = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Из формулы (8) следует, что все корни степени n из одного комплексного числа z располагаются на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ в вершинах правильного n -угольника.

.

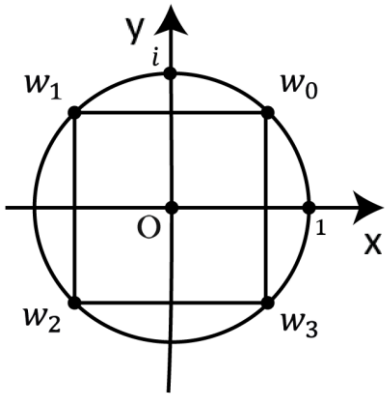
2.Вычислить $\sqrt[4]{-1}$. $-1 = 1\,(\cos\pi + i\,sin\,\pi)$ - тригонометрическая форма числа -1.

$$w_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_3 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



§ 4. Приложения.

1. Решение квадратных уравнений .

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a,b,c- произвольные комплексные числа и будем искать его корни в поле комплексных чисел.

$ax^2+bx+c=a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a})= a(x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a})= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$

$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$, в правой части этого равенства $D= b^2-4ac$ – дискриминант квадратного члена. $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Так как в поле С можно извлекать корень из любого числа, то $x+\frac{b}{2a}=\sqrt[2]{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$. В право части- два значения квадратного корня. (Символ $\sqrt[2]{\ }$, в отличии от $\sqrt{\ }$, подразумевает два значения.) В результате получаем два корня:

$$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt[2]{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad (9)$$

Примеры решения квадратного уравнения.

1. $x^2+2x+2=0$. В этом примере коэффициенты многочлена вещественные. $D=4-8<0$, поэтому вещественных корней нет. $x^2+2x+2=(x+1)^2+1=0$ $(x+1)^2=-1$, $x+1=\sqrt[2]{-1}$. Найдем корни из -1 по формуле (8) $w_0=i, w_1=-i$. $x=-1\pm i$- корни уравнения.

2. $2z^2-z(2i+1)+(i-1)=0$. В левой части уравнения многочлен с комплексными коэффициентами . Формула (9) позволяет найти корни и в этом случае $z_{1,2}=\frac{2i+1+\sqrt[2]{D}}{2}$. Вычисляем дискриминант.

$D=(1+2i)^2-4(-1+i)=1-4+4i+4-4i=1$, $\sqrt[2]{D}$ имеет два значения : 1 и -1. В результате получаем: $z_{1,2}=\frac{2i+1\pm1}{2}$ $z_1= i$, $z_2=1+i$.

3. $z^2-5z+4+10i=0$. Применяем формулу (9) , $z_{1,2}=\frac{5+\sqrt[2]{D}}{2}$. Найдем дискриминант $D=25-4(4+10i)=9-40i$. Для извлечения квадратного корня из

комплексного числа 9-40i применим алгебраический способ извлечения квадратных корней. Запишем искомый корень (их – два) в виде x+yi и возведем его в квадрат. $(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi=9-40i$. Приравняем действительные и мнимые части комплексных чисел. В результате получим систему: $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ 2xy=-40 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x=-\frac{20}{y} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{400}{y^2}-y^2=9 \\ x=-\frac{20}{y} \end{cases}$,

$\begin{cases} y^4+9y^2-400=0 \\ xy=-20 \end{cases}$, Система распадается на две $\begin{cases} y^2=-25 \\ xy=-20 \end{cases}$ и $\begin{cases} y^2=16 \\ xy=-20 \end{cases}$. Первая система несовместна, а вторая – имеет два решения $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases}$. $\sqrt[2]{D}=\pm(5-4i)$

$z_{1,2}=\frac{5+\sqrt[2]{D}}{2}=\frac{5\pm(5-4i)}{2}$. z_1=5-2i, z_2=2i – корни уравнения.

2. Системы линейных уравнения над полем C.

Рассмотрим систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами и комплексными свободными членами.

$$\begin{cases} a_1^1 x_1+a_1^2 x_2+\cdots+a_1^n x_n=b_1 \\ a_2^1 x_1+a_2^2 x_2+\cdots+a_2^n x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_m^1 x_1+a_m^2 x_2+\cdots+a_m^n x_n=b_m \end{cases}$$

Решением системы называется набор из n комплексных чисел, при подстановке которых вместо соответствующих неизвестных получаются тождества. Вся теория систем из главы 2 переносится на комплексный случай, в том числе метод Гаусса и формулы Крамера.

Пример. Решить систему $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$

Это система двух линейных уравнений с двумя неизвестным. Вычислим определитель матрицы этой системы $\Delta=\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{vmatrix}$=4i (отметим, что $(1+i)^2$=2i,а $(1-i)^2$=- 2i). Можно воспользоваться формулами Крамера.

$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+3i & 1+i \end{vmatrix}=(1+i)^2-(1-i)(1+3i)=-4$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & 1+3i \end{vmatrix}$ = (1 + i)(1 + 3i) - (1 + i)(1-i) = -4+4i.

В результате получаем $z_1 = \frac{-4}{4i}$ =i , $z_2 = \frac{-4+4i}{4i}$ = 1+i.

§ 5. Кольцо многочленов.

Определение 4. Пусть К – множество с двумя операциями +,* , которые в дальнейшем будут называться сложением и умножением. Если операции обладают следующими свойствами:

а) сложение коммутативно.

в) обе операции ассоциативны.

с) для каждой операции существует свой нейтральный элемент $0_{(+)}$ – для сложения и $1_{(*)}$ – для умножения.

(*)

d)у любого элемента х существует противоположный элемент (-х) такой, что $x + (-\text{x}) = 0_{(+)}$.

е) операции связанны законом дистрибутивности: $a(b + c) = ab + ac$ то множество К – называется кольцом.

Если умножение коммутативно, то кольцо К называется коммутативным.

Примеры

1) $\mathbb{Z}$ – целые числа с операциями сложения и умножения- коммутативное кольцо.
2) M_n – матрицы порядка n с операциями сложения и умножения- некоммутативное кольцо.

Рассмотрим множество P[x]– множество многочленов вида $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, где коэффициенты $a_0 \ldots a_n$ принадлежат полю $\mathbb{P}$. (Мы будем рассматривать поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.) Операции на множестве P[x]– это обычное сложение $p(x) + q(x)$, для которого $p_0(x) = 0$ – нейтральный элемент , и обычное умножение с приведением подобных членов $p(x)q(x)$, для которого $p_e(x) = 1$ – нейтральный элемент. Свойства, перечисленные в определении кольца, выполняются, следовательно множество P[x]– кольцо многочленов.

Для любого многочлена $p(x)$, кроме $p_0(x) = 0$ определена числовая характеристика -его степень, обозначаемая $\deg p(x)$. Если $p(x) =$

$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ и $a_n \neq 0$, то $\deg p(x) = n$. Константа – многочлен нулевой степени. Степень многочлена обладает важными свойствами, связанными с рассматриваемыми операциями:

$\deg\big(p(x) + q(x)\big) \leq \max(\deg p(x), \deg q(x))$
$\deg\big(p(x) * q(x)\big) = \deg p(x) + \deg q(x)$.

Исследуем, в каком случае у многочлена $p(x) \neq 0$ существует обратный элемент $p^{-1}(x)$.Если обратный элемент $p^{-1}(x)$ существует, то $p(x) * p^{-1}(x) = 1$. Воспользуемся свойством степени deg($p(x) * p^{-1}(x)$)= $\deg p(x) + \deg p^{-1}(x) = \deg 1 = 0$. Следовательно, $\deg p(x) = 0$, а многочлен р(х)-константа. Если $p(x) = a \neq 0$, то $p^{-1}(x) = \frac{1}{a}$.

Определение 5.Многочлен $p(x)$ делится на многочлен $q(x)$, если существует многочлен $s(x)$, такой что $p(x) = q(x) * s(x)$.

Если многочлен $p(x)$ не делится на $q(x)$,то его можно разделить с остатком.

Теорема 5. (О делении с остатком). Для любых многочленов $p(x)$ и $q(x)$ существуют многочлены $s(x)$ и $r(x)$ и притом единственные такие, что $p(x) = q(x) * s(x) + r(x)$, причём $\deg r(x) < \deg q(x)$.

Доказательство. (делением многочленов столбиком)

Пример .Разделим многочлен $p(x)$ =x^3-3x^2-x-1 на многочлен

$q(x)$=3x^2-2x+1 с остатком.

x^3-3x^2-x-1 | $\underline{3x2 - 2x + 1}$

$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$

$-\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1$

$-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$

$-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$

Таким образом x^3-3x^2-x-1 = (3x^2-2x+1)($\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$)+($-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$) . Эта запись-результат деления многочлена x^3-3x^2-x-1 на многочлен 3x^2-2x+1 с остатком. Остаток $r(x)$= $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$.

§ 6. Корни многочлена.

Выше мы рассмотрели множество $P[x]$ с алгебраической точки зрения, теперь рассмотрим многочлен, как функцию от элементов поля P.

Определение 6. Число $\alpha \in P$ называется корнем многочлена $p(x)$, если $p(\alpha) = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$

Наличие корней у многочлена зависит от того , какие значения переменного x допускаются, то есть зависит от поля P над которым мы рассматриваем многочлен.

Примеры:

1) $p(x) = x^2 - 2$. Рассмотрим этот многочлен над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Рациональных корней нет, однако над полем действительных чисел имеется два корня $x = \pm\sqrt{2}$ – иррациональные числа.
2) $p(x) = x^2 + 1$. Если рассматривать этот многочлен над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, то многочлен не имеет коней, однако над полем $\mathbb{C}$ многочлен имеет два корня $x = \pm i$.

Теорема 6. (Основная теорема алгебры).

Если $p(x)$ – многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$, степень которого $\deg p(x) \geq 1$, то у него существует хотя бы один комплексный корень .

Доказательство принадлежит Гауссу и использует теорию функций комплексного переменного .

Понятие корня многочлена позволяет более глубоко изучить алгебраическую структуру кольца многочленов.

Теорема 7. (Безу). Число α является корнем многочлена $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ делится на $(x - \alpha)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть α – корень многочлена $p(x)$, то есть $p(\alpha) = 0$.Разделим $p(x)$ на $(x - \alpha)$ с остатком $r(x)$, при этом степень остатка $\deg r(x) < 1$. Следовательно $\deg r(x) = 0$, и $r(x) = r$- константа. Подставим вместо переменного x число α в формулу деления многочлена на многочлен с остатком: $p(x) = (x - \alpha) * s(x) + r$. Получаем $p(\alpha) = (\alpha - \alpha) * s(\alpha) + r$. $0 = s(\alpha) * 0 + r = r$. Следовательно, $r = 0$.

Необходимость. Пусть многочлен $p(x)$ делится на $(x - \alpha)$, то есть $p(x) = s(x) * (x - \alpha)$, тогда $p(\alpha) = s(\alpha) * (\alpha - \alpha) = 0$. Следовательно, α – корень многочлена.

Определение7. Число $\alpha \in P$ называется корнем кратности k, если $p(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$. Если кратность k=1, то корень называется простым.

Теорема 8.(О кратных корнях многочлена.) Если число $\alpha \in P$ является корнем многочлена $p(x)$ кратности k, то оно является корнем кратности k-1 его производной p′(x).

Доказательство. Заметим, что понятие производной в кольце многочленов можно ввести чисто алгебраически. Если $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, то его производной называется многочлен p′(x) = n$a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Из этого определения выводятся все привычные свойства производной, в том числе формулы для производной суммы и производной произведения, которыми мы будем пользоваться. Пусть $\alpha \in P$ корнь многочлена $p(x)$ кратности k ,тогда p (x)= $(x-\alpha)^k$q(x), причем q(α)≠ 0, иначе по теореме Безу q(x) делился бы на $x-\alpha$, что противоречит определению кратности корня ($p(x)$ не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$). Найдем производную p′(x) =k$(x-\alpha)^{k-1}$ q(x)+ $(x-\alpha)^k q(\acute{x})$ =$(x-\alpha)^{k-1}$(k q(x)+$(x-\alpha)\, q(\acute{x})$). Многочлен` делится на $(x-\alpha)^{k-1}$, но не делится на $(x-\alpha)^k$, так как при x=α многочлен k q(x)+ $(x-\alpha)\, q(\acute{x})$ равен k q(α)≠ 0.

Примеры.

1.Найдем при каком значении параметра λ многочлен $p(x)$ = x^3-3x+λ имеет кратные корни? Воспользуемся теоремой 8, согласно которой корень кратности $k > 1$ должен быть корнем производной p′(x) =3x^2-3. Многочлен p′(x) имеет два простых корня x=1 и x=-1. Подставим эти значения в многочлен $p(x)$. $p(1)$ =-2+λ, $p(-1)$=2+λ. Таким образом, при λ=2 многочлен $p(x)$ = x^3-3x+2 имеет корень x=1 кратности 2, а при λ=-2 этот многочлен имеет корень x=-1, также кратности 2. При других значениях λ у многочлена $p(x)$ не будет кратных корней, хотя один вещественный корень будет обязательно!

2.Определить кратность k корня x=-1 многочлена p(x)= 3x^5+2x^4+x^3-10x-8. Проверим, что x=-1 действительно является корнем многочлена p(x). Вычислим p(-1)=-3+2-1+10-8=0. Найдем производную p′(x) =15x^4+8x^3+3x^2-10 и вычислим p′(-1) =0, найдем вторую производную p″(x) =60x^3+24x^2+6x и вычислим p″(-1) ≠ 0 , следовательно кратность корня k=2.

Следствие (из основной теоремы алгебры**).** Любой многочлен степени n (n≥ 1)над полем $\mathbb{C}$ имеет n корней с учетом их кратности.

Доказательство проведем методом математической индукции. Если степень многочлена $\deg p(x) = 1$, то $p(\mathrm{x}) = a_1\mathrm{x} + a_0,\ a_1 \neq 0$. В этом случае $x = -\frac{a_0}{a_1}$ – корень многочлена. Предположим, что утверждение следствия верно для многочлена p(x) , степень которого $\deg p(x) = n - 1$ и $\deg p(x) > 0$, и покажем ,что тогда оно верно и для многочлена p(x), у которого степень $\deg p(x) = n$. Действительно, согласно Основной теореме алгебры, у многочлена p(x) есть хотя бы один корень α_1. По теореме Безу $p(x) = (x - \alpha_1)\ \ q(x)$, где , согласно свойству степеней, $deg\, q\,(x) = n - 1$. По предположению индукции $q(x)$ имеет $n - 1$ корней с учетом их кратности, которые являются корнями многочлена $p(x)$. Следовательно с учетом корня α_1 многочлен $p(x)$ имеет n корней .

Рассмотрим $p(x)$ над полем $\mathbb{C}$ такой, что $\deg p(x) = n$ (n≥ 1), тогда, согласно теоремам 6 и 7, у многочлена есть корень c_0 и $p(x) = (x - c_0) * s(x)$. Если $\deg s\,(x) = n - 1$ ($n-1 \geq 1$), то из тех же соображений у многочлен s(x) есть корень c_1 и $s(x) = (x - c_1) * s_1(x)$, где $\deg s_1\,(x) = \deg s\,(x) - 1$. Через n шагов получим $p(x) = (x - c_0) * (x - c_1) * \cdots * (x - c_{n-1}) * a$. Последний множитель- константа, это многочлен нулевой степени $s_{n-1}(x)$, который совпадает со старшим коэффициентом a_n многочлена p(x). Соберем одинаковые множители и получим: $p(x) = (x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_s)^{k_s}$, где $c_1, \dots, c_s$ – различные корни многочлена , а $k_1, \dots, k_s$ – кратности этих корней.

Разложение $p(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \cdots\ (x - c_s)^{k_s}$ называется каноническим разложением многочлена над полем C. Раскроим скобки и приведем подобные члены по степеням x. $p(x) = a(x^n - (c_0 + \cdots + c_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0 * \cdots * c_{n-1}) =$

$$= ax^n - a(c_0 + \cdots + c_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-1)^n * a * c_0 * \cdots * c_{n-1}$$

Теорема 9. (Виета для многочлена степени n). Если старший коэффициент a_n многочлена p(x) степени $n \geq 2$ равен 1, а $x_1 \dots x_n$ – корни этого многочлена с учетом их кратностей ,то

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = -a_{n-1} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \\ \vdots \\ x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0 \end{cases} \qquad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим разложение многочлена $p(x) = (x - x_1) * (x - x_2) * \cdots * (x - x_n)$ на множители первой степени .После раскрытия скобок и приведения подобных членов приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменного x. В результате получим формулы (10).

Замечание. Левые части формул (10) представляют собой многочлены от n переменных: $\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ ..., $\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n$ Эти многочлены симметрические, то есть они не меняются при перестановках переменных. Многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ называются элементарными симметрическими многочленами. Можно доказать, что любой симметрический многочлен представляется единственным образом в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Например, $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = (\sigma_1)^2-2\sigma_2$.

Определение 8 . Многочлен $p(x)$ называется неприводимым над полем P, если его нельзя представить в виде произведения $p(x) = q(x) * s(x)$, где $q(x)$ и $s(x) -$ многочлены с коэффициентами из поля P

и $\deg q\,(x) > 0, \deg s\,(x) > 0.$

Из канонического разложения следует, что неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются многочлены 1-й степени и только они. Если $p(x) = ax + b$-многочлен первой степени, то его каноническое разложение $p(x) = a(x + \frac{b}{a})$, где $-\frac{b}{a}$-корень уравнения $p(x) = 0$. Если $\deg p(x) > 1$, то $p(x)$ – приводим.

Пусть $p(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами. Исследуем его неприводимость над полем $\mathbb{R}$. Если deg p(x) =1, то многочлен неприводим. Однако это условие не является необходимым, в отличии от комплексного случая. Например, многочлен $p(x) = x^2 + 1$ – неприводим.

Теорема 10. (О комплексных корнях многочлена с вещественными коэффициентами). Пусть $p(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, и $\alpha \in \mathbb{C}$ его корень , тогда число $\bar{\alpha}$ (комплексно-сопряженное) также является корнем этого многочлена.

Доказательство. Пусть $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ и $p(\alpha) = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$. Теорема утверждает, что $p(\bar{\alpha}) = a_n\bar{\alpha}^n + \cdots + a_1\bar{\alpha} + a_0 = 0$. Чтобы убедится в этом нам понадобятся дополнительные свойства комплексного сопряжения: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ и $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}$. Комплексное сопряжение- симметрия относительно действительной оси на комплексной плоскости. Свойство $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ следует из того, что образ суммы векторов при симметрии совпадает с суммой их образов. Для вывода второго свойства перейдем к Эйлеровой форме комплексных чисел:

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}, \quad \bar{z_1} = |z_1|e^{-i\varphi_1}, \bar{z_2} = |z_2|e^{-i\varphi_2}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = |z_1||z_2|e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}, \bar{z_1} \cdot \bar{z_2} = |z_1||z_2|e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}.$$

Рассмотрим равенство $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha + a_0 = 0$ и его комплексное сопряжение $\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha + a_0} = \bar{0}$. Воспользуемся свойствами комплексного сопряжения и получим $\overline{a_n}\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}+\ldots+\overline{a_1}\bar{\alpha} + \overline{a_0} = \bar{0}$

Но все $a_i \in \mathbb{R}$, поэтому $\bar{a_i} = a_i$ и $\bar{0} = 0$. Следовательно,

$a_n\bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1}+\ldots+a_1\bar{\alpha} + a_0 = 0$ и $\bar{\alpha}$-корень многочлена p(x).

Теорема 11.(О неприводимых многочленах над полем $\mathbb{R}$.) Пусть p(x) многочлен с вещественными коэффициентами неприводимый над полем $\mathbb{R}$, тогда либо $degp(\mathrm{x}) = 1$, либо $degp(\mathrm{x}) = 2$ и многочлен p(x) не имеет вещественных корней.

Доказательство. Если p(x) неприводимый многочлен и у него есть вещественный корень α, то $p(x) = a(x-\alpha)$ и, следовательно, $deg(p) = 1$.Пусть $\deg p(x) > 1$ и он неприводим, тогда $p(x)$ не имеет вещественных корней, так как равенство $p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$, где $degq(\mathrm{x}) \geq 1$– невозможно для неприводимого многочлена. Пусть p(x) – неприводимый многочлен $\deg(p) > 1$ и α – его комплексный корень, тогда $\bar{\alpha}$ – тоже корень многочлена p(x).Многочлен с вещественными коэффициентами можно рассматривать, как многочлен над полем C и разложить его на множители $p(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\cdot s(x) = (x^2 - (\alpha+\bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha})\cdot s(x) = (x^2 - 2Re\alpha\cdot x + |\alpha|^2)\cdot s(x)$. В первой скобке – многочлен второй степени с вещественными коэффициентами, а поскольку многочлен $p(x)$ неприводим над полем R, то $s(x) = a\ (const)$.

Метод разложения многочлена $p(x)$ с вещественными коэффициентами на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$.

Разложим многочлен $p(x)$ над полем $\mathbb{C}$. $p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_s)^{k_s}$-

каноническое разложение многочлена ,где c_i – корень многочлена k_i – его кратность , а $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n = \deg(p)$. Если c_i – вещественное число, то множитель $(x-c_i)^{k_i}$ остается в разложении. Если c_i – комплексное число α то ,согласно теореме 10 существует c_j равное $\bar{\alpha}$. Объединим два множителя $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ и получим многочлен второй степени с вещественными коэффициентами вида $x^2 + px + q =$

$x^2 - 2Re\alpha\cdot x + |\alpha|^2$. Заметим, что кратности корней α и $\bar{\alpha}$ должны быть одинаковыми $k_i = k_j$.В результате получаем разложение:

$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$,где $c_1\ldots c_m \in \mathbb{R}$, $x^2 + p_kx + q_k$ не имеет корней $\forall k = \overline{1,\ldots,r}$, а $deg(p) =$

$n = k_1 + \ldots + k_m + 2(l_1 + \ldots + l_s)$. Это разложение называется каноническим разложением вещественного многочлена на неприводимые множители.

Примеры. Разложить многочлен $p(x)$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

1. $p(x) = x^4 + 1$. Найдем корни многочлена $x^4 + 1 = 0$, $x^4 = 1$, $x = \sqrt[4]{-1}$. Для вычисления корней из -1 используем тригонометрическую форму числа $-1 = 1\,(\cos\pi + i\,sin\,\pi) = e^{i\pi}$. Воспользуемся формулой (8) . $\sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{|z|}\,e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})}$ k = 0, 1, … n-1 . Для корня четвертой степени имеется четыре различных значения:

$$w_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_3 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$x^4 + 1 = (x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ – разложение над $\mathbb{C}$.

Корни w_0 и w_3- комплексно сопряжены, так же, как w_1 с w_2. Объединим соответствующие множители и вычислим произведения:

$$((x - \frac{\sqrt{2}}{2}) - i\frac{\sqrt{2}}{2})((x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - i^2\frac{2}{4} = x^2 - \sqrt{2}\cdot x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1$$

$$((x + \frac{\sqrt{2}}{2}) - i\frac{\sqrt{2}}{2})((x + \frac{\sqrt{2}}{2}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = (x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - i^2\frac{2}{4} = x^2 + \sqrt{2}\cdot x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1$$

$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1)$ – разложение на неприводимые множители над $\mathbb{R}$.

Если требуется найти разложение на неприводимые множители только над полем R, то разложение на неприводимые многочлены можно упростить.

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}\,x\right)^2$$
$$= (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$$

2. $p(x)$ =2x^3+3x^2+6x-4 . $p(x)$ − многочлен нечетной степени и у него должен быть хотя бы один вещественный корень. Попробуем подобрать этот корень, используя теорему 12.

Теорема 12. (О рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами). Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, где коэффициенты многочлена $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – целые числа, тогда p –делитель свободного члена a_o, а q- делитель старшего коэффициента a_n.

Доказательство предлагается в качестве дополнительной задачи.

Вернемся к многочлену p(x) =2x^3+3x^2+6x-4 из примера 2 и опишем все неприводимые дроби , удовлетворяющие заключению теоремы 12. Это числа $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$. Подставим эти числа вместо x в многочлен и убедимся, что p($\frac{1}{2}$)=0. Из теоремы Безу следует, что p(x) делится на (x-$\frac{1}{2}$). В результате деления получим p(x)= (x-$\frac{1}{2}$)(2x^2+4x+8)=2(x-$\frac{1}{2}$)(x^2+2x+4). Последний многочлен неприводим над полем R и мы получили требуемое разложение. Для разложения многочлена p(x) на неприводимые множители над полем C найдем корни многочлена x^2+2x+4 с помощью формулы (9). $z_{1,2} = \frac{-1+\sqrt[2]{D}}{2}$= $\frac{-1+\sqrt[2]{3}}{2}$=$\frac{-1}{2}$ $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. p(x)=2(x-$\frac{1}{2}$)(x+$\frac{1}{2}$ $+\frac{\sqrt{3}}{2} i$)(x+$\frac{1}{2}$ $-\frac{\sqrt{3}i}{2}$) - разложение на неприводимые множители над полем C.

Определение 9. Спектром многочлена $p(x)$ называется множество **S** = $Spec(p) = \{\lambda_1^{[k_1]}, \lambda_2^{[k_2]}, \ldots, \lambda_s^{[k_s]}\}$, где λ_i – корень многочлена над полем C, а k_i – его кратность.

Многочлен p(x) однозначно определяется по своему спектру с точностью до константы a_n- старшего коэффициента. Это следует из канонического разложения многочлена на неприводимые множители.

Примеры.

1. $p(x) = x^2 + 1,\ Spec(p) = \{i^{[1]}, -i^{[1]}\}$

2. $p(x) = (x^4 - 1),\ Spec(p) = \{\ 1^{[1]}, -1^{[1]}, i^{[1]}, -i^{[1]}\}$

3. Написать многочлен наименьшей степени над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$,

спектр которого содержит $(-1+i)^{[1]}$ и $i^{[3]}$.

Для нахождения требуемого многочлена над полем $\mathbb{C}$ достаточно воспользоваться каноническим разложением с учетом данных корней и их кратностей :
$(x+1-i)(x-i)^3 = (x+1-i)(x^3-3x^2i-3x-i) = x^4+x^3-6x^2-3x-1+(-4x^3-3x^2+2x-1)i = x^4+(1-4i)x^3+(-6-3i)x^2+(-3+2i)x+(-1-i)$.

Над полем $\mathbb{R}$ комплексные корни вещественного многочлена встречаются парами:α и $\bar{\alpha}$, поэтому приходится добавлять соответствующие множители с той же кратностью.
$(x+1-i)(x+1+i)(x-i)^3(x+i)^3 = (x^2+2x+2)(x^2+1)^3$

§7. Упражнения.

1. Доказать неравенства:

a) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

b) Если $|z|<1$, то $|z^2-z+i|<3$.

2. Доказать, что если $z+z^{-1} = 2\cos\varphi$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$

3. Совпадают ли множества ?

a) $\sqrt{z_1 z_2}$ и $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$

b) $\sqrt[3]{z_1 z_2}$ и $\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2}$

4. Как расположены точки z_1, z_2, z_3 на комплексной плоскости, если $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, а $z_1+z_2+z_3 = 0$.

5.Изобразить кривую на комплексной плоскости $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, $t\in R$.

6. Найти произведение всех корней степени n из 1.
7.Доказать тождество $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$ и указать его геометрический смысл.

8. При каких a и b многочлен $p(x) = a x^{n+1}+b x^n+1$ делится на $(x-1)^2$.

9.Доказать, что многочлен $p(x) = x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2+x+1.

10.Какой многочлен делится на свою производную?

11.Найти кратность корня $x=1$ многочлена $x^{2n}-n x^{n+1}+n x^{n-1}-1$.

12.Решить уравнение $8x^3-12x^2-2x+3=0$, зная, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

13.Определить соотношения между коэффициентами уравнения $x^3+px+q=0$, если его корни связаны соотношением $x_1=\frac{1}{x2}+\frac{1}{x3}$.

14.Показать,что многочлен x^5+ax^3+b не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности.

15. При каком условии многочлен x^5+ax^3+b имеет корень кратности два, отличный от нуля.

16. При каком а многочлен $x^5- ax^2-ax+1$ имеет -1 корнем кратности не ниже второй.

17.Решить уравнение $36x^3-12x^2-5x+1=0$,если известно, что один из корней равен сумме двух других.

18. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^5+10x^4+25x^3-10x^2-5x+7=0$.

19.Пусть $x_1,x_{2,\ldots\ldots,}\ x_n$ - корни многочлена $p(x)=a_nx^n+\ldots\ldots+a_1x+a_0$.

a. Найти корни многочлена $a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+(-1)^na_0$.

b. Найти корни многочлена $a_0x^n+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$.

20.Число называется алгебраическим, если оно - корень многочлена с целыми коэффициентами. Будет ли число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ алгебраическим?

21. Доказать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ a,b∈ R операциями сложения и умножения матриц образуют поле и найти в нем матрицу J такую, что $J^2=-E$.

Глава 5 . Евклидовы пространства.

§ 1. Линейные пространства над полем P.

Определение 1**.** Пусть V – произвольное множество, элементы которого **v** мы будем называть векторами. На множестве V определены две операциями: сложение векторов и умножение вектора на число из поля P (P = **R** или P = **C**). Если эти операции обладают следующими свойствами:

1.$\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}=\mathbf{v_2}+\mathbf{v_1}$- коммутативность сложения

2. $(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2})+\mathbf{v_3}=\mathbf{v_1}+(\mathbf{v_2}+\mathbf{v_3})$-ассоциативность сложения

3. Существует нейтральный элемент **o** для операции сложения. То есть такой, что **o** +**v**=**v** для любого вектора **v.**

4.У каждого вектора **v** существует противоположный вектор –**v**, при сложении с которым в результате получается нейтральный элемент:

v + (-**v**)=**o**

5.1**v**=**v** для любого вектора **v** .

6.(λμ)**v**=λ(μ**v**), для любых λ,μ из поля P.

7.(λ+μ)**v**= λ**v** +μ**v**

8.λ(**v**$_1$+ **v**$_2$) =λ**v**$_1$ + λ**v**$_2$- дистрибутивность умножения по отношению к сложению,

то множество V называется линейным пространством над полем P.

Примеры.

1. $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_i \in R \right\}$ –n-мерное линейное координатное пространство является линейным пространством над полем R.

2. $C^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, z_i \in C \right\}$ множество n-мерных векторов с комплексными координатами и операциями сложения векторов и умножения на комплексные числа является линейным пространством над полем C.

3.M $_m^n$(R)- множество матриц данного порядка с вещественными элементами и операциями сложения матриц и умножения матрицы на вещественное число является линейным пространством над полем R.

4. M $_m^n$(C)- множество матриц данного порядка с комплексными элементами и операциями сложения матриц и умножения матрицы на комплексное число является линейным пространством над полем C.

5. C[0,1]- множество непрерывных функций на отрезке [0,1], принимающих вещественные значения с операциями сложения функций и умножения на вещественное число образуют линейное пространство над полем R.

6. P[x]- множество многочленов с коэффициентами из поля P и операциями сложения многочленов и умножения на число из поля P образуют линейное пространство над полем P (R,C).

7.P_n [x]- множество многочленов степени не выше n с коэффициентами из поля P и операциями сложения многочленов и умножения на элементы поля P образуют линейное пространство над полем P.

Из векторов $\mathbf{v_1,v_2\ldots,v_k}$ линейного пространства V можно образовывать различные линейные комбинации и получать новые векторы в этом пространстве . Все основные понятия введенные при изучении пространства R^n переносятся на произвольное линейное пространство V. Так векторы называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нейтральному элементу и линейно независимыми - в противном случае.

Примеры.

1. В пространстве R^n векторы $\mathbf{v_1,v_2\ldots,v_k}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из этих вектор- столбцов, равен к.
2. Рассмотрим $M_2(C)$- множество квадратных матриц второго порядка с комплексными элементами и базисные матрицы E_1^1, E_1^2,E_2^1 и E_2^2. Докажем, что базисные матрицы линейно независимы. Составим линейную комбинацию этих матриц с комплексными коэффициентами $z_1 E_1^1+z_2 E_1^2+z_3 E_2^1 +z_4 E_2^2=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$. Матрица будет нулевой (нейтральный элемент в линейном пространстве матриц) тогда и только тогда, когда все коэффициенты z_i =0.
3. В линейном пространстве C[0,1] рассмотрим три вектора (три функции) $\mathbf{f_1}=\sin^2(x)$, $\mathbf{f_2}=\cos^2(x)$ и $\mathbf{f_3}=1$. Так как $\sin^2(x)+\cos^2(x)-1=0$ (нейтральный элемент в линейном пространстве функций), то $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$,$\mathbf{f_3}$ – линейно зависимые векторы в пространстве функций.
4. Рассмотрим P_2 [x]- множество многочленов степени не выше 2 с коэффициентами из поля R. P_2 [x]= $\{p(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R\}$. Проверим, что многочлены $\mathbf{p_0}=1$, $\mathbf{p_1}=x$ и $\mathbf{p_2}=x^2$ - линейно независимы в линейном пространстве P_2 [x]. Приравняем к 0 (нейтральный элемент) их линейную комбинацию $ax^2 + bx + c * 1=0= 0x^2 + 0x + 0 * 1$.Такое равенство возможно только, если a=b=c=0.

Этот пример показывает, что в пространстве P[x] можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов. То же самое справедливо для пространства функций C[0,1]. Функции $\mathbf{f_0}=1$, $\mathbf{f_1}=x$, …,$\mathbf{f_n}=x^n$…будут линейно независимыми, так как линейная комбинация конечного числа таких функций а $\mathbf{f_0}+ a_1 \mathbf{f_1}+\ldots a_n \mathbf{f_n}= a_0*1+a_1x+ +a_nx^n$ равна нейтральному элемент у в пространстве функций, то есть тождественно равной нулю функции только,

если все коэффициенты равны нулю. В противном случае получим , что многочлен степени n имеет более, чем n вещественных корней.

Линейные пространства, в которых существуют линейно независимые системы, состоящие из сколь угодно большого числа векторов называются бесконечномерными. (В нашем курсе мы их рассматривать не будем). В противном случае пространства называются конечномерными, причем линейная размерность множества определяется так же, как и в пространстве R^n.

Векторы $\mathbf{v_1,v_2\ldots,v_k}$ называются базисом множества $M\subset V$,если $\mathbf{v_1,v_2\ldots,v_k}$ - максимальная линейно независимая система векторов этого множества (добавление любого вектора из M к этой системе делает ее линейно зависимой). Теоремы 4-7 из §3 главы 2 дословно переносятся на произвольное конечномерное линейное пространство. Любые два базиса содержат одинаковое число векторов (теорема 5) и это позволяет ввести понятие размерности множества. dimM- число векторов в базисе этого множества. Каждый вектор **v** из множества M можно однозначно записать, как линейную комбинацию базисных векторов (теорема 4). Однозначно определенные (теорема 6) коэффициенты в этой линейной комбинации называются координатами вектора в данном базисе.

Примеры.

1.В пространстве C^n в качестве базиса можно взять стандартный базис $\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{e_n}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$, а вектор $\mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$ разложить по этому базису $\mathbf{z}=z_1\mathbf{e_1}+\ldots+z_n\mathbf{e_n}$, следовательно dim C^n=n.

2.Рассмотрим V- множество n- мерных комплексных векторов $\mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$,где $z_i\in C$ с обычной операцией сложения векторов, а умножение будем разрешать только на вещественные числа. Мы получим линейное пространство над полем R. Векторы $\mathbf{e_1, \ldots, e_n}$, будут по-прежнему линейно независимыми ,но линейно выразить через них произвольный вектор **z** не удастся, так как коэффициенты могут быть только вещественными. Следовательно, система $\mathbf{e_1, \ldots, e_n}$ не максимальна и ее можно дополнить до базиса. В частности базисом пространства V будет набор векторов $\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{e_n}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$, i$\boldsymbol{e_1}=$

$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, i\boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$. Действительно, эти векторы линейно независимы, так как их линейная комбинация $a_1\boldsymbol{e_1}+\dots+ a_n\boldsymbol{e_n}+b_1(i\boldsymbol{e_1})+\dots+ b_n(i\boldsymbol{e_n})=(a_1+ib_1)\mathbf{e_1}+\dots+ (a_n+ib_n)\mathbf{e_n}$ с вещественными коэффициентами равна нулевому вектору только, если все коэффициенты равны нулю. Любой вектор $\mathbf{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}$ можно линейно выразить через рассматриваемые векторы . $\mathbf{z}=a_1\boldsymbol{e_1}+\dots+ a_n\boldsymbol{e_n}+b_1(i\boldsymbol{e_1})+\dots+ b_n(i\boldsymbol{e_n})$.Таким образом dim V=2n.

3.В пространстве $M_m^n(R)$ базисные матрицы E_i^j образуют естественный базис линейного пространства и , следовательно dim $M_m^n(R)= nm$.

4.В пространстве многочленов P_n [x] естественным базисом будет набор многочленов $\mathbf{p_0}=1$, $\mathbf{p_1}=x,\dots,\mathbf{p_n}=x^n$. Коэффициенты многочлена- это его координаты в данном базисе: $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. Таким образом

dim P_n [x]= n+1.

Особую роль в линейных пространствах играют подмножества, которые сами являются линейными пространствами относительно заданных операций. Это- линейные подпространства. Линейная оболочка векторов $L(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\dots,\mathbf{v_k})$ в общем случае также, как и в случае пространства R^n будет линейным подпространством в V(см. теорема 1,§4 глава 2)

Примеры.

1. В пространстве многочленов P_n [x] рассмотрим многочлены $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ такие, что p(0)=0. Это многочлены, у которых $a_0=0$.Такие многочлены образуют линейное подпространство размерности n.

2. В линейном пространстве M_n (R) квадратных матриц порядка n с вещественными элементами рассмотрим два множества: $L_1=\{A; A = A^T\}$-множество симметрических матриц и $L_2= \{A; A = -A^T\}$ –множество кососимметрических матриц. L_1 и L_2 – линейные подпространства в пространстве M_n (Проверьте!) Найдем размерности этих подпространств Элементы симметрической матрицы связаны соотношением $a_i^j=a_j^i$, если $i\neq j$, диагональные элементы a_i^i могут быть любыми. Для кососимметрической матрицы справедливы соотношения $a_i^j= -a_j^i$, если $i\neq j$, диагональные элементы $a_i^i =0$.Для нахождения размерности линейного подпространства необходимо найти в нем базис и определить число векторов в базисе. В пространстве L_1 в качестве базиса можно взять следующий набор матриц:

для всех i (1,..n) возьмем базисную матрицу E_i^i, для любой пары $i< j$ рассмотрим матрицу $E_i^j+ E_j^i$. Эти матрицы линейно независимы, любая симметрическая матрица линейно выражается через них. Следовательно, они образуют базис. Число векторов в этом базис - dim $L_1=\frac{n(n+1)}{2}$. Аналогичным образом построим базис в подпространстве L_2. Так как на диагонали кососимметрической матрицы стоят нули, то в качестве базиса можно взять набор матриц $E_i^j- E_j^i$ для всех пар i, j таких, что $i< j$.Таким образом dim $L_2=\frac{n(n-1)}{2}$.

Многие линейные пространства " похожи" друг на друга. Точный смысл этого утверждения содержится в следующем определении.

Определение 2. Два линейных пространства V и W над одним и тем же полем P называются изоморфными, если существует биективное (взаимно однозначное) линейное отображение φ пространства V в W то есть такое, что $\varphi(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2})= \varphi(\mathbf{v_1})+ \varphi(\mathbf{v_2})$ и $\varphi(\alpha\mathbf{v})=\alpha\, \varphi(\mathbf{v})$ для любого элемента α поля P.

Пример. Пусть $V=M_2=\left\{\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a,b,c,d \in R\right\}$, а

$W= R^4=\left\{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix};\ x_i \in R\right\}$. Определим отображение φ следующим образом: $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4$.Отображение φ -биективно. Проверим его линейность. $\varphi(\mathbf{A_1}+\mathbf{A_2})= \varphi(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})=$

$\varphi(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix})= \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \\ d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}=\varphi(\mathbf{A_1})+\varphi(\mathbf{A_2}),$

$\varphi(\alpha\mathbf{A})=\varphi(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix})= \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \\ \alpha d \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\alpha\varphi(\mathbf{A}).$

Теорема 1. Линейные пространства над полем P одинаковой размерности изоморфны.

Доказательство. Рассмотрим линейное пространство V над полем R размерности n. Это означает, что в пространстве V базис состоит из n векторов $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\ldots,\mathbf{v_n}$, а любой вектор **v** разлагается в линейную комбинацию

базисных векторов с вещественными коэффициентами $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v_n}$ Построим отображение φ пространства V в n-мерное линейное координатное пространство R^n следующим образом : $\varphi(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. Отображение φ – взаимно однозначно, так как координаты вектора в данном базисе определены однозначно (теорема 6 ,§3, глава 2) и по любому набору из n вещественных чисел можно построить вектор с заданными координатами. Линейность отображения φ вытекает из того, что при сложении векторов линейного пространства их координаты в рассматриваемом базисе складываются, а при умножении на число- умножаются на это число (теорема 7 ,§3, глава 2). Если линейное пространство V задано над полем C, то аналогичным образом строится изоморфизм в пространство $C^n=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}, z_i \in C\right\}$.

§ 2. Евклидово пространство над полем R.

Пусть V – произвольное линейное пространство над полем **R**.

Определение 3. Скалярным произведением в пространстве V называется отображение, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре векторов ***a,*** **b** из V некоторое действительное число, обозначаемое (***a,*** **b**), причём так, что выполняются следующие условия.

1. (***a*** **+ b, c**) = (***a, c***) + (***b, c***) для любых ***a, b, c*** $\in V$.

2. (λ***a, b***) = λ(***a, b***) для любых ***a, b*** $\in V$ и любого λ $\in$ **R**.

3. (***a, b***) = (***b, a***) для любых ***a, b*** $\in V$.

4. (***a, a***) > 0 для любого ненулевого вектора ***a*** $\in V$.

Первые два свойства в совокупности называются линейностью по первому переменному, третье – симметричностью, последнее – положительной определённостью скалярного произведения.

Из симметричности скалярного произведения вытекает его линейность и по второму переменному:

(***a, b + c***) = (***b + c, a***) = (***b, a***) + (***c, a***) = (***a, b***) + (***a, c***);

(***a***, λ***b***) = (λ***b***, ***a***) = λ(***b, a***) = λ(***a, b***).

Таким образом, скалярное произведение − билинейная, симметрическая и положительно определённая функция двух векторных переменных, заданная в линейном пространстве V.

Определение 4. Линейное пространство вместе с заданным в нём скалярным произведением называется евклидовым пространством и обозначается через *E*.

Заметим, что в одном и том же линейном пространстве V можно задавать различные скалярные произведения, тем самым превращая его в различные евклидовы пространства *E*. Размерностью евклидова пространства E называется размерность линейного пространства V, из которого оно получено.

Примеры.

1. Рассмотрим геометрическое пространство векторов V^2 или V^3 и привычное нам скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \qquad (1)$$

В курсе аналитической геометрии было доказано, что так определённое скалярное произведение удовлетворяет вышеприведённым условиям 1 – 4, причём если $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ – разложение векторов по ортонормированному базису, то скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad (2)$$

2. Возьмём в качестве V n-мерное линейное координатное пространство $\mathbf{R}^n$ и определим скалярное произведение по следующей формуле: если $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, то положим $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$ (3)

Несложно проверить выполнение условий 1 – 4 (проверьте!). Такое скалярное произведение называется стандартным скалярным произведением в координатном пространстве R^n, а соответствующее евклидово пространство − стандартным евклидовым пространством, которое обозначается E^n.

Заметим, что формула (2) является частным случаем (n = 3) формулы (3). Однако существенное отличие состоит в том, что в примере 1 она выводилась из определения скалярного произведения, в котором использовались геометрические характеристики − длины и углы между векторами, в то время

как в примере 2 формула (3) сама является определением скалярного произведения.

Пусть E − произвольное евклидово пространство, то есть линейное пространство со скалярным произведением.

Определение 5. Длиной вектора $\boldsymbol{a}$ называется число $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$.

Из условия 4 определения 1 следует, что любой ненулевой вектор имеет положительную длину.

Рассмотрим нулевой вектор и проверим, что $(\mathbf{0}, \boldsymbol{b}) = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{b}$. Действительно: $(\mathbf{0}, \boldsymbol{b}) = (0 \cdot \mathbf{0}, \boldsymbol{b}) = 0 \cdot (\mathbf{0}, \boldsymbol{b}) = 0$. Следовательно, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ и нулевой вектор имеет нулевую длину.

Определение 6. Углом между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется угол φ такой, что $0 \le \varphi \le \pi$, $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

Однако, прежде чем пользоваться этим определением, необходимо проверить, что для любых двух ненулевых векторов угол между ними корректно определён, т. е. что $\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \le 1$. Заметим, что если хотя бы один из векторов равен $\mathbf{0}$, то угол между ними не определён (можно считать любое число значением этого угла).

Теорема 2 .(Неравенство Коши − Буняковского**).** Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ произвольного евклидова пространства E выполняется неравенство $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \le |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$,причём равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы коллинеарны, то есть один из векторов получается из другого умножением на число.

Доказательство. При $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ оба утверждения теоремы очевидны (имеет место равенство). Поэтому в дальнейшем можно считать, что $\boldsymbol{a} \ne \mathbf{0}$. Возьмём и зафиксируем два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$, $\boldsymbol{a} \ne \mathbf{0}$. Рассмотрим функцию действительного переменного t:

$f(t) = (t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})t^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})t + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$.

Как видно, функция представляет собою квадратный трёхчлен со старшим ненулевым коэффициентом, значения которого неотрицательны при любом t (т. к. это скалярный квадрат!). Следовательно, дискриминант квадратного трёхчлена не может быть положительным. Вычисляем четверть дискриминанта:

$\frac{D}{4} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \le 0$.

Отсюда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \le (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$, а $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \le \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}$

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$; тогда $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ для подходящего действительного коэффициента λ. Имеем:

$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| = |(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{a})| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$.

Обратно, пусть имеет место равенство $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$ и $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда рассмотренный выше квадратный трёхчлен имеет нулевой дискриминант и, следовательно, обладает корнем, скажем, t_0. Имеем: $(t_0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, t_0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 0$,следовательно вектор $t_0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, откуда $\boldsymbol{b} = -t_0\boldsymbol{a}$, что и означает коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Следствие .(Неравенство треугольника). Для любых двух векторов a, b произвольного евклидова пространства E выполняется неравенство

$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Доказательство. В самом деле,

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \le (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \le$$

$$\le |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)^2.$$

Пример. Рассмотрим теперь евклидово пространство совершенно иного рода. А именно, в качестве линейного пространства V возьмём множество всех функций, определённых и непрерывных на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ (это пространство обозначается $C[a,b]$ и не является конечномерным). Определим в нём скалярное произведение по следующей формуле: если

$\mathbf{f} = f(t)$, $\mathbf{g} = g(t) \in$ V , то $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \int_a^b f(t)\, g(t) dt$.

Произведение двух непрерывных функций непрерывно, а любая непрерывная функция интегрируема, так что в правой части всегда получится определённое действительное число. Используя свойства определённого интеграла, несложно проверить (проверьте!) выполнение условий 1 – 3 определения 1. Выполнение условия 4 вытекает из теоремы математического анализа, утверждающей, что если значение определённого интеграла от непрерывной неотрицательной на отрезке функции равно нулю, то и сама функция тождественно равна нулю (и, конечно, из того, что значение определённого интеграла от неотрицательной функции неотрицательно). Полученное евклидово пространство обозначим $C_2[a, b]$.

Рассмотрим в пространстве $C_2[a, b]$ подмножество $\mathrm{P_n}[x]$ многочленов степени не выше n; это подмножество является линейным подпространством, причём конечномерным, так как в качестве базиса этого подпространства можно взять, например, функции $1, x, \ldots, x^n$. Таким образом, $P_n[x]$ − пример

ещё одного конечномерного евклидова пространства (скалярное произведение в P_n [x] определяется так же, как и во всём пространстве C_2 [a, b]).

Отметим, что неравенство Коши − Буняковского, доказанное выше для произвольного евклидова пространства, принимает конкретный вид в различных евклидовых пространствах. Так, в пространстве E^n оно равносильно утверждению: для любых двух наборов действительных чисел a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n справедливо неравенство

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \le \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2$$

В пространстве C_2 [a, b] получаем утверждение: для любых двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке [a, b] справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}\ \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}$$

В дальнейшем мы будем изучать только конечномерные евклидовы пространства.

Определение **7.** Пусть $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, …, $\mathbf{a_n}$ − конечный набор векторов евклидова пространства E. Вычислим попарные скалярные произведения этих векторов ($\mathbf{a_i}$, $\mathbf{a_j}$) = g_i^j. Матрицей Грама системы векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, …, $\mathbf{a_n}$ называется матрица $G(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) = (g_i^j)$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$ − базис евклидова пространства E, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\,\boldsymbol{e_i}$ $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j\,\boldsymbol{e_j}$ - разложение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по базису, $G = G(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n})$- матрица Грама, тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)\ G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Доказательство. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\,\boldsymbol{e_i}, \sum_{j=1}^n y_j\,\boldsymbol{e_j}\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\left(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,g_i^j$ Последняя сумма – произведение матриц, стоящих в правой части формулы (4). (Проверьте!)

Эта теорема показывает, что, зная матрицу $G(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n})$ − матрицу попарных скалярных произведений базисных векторов можно вычислить скалярное произведение любой пары векторов евклидова пространства.

Заметим, однако, что матрица G не может быть произвольной. Условия 1 − 4 определения скалярного произведения накладывают на неё ряд ограничений. Так, свойство симметрии скалярного произведения требует, чтобы $G^T = G$, а условие положительной определённости скалярного

произведения равносильно положительности всех главных (угловых) миноров матрицы $g_1^1 > 0$, $\begin{vmatrix} g_1^1 & g_1^2 \\ g_2^1 & g_2^2 \end{vmatrix} > 0$, …, $|G| > 0$.

Это утверждение будет доказано в главе 9, посвященной теории билинейных и квадратичных форм.

Таким образом, зафиксировав базис линейного пространства и взяв матрицу G, удовлетворяющую вышеприведённым условиям, можно задать скалярное произведение по формуле $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y}$ и тем самым превратить линейное пространство в евклидово. Следовательно, на базе одного линейного пространства можно построить бесконечно много различных евклидовых пространств.

Пример.

Рассмотрим двумерное линейное координатное пространство R^2. В нем есть стандартный базис $\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Пусть $G(\mathbf{i},\mathbf{j})$=E- единичная матрица. Она удовлетворяет всем требуемым условиям и является матрицей Грама. Скалярное произведение, вычисленное по формуле (4), совпадает со стандартным скалярным произведением. Если в качестве матрицы Грама взять $G(\mathbf{i},\mathbf{j})=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ (что тоже допустимо), то мы получим на плоскости другую геометрию. Так длина вектора **i** будет $|\mathbf{i}|=\sqrt{2}$, длина вектора **j** будет $|\boldsymbol{j}|=1$, а угол между векторами **i** и **j** , вычисленный по формуле $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{i},\mathbf{j})}{|\mathbf{i}||\mathbf{j}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, оказывается равным $\frac{\pi}{4}$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ и $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ будет вычисляться по формуле $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$.

§3. Ортогональные системы векторов.

Определение 8**.** Векторы **a** и **b** в евклидовом пространстве E называются ортогональными (обозначение: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$), если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Очевидно, что нулевой вектор **0** ортогонален любому вектору евклидова пространства, а вектор, ортогональный любому вектору евклидова пространства (в том числе и самому себе), может быть только нулевым. Для ненулевых ортогональных векторов $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = 0$, а угол между векторами $\varphi = \frac{\pi}{2}$.Заметим, что в евклидовых пространствах над другими полями (например, над полем **C**) понятие угла между векторами не вводится, однако понятие ортогональности ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$) сохраняется.

Определение 9**.** Система векторов $\boldsymbol{a_1}$**,** $\boldsymbol{a_2}$**, …,** $\boldsymbol{a_n}$ в евклидовом пространстве E называется ортогональной, если каждый её вектор ортогонален любому другому вектору этой системы. Ортогональная система векторов называется ортонормальной (или ортонормированной), если вдобавок длины всех векторов этой системы равны единице. Если ортогональная или ортонормальная система векторов $\boldsymbol{a_1}$**,** $\boldsymbol{a_2}$**, …,** $\boldsymbol{a_n}$ является базисом евклидова пространства, то этот базис называется соответственно ортогональным или ортонормальным.

В пространстве V^3 (пример 1 § 2) векторы **i, j, k** образуют ортонормальный базис. В стандартном евклидовом пространстве E^n ортонормальный базис образуют векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$ (проверьте !)

Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ называется стандартным базисом в E^n.

Следующие две теоремы описывают важные свойства ортогональных систем.

Теорема 4. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство**.** Пусть данная система векторов $\boldsymbol{a_1}$**,** $\boldsymbol{a_2}$**, …,** $\boldsymbol{a_n}$ ортогональна и состоит из ненулевых векторов. Предположим, что некоторая их линейная комбинация равна нулю: $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \dots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$**.** Умножим скалярно обе части этого равенства на какой-нибудь вектор $\boldsymbol{a_i}$ данной системы:

$\lambda_1(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_i}) + \lambda_2(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_i}) + \dots + \lambda_n(\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a_i}) = 0.$

В левой части этого равенства все скалярные произведения $(\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{a_i})$, кроме $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_i})$, равны нулю . Следовательно, $\lambda_i(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_i}) = 0$,откуда $\lambda_i = 0$, т. к. $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_i}) \neq 0$ (иначе было бы $\boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{0}$**)**. Таким образом, все коэффициенты λ_i равны нулю, что и означает линейную независимость системы,

Теорема 5 (Пифагора). Для любой ортогональной системы векторов квадрат длины суммы всех векторов системы равен сумме квадратов длин всех векторов этой системы.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a_1}$**,** $\boldsymbol{a_2}$**, …,** $\boldsymbol{a_n}$ − ортогональная система векторов. Тогда

$$|\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \dots + \boldsymbol{a_n}|^2 = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \dots + \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \dots + \boldsymbol{a_n}) = \sum_1^n (\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_i}) + 2\sum_{i,j=1}^n (\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j})$$

Так как все слагаемые последней суммы равны нулю (векторы ортогональны), то получаем:

$$|\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \dots + \boldsymbol{a_n}|^2 = |\boldsymbol{a_1}|^2 + |\boldsymbol{a_2}|^2 + \dots + |\boldsymbol{a_n}|^2.$$

Если в евклидовом пространстве E имеется ортонормальный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$, то матрица Грама $G(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ будет единичной, т. к. $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ ($i \neq j$) и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1$, и формула для вычисления скалярного произведения принимает вид: если $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i}$, а $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e_j}$ то $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} E \boldsymbol{y} = \sum_{1}^{n} x_i y_i$ Таким образом, при наличии ортонормального базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ в евклидовом пространстве E его можно «отождествить» со стандартным евклидовым пространством E^n. Действительно, определим отображение φ: $E \to E^n$ по следующей формуле: если $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i} \in E$, то $\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in E^n$. Отображение φ является биективным и линейным (проверьте!) и, кроме того, сохраняет скалярное произведение: $(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Такие отображения называются изометрическими изоморфизмами евклидовых пространств.

Возникает естественный вопрос: в любом ли евклидовом пространстве существует ортонормальный базис? Заметим, что ортогональный базис легко превратить в ортонормальный, поделив все векторы базиса на их длины (длины отличны от нуля, так как базис не может содержать нулевой вектор).В доказательстве следующей теоремы будет описан алгоритм построения ортогонального базиса в любом линейном подпространстве.

Теорема 6. (Процесс ортогонализации Грама − Шмидта). Пусть L − линейное подпространство евклидова пространства E с базисом $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$. Тогда существует ортогональный базис $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ подпространства L, обладающий свойствами: $\langle \boldsymbol{u_1} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1} \rangle$, $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \rangle$, ... ,
$\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \rangle$.

Доказательство. Будем строить ортогональный базис в L следующим образом: пусть $\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{a_1}$, тогда условие $\langle \boldsymbol{u_1} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1} \rangle$ выполняется. В линейной оболочке

$\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \rangle$ ищем вектор $\boldsymbol{u_2}$ ортогональный вектору $\boldsymbol{u_1}$ в виде $\boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{a_2} + \alpha \boldsymbol{u_1}$. Условие ортогональности- это равенство нулю скалярного произведения $(\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_1})$=

$(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{u_1}) + \alpha (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_1}) = 0$. Вектор $\boldsymbol{u_1}$ отличен от нуля (он равен вектору из базиса), следовательно можно найти коэффициент α из уравнения. $\alpha = -\frac{(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{u_1})}{(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_1})}$. Вектор $\boldsymbol{u_2}$ не равен нулю, так как векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ линейно независимы, причем вектор $\boldsymbol{a_2}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$, следовательно , $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \rangle$. Третий вектор $\boldsymbol{u_3}$ ищем аналогичным образом: $\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{a_3} + \beta \boldsymbol{u_1} + \gamma \boldsymbol{u_2}$. Коэффициенты α и β находим из условий ортогональности вектора $\boldsymbol{u_3}$ векторам $\boldsymbol{u_1}$ и $\boldsymbol{u_2}$. $(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_1}) = (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{u_1}) + \beta (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_1}) = 0$ и $(\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_2}) = (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{u_2}) + \gamma (\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_2}) = 0$, так как $(\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_1}) = 0$. Из этих соотношений определяем γ и β: $\beta = -\frac{(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{u_1})}{(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_1})}$, $\gamma = -\frac{(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{u_2})}{(\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_2})}$.

Линейные оболочки векторов $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$ и векторов $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,$\boldsymbol{a_3}$ совпадают. Продолжаем эту процедуру аналогичным образом, то есть, если мы нашли к векторов $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_к}$ с помощью описанного алгоритма, то вектор $\boldsymbol{u_{к+1}}$ будем искать в виде $\boldsymbol{u_{к+1}} = \boldsymbol{a_{к+1}} + \alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{u_k}$,где $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_к}$ попарно ортогональны и $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_к} \rangle = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_к} \rangle$. Коэффициент α_i находим из уравнения . $(\boldsymbol{u_k}, \boldsymbol{u_i}) = (\boldsymbol{a_{k+1}}, \boldsymbol{u_i}) + \alpha_i (\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{u_i}) = 0$, i=1,2,..,k. Уравнение разрешимо, если $(\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{u_i}) \neq 0$.Это условие выполняется, так как $\boldsymbol{u_i}$- линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_i}$,причем комбинация нетривиальная, так как коэффициент при $\boldsymbol{a_i}$ равен единице. Через n шагов получим ортогональный базис в L.

Пример из домашней работы по евклидовым пространствам. Часть1. Даны три вектора:

$$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы рассматриваем стандартное евклидовое пространство $\mathbf{E}^5$ размерности 5.

Требуется найти ортонормальный базис линейной оболочки этих векторов $L = \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \rangle$, то есть. найти такую ортонормальную систему $\mathbf{l_1^0}, \mathbf{l_2^0}, \mathbf{l_3^0}$ такую, что $L = \langle \mathbf{l_1^0}, \mathbf{l_2^0}, \mathbf{l_3^0} \rangle$. Воспользуемся алгоритмом Грама – Шмидта. Сначала мы построим ортогональную систему $\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}, \mathbf{l_3}$,для которой выполняются условия $\langle \boldsymbol{l_1} \rangle = \langle \boldsymbol{f_1} \rangle$; $\langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \rangle = \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2} \rangle$; $\langle \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_3} \rangle = \langle \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \rangle$, а затем эту систему векторов нормируем, то есть каждый вектор поделим на его длину.

В качестве $\boldsymbol{l_1}$ возьмем вектор $\boldsymbol{f_1}$, вектор $\boldsymbol{l_2}$ ищем в виде $\boldsymbol{l_2} = \boldsymbol{f_2} + \lambda \boldsymbol{l_1}$.Из условия ортогональности векторов $\boldsymbol{l_1}$ **и** $\boldsymbol{l_2}$, учитывая, что $l_1 = \boldsymbol{f_1}$

получаем: $(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_1}) = -\lambda(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1})$.Так как в пространстве $\mathbf{E}^5$ скалярное произведение стандартное , то находим $(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_1}) = (-1)1+2(-1)+1(-3)+(-2)2 = -10$, а

$(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1}) = (-1)(-1)+2*2+1*1+(-2)(-2) = 10$ и, следовательно $\lambda = 1$. Таким образом,

$\boldsymbol{l_2} = \boldsymbol{f_2} + \boldsymbol{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, . Вектор $\boldsymbol{l_2}$ мы можем взять в качестве второго вектора искомой ортогональной системы. Найдем теперь вектор $\boldsymbol{l_3}$.

Ищем этот вектор в виде $\boldsymbol{l_3} = \boldsymbol{f_3} + \lambda_1 \boldsymbol{l_1} + \lambda_2 \boldsymbol{l_2}$, причем вектор $\boldsymbol{l_3}$ должен быть ортогонален векторам $\boldsymbol{l_1}$ и $\boldsymbol{l_2}$ что равносильно условиям $(\boldsymbol{l_3}, \boldsymbol{l_1}) = (\boldsymbol{l_3}, \boldsymbol{l_2}) = 0$.

Умножим обе части равенства $\boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{f}_3 + \lambda_1\boldsymbol{l}_1 + \lambda_2\boldsymbol{l}_2$ скалярно сначала на $\boldsymbol{l}_1$, а затем на $\boldsymbol{l}_2$. Мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных λ_1 и λ_2: $\begin{cases}(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_1}) + \lambda_1(\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_1}) = 0 \\ (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_2}) + \lambda_2(\boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_2}) = 0\end{cases}$

Вычисляем скалярные произведения $(\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_1})$= ($\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_1$)=10 (квадрат длины вектора $\boldsymbol{l_1}$) , $(\boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_2})$=14 (квадрат длины вектора $\boldsymbol{l_2}$), $(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{f_1})$=-5+(-2)+(-3)= -10, $(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_2})$=14.Система принимает вид $\begin{cases}-10 + 10\lambda_1 = 0 \\ 14 + 14\lambda_2 = 0\end{cases}$. Решая систему, получаем: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$$\boldsymbol{l_3} = \boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{l_1} - \boldsymbol{l_2} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\-2\end{pmatrix} .$$

Остаётся лишь найти длину вектора $\boldsymbol{l_3}$ и нормировать полученные три вектора $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$. $(\boldsymbol{l_3}, \boldsymbol{l_3})$ =4*4+(-2)*(-2)=20. Следовательно векторы

$$\boldsymbol{l}_1{}^0 = \frac{\mathbf{l_1}}{|\mathbf{l_1}|} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}}\\ \frac{2}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}}\\ 0\\ \frac{-2}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2{}^0 = \frac{\mathbf{l_2}}{|\mathbf{l_2}|} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{-2}{\sqrt{14}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}}\\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_3{}^0 = \frac{\mathbf{l_3}}{|\mathbf{l_3}|} = \begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{20}}\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{-2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}$$

образуют искомый ортонормированный базис линейной оболочки L.

Определение 10**.** Ортогональным дополнением к любому множеству векторов M в евклидовом пространстве E называется множество векторов вида

$M^{\perp} = \{\boldsymbol{b} \in E: \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in M\}$.

Теорема 7**.** Ортогональное дополнение к любому множеству M является линейным подпространством.

Доказательство. Для доказательства того, что $M^{\perp}$ - линейное подпространство нужно проверить выполнение трёх пунктов определения линейного подпространства.

1**.** $\mathbf{0} \in M^{\perp}$. В самом деле, $\mathbf{0} \perp \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in M$.

2. Если $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \in M^{\perp}$, то $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \in M^{\perp}$. Так как из того , что $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0$ $\forall \boldsymbol{a} \in M$ следует, что $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0 + 0 = 0$, $\forall \boldsymbol{a} \in M$.

3. Если $\boldsymbol{b} \in L$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, то $\lambda\boldsymbol{b} \in L$. В самом деле, по условию $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$, $\forall \boldsymbol{a} \in M$,но тогда и $(\lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \lambda \cdot 0 = 0$, $\forall \boldsymbol{a} \in M$.

Заметим, что $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = E$, так как все векторы евклидова пространства ортогональны нулевому вектору. Точно так же легко видеть, что $E^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. В самом деле, если вектор принадлежит $E^{\perp}$, то это означает, что он ортогонален каждому вектору из E; в частности, он ортогонален самому себе, откуда вытекает (свойство 4 скалярного произведения), что он нулевой.

Определение 11**.** Будем говорить, что вектор b ортогонален множеству M и обозначать это $\boldsymbol{b} \perp M$, если он ортогонален каждому вектору из этого множества.

Теорема 8. Вектор $\boldsymbol{b}$ тогда и только тогда ортогонален линейной оболочке системы векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, когда он ортогонален каждому вектору этой системы.

Доказательство. Если вектор $\boldsymbol{b}$ ортогонален каждому вектору системы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, то векторы этой системы принадлежат ортогональному дополнению к вектору $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a_i} \in \mathbf{b}^{\perp}$. Так как в силу теоремы 6 множество $\mathbf{b}^{\perp}$ является линейным подпространством , то $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_1\boldsymbol{a_2} + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} \in \mathbf{b}^{\perp}$. Это означает, что $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_1\boldsymbol{a_2} + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} \perp \boldsymbol{b}$ при любых значениях λ_i. Обратное очевидно.

Следствие**.** Вектор тогда и только тогда ортогонален подпространству, когда он ортогонален каждому вектору какого-нибудь базиса этого подпространства.

Примеры.

1. Рассмотрим пространство V^3 со скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Вектор $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ принадлежит ортогональному дополнению $\boldsymbol{a}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, что равносильно условию $x + 2y + 3z = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{a}^{\perp}$ − это множество всех векторов, компланарных плоскости $x + 2y + 3z = 0$.

2. Рассмотрим стандартное евклидово пространство E^4 и систему двух линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Множество всех решений этой системы M является линейным подпространством евклидова пространства E^4, причём $\dim M = 4 - \operatorname{rk} A$, где A – матрица

системы. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Приведём эту матрицу к главному ступенчатому виду: $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.Следовательно, rk A = 2, dim M = 2, а в качестве базиса подпространства M можно взять векторы фундаментальной системы решений системы главного ступенчатого вида $\begin{cases}x_1 + x_3 = 0\\ x_2 + x_4 = 0\end{cases}$. Решения этой системы имеют вид:

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} =\begin{pmatrix}-x_3\\ -x_4\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\alpha \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} +\beta \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. Векторы $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{a}_2 =\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений и , следовательно, $M = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$. Найдём ортогональное дополнение $M^{\perp}$. Согласно теореме 6, множество $M^{\perp}$ состоит из векторов $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$, для которых $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2) = 0$. Таким образом, с учетом вида стандартного скалярного произведения, получаем, что $M^{\perp}$ описывается следующей системой линейных уравнений: $\begin{cases}-x_1 + x_3 = 0\\ -x_2 + x_4 = 0\end{cases}$

Матрица этой системы $B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ имеет ранг, равный двум. Следовательно, dim $M^{\perp} = 2$. Векторы $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{b}_2 =\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ - фундаментальная система решений -образуют базис подпространства $M^{\perp}$.

Базисы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ являются ортогональными в подпространствах M и $M^{\perp}$ соответственно (в общем случае этого не будет). Чтобы получить в этих подпространствах ортонормальные базисы, нужно каждый из векторов поделить на его длину. Длины всех векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ равны $\sqrt{2}$.

Заметим, что набор векторов

$\mathbf{a_1^0} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2^0} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\mathbf{b_1^0} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b_2^0} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

является примером ортонормального базиса во всём пространстве E^4 (четыре попарно ортогональных вектора единичной длины), причём базиса, отличного от стандартного.

§ 4. Ортогональная проекция

Рассмотрим в линейном пространстве V два различных линейных подпространства L_1 и L_2. Их пересечение $L_1 \cap L_2$ также будет линейным подпространством (проверьте!).Однако их объединение $L_1 \cup L_2$ не будет линейным подпространством, за исключением случая, когда $L_1 \subset L_2$ или $L_1 = L_2$ (приведите соответствующие примеры). Рассмотрим множество

$L = \{\boldsymbol{x} \in V;\ \mathbf{x=y+z},$ где $\mathbf{y} \in L_1, \mathbf{z} \in L_2, \}$. Множество L назовем суммой подпространств L_1 и L_2 и обозначим $L=L_1+L_2$. Сумма линейных подпространств всегда является линейным подпространством (докажите это утверждение). Сумма подпространств называется прямой**,** если любой вектор $\boldsymbol{x} \in L$ может быть представлен единственным образом в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \mathbf{z}$, где $\boldsymbol{y} \in L_1$, а $\mathbf{z} \in L_2$ и обозначается $L = L_1 \oplus L_2$.

Теорема 9**.** Сумма подпространств $L=L_1+L_2$ является прямой тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.Предположим, что некоторый вектор $\mathbf{x=y_1+z_1= y_2+z_2}$ **,** где $\mathbf{y_1, y_2} \in L_1,$ а $\boldsymbol{z_1, z_2} \in L_2,$.В этом случае $\mathbf{y_1 - y_2= z_2 - z_1}$ **.** Левая часть этого равенства- вектор пространства $L_1,$ а правая- вектор пространства L_2, следовательно это- вектор из $L_1 \cap L_2$. Но пересечение содержит только нулевой вектор, поэтому $\mathbf{y_1- y_2= 0}$ **,** $\mathbf{z_2 -z_1 =0}$ и разложение в сумму $\mathbf{x=y+z}$ единственно. Пусть известно, что любой вектор $\boldsymbol{x} \in L_1+L_2$ однозначно представляется в виде $\mathbf{x=y+z,}$ где $\mathbf{y} \in L_1, \mathbf{z} \in L_2,$Рассмотрим $L_1 \cap L_2$ и предположим, что в пересечении кроме $\mathbf{0}$ есть еще вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$**.** В этом случае вектор $\mathbf{a} \in L_1$ и $\mathbf{a} \in L_2$ и может быть записан двумя способами: $\mathbf{a=a+0}$ и $\mathbf{a=0+a}$**.** В первой записи $\mathbf{0} \in L_2$ **,** а во второй - $\mathbf{0} \in L_1$.Таким образом наше предположение приводит к противоречию.

Рассмотрим евклидово пространство E и его линейное подпространство L. Его ортогональное дополнение $L^{\perp}$, согласно теореме 6, является линейным подпространством. Сумма $L+ L^{\perp}$ является прямой, так как пересечение $L \cap L^{\perp}$ состоит из векторов ортогональных самим себе, а такой вектор только один- $\mathbf{0}$**.**

Теорема 10. Пусть L линейное подпространства евклидова пространства E, тогда $E= L \oplus L^{\perp}$.

Доказательство. Рассмотрим линейное подпространство L и в нем ортонормированный базис $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2 ... e_к}$**.** Такой базис существует, так как можно

применить процесс ортогонализации к произвольному базису подпространства L, а затем нормировать полученный ортогональный базис.

(см. теорему 6). Dim L=k$< n$, следовательно система векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2 ... e_к}$ не является максимальной линейно независимой системой и может быть дополнена до базиса пространства E: $\mathbf{e_1, e_2 ... e_к\ f_{k+1},\ldots,f_n}$. Применим к этой системе векторов алгоритм Грама- Шмидта. Первые к векторов при этом не изменятся. В процессе ортогонализации получится ортогональная система векторов, линейная оболочка которой совпадает с пространством E. Нормируем векторы, длина которых не равна единице и получим ортонормированный базис $\mathbf{e_1, e_2, ..., e_к\ e_{k+1},\ldots,e_n}$ в пространстве E. Любой вектор **x** пространства E можно разложить по этому базису: $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\, \boldsymbol{e_i} = \sum_{i=1}^{k} x_i\, \boldsymbol{e_i} + \sum_{i=k+1}^{n} x_i\, \boldsymbol{e_i}$. Первая сумма- вектор из линейного подпространства L, а вторая принадлежит линейной оболочке векторов $L_1 = < \mathbf{e_{k+1},\ldots,e_n} >$, которая является линейным подпространством размерности n-k. Покажем, что это подпространство совпадает с $L^{\perp}$. Векторы $\mathbf{e_{k+1},\ldots,e_n}$ ортогональны всем векторам $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2 ... e_к}$, образующим базис подпространства L, следовательно по теореме 8 векторы $\mathbf{e_{k+1},\ldots,e_n}$ ортогональны подпространству L, то есть принадлежат $L^{\perp}$. По теореме 7 $L^{\perp}$ является линейным подпространством, то есть множеством замкнутым относительно операций сложения и умножения на число, поэтому все линейные комбинации векторов $\mathbf{e_{k+1},\ldots,e_n}$ принадлежат множеству $L^{\perp}$. Таким образом $L_1 \subset L^{\perp}$.Проверим обратное включение. Пусть вектор $\mathbf{y} \in L^{\perp}$, тогда он ортогонален подпространству L , что по теореме 8 равносильно ортогональности базису этого подпространства, то есть $(\mathbf{y,e_1})= 0$, $...,(\mathbf{y,e_к})=0$. Рассмотрим разложение вектора **y** по базису $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e_1}+\ldots+y_k\mathbf{e_k}+y_{k+1}\mathbf{e_{k+1}}+\ldots+y_n\,\mathbf{e_n}$. и вычислим скалярные произведения $(\mathbf{y,e_1})=(y_1\mathbf{e_1}+\ldots+y_k\mathbf{e_k}+y_{k+1}\mathbf{e_{k+1}}+\ldots+y_n\,\mathbf{e_n},\ \mathbf{e_1})=y_1=0,...,(\mathbf{y,e_к})=(y_1\mathbf{e_1}+\ldots+y_k\mathbf{e_k}+y_{k+1}\mathbf{e_{k+1}}+\ldots+y_n\,\mathbf{e_n},\ \mathbf{e_к})=y_к=0$. Следовательно $\mathbf{y}= y_{k+1}\mathbf{e_{k+1}}+\ldots+y_n\,\mathbf{e_n} \in L_1$. $L^{\perp} \subset L_1$ ..Из разложения $\mathbf{x}= \sum_{i=1}^{k} x_i\, \boldsymbol{e_i} + \sum_{i=k+1}^{n} x_i\, \boldsymbol{e_i}$ следует, что E является суммой подпространств L и $L^{\perp}$, но эта сумма всегда прямая.

Следствие**.** dim L + dim $L^{\perp}$ =n.

Определение 12. Ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на подпространство L называется вектор $\boldsymbol{b}$, принадлежащий этому подпространству (обозначается $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$) и такой, что $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \perp L$. Вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \in L^{\perp}$ называется ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{a}$ при проектировании на подпространство L, и обозначается $\mathrm{ort}_L\boldsymbol{a}$**.**

Теорема 11**.** Ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на подпространство L и его ортогональная составляющая всегда существуют и определяются единственным образом.

Доказательство**.** Из теоремы 10 следует, что если L − линейное подпространство евклидова пространства E, а $\boldsymbol{a}$ − произвольный вектор пространства E, то вектор $\boldsymbol{a}$ можно записать в виде $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{b} \in L$, а $\boldsymbol{c} \in L^{\perp}$. Вектор $\boldsymbol{b}$ будет ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на подпространство L , а вектор $\boldsymbol{c}$, ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{a}$ при проектировании на подпространство L. В силу того, что сумма L и $L^{\perp}$- прямая, $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{ort}_L\boldsymbol{a}$ определены однозначно.

Теорема 12. (О линейности проекции). $\mathrm{pr}_L(\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b}) = \alpha\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} + \beta\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}$**.**

Доказательство. В силу линейности подпространства L из того, что $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} \in L$ и $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} \in L$, следует, что $\alpha\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} + \beta\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} \in L$ при любых α и β. Таким образом, для доказательства равенства $\mathrm{pr}_L(\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b}) = \alpha\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} + \beta\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}$ достаточно проверить, что вектор $(\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b}) - (\alpha\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} + \beta\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}) \in L^{\perp}$.Но $(\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b}) - (\alpha\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} + \beta\,\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}) + \beta\,(\boldsymbol{b} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b})$, и в силу линейности подпространства $L^{\perp}$ наш вектор принадлежит этому подпространству.

Теорема 13. (О минимизирующем свойстве проекции). Пусть $\boldsymbol{a}$ − произвольный вектор евклидова пространства E, $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$ − его ортогональная проекция на линейное подпространство L; тогда для любого вектора $\boldsymbol{b} \in L$ выполняется неравенство $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}|$, причём равенство возможно только при $\boldsymbol{b} = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$**.**

Доказательство**.** Запишем вектор $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ в виде $(\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}) + (\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \mathrm{ort}_L\boldsymbol{a} + (\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$. Вектор $\mathrm{ort}_L\boldsymbol{a} \perp L$, а вектор $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in L$. Применим теорему Пифагора:

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |(\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\mathbf{a}) + (\mathrm{pr}_L\mathbf{a} - \boldsymbol{b})|^2 = |\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\mathbf{a}|^2 + |\mathrm{pr}_L\mathbf{a} - \boldsymbol{b}|^2 \geq |\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\mathbf{a}|^2.$$

Следовательно, $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\mathbf{a}|$, и равенство возможно только если $|\mathrm{pr}_L\mathbf{a} - -\boldsymbol{b}| = 0$, т. е. $\boldsymbol{b} = \mathrm{pr}_L\mathbf{a}$.

Заметим, что $\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\mathbf{a} = \mathrm{ort}_L\mathbf{a}$ − перпендикуляр к подпространству L, а вектор $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{b} \neq \mathrm{pr}_L\mathbf{a}$, естественно назвать наклонной к подпространству L. Таким образом, теорема утверждает, что в произвольном евклидовом пространстве перпендикуляр короче любой наклонной.

Определение 13**.** Пусть $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_k}$ − ортонормальная система векторов в евклидовом пространстве E, $\boldsymbol{a}$ − произвольный вектор этого пространства. Числа $(\boldsymbol{a, u_1})$, $(\boldsymbol{a, u_2})$, …, $(\boldsymbol{a, u_k})$ называются коэффициентами Фурье вектора $\boldsymbol{a}$ относительно системы $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_k}$.

Теорема 14**.** Пусть $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_k}$ ортонормированный базис линейного подпространства L, $\boldsymbol{a}$ − произвольный вектор пространства E, тогда координаты проекции $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$ в этом базисе являются коэффициентами Фурье вектора $\boldsymbol{a}$ относительно системы $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_k}$**.**

Доказательство. Если вектор $\boldsymbol{a} \in L$, то он сам является, очевидно, своей проекцией на L (ортогональная составляющая равна нулю).Разложим вектор $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_k}$, $\boldsymbol{a}=\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2\boldsymbol{u_2} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{u_k}$**.** Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор $\boldsymbol{u_i}$**.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u_i})=\alpha_i$ $(\boldsymbol{u_i, u_i})=\alpha_i$. Таким образом в этом случае

$$\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a, u_1})\boldsymbol{u_1} + (\boldsymbol{a, u_2})\boldsymbol{u_2} + \ldots + (\boldsymbol{a, u_k})\boldsymbol{u_k}. \qquad (5)$$

Если $\boldsymbol{a}$ не принадлежит L, то согласно теореме 9 вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, где $b \in L$, а

$\boldsymbol{c} \in L^{\perp}$. Из теоремы 11 получаем, что $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{c}$, но $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, следовательно $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}$. Но для вектора $\boldsymbol{b}$ справедлива формула (5). Но коэффициенты Фурье вектора $\boldsymbol{b}$ относительно системы $\boldsymbol{u_1, u_2, \ldots, u_k}$ совпадают с коэффициентами Фурье вектора $\boldsymbol{a}$**.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u_i})= (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u_i})=(\boldsymbol{b, u_i})$. Следовательно формула (5) справедлива для любого вектора $\boldsymbol{a}$**.**

Следствие**.** Координаты вектора в ортонормальном базисе евклидова пространства − это его коэффициенты Фурье относительно системы базисных векторов.

Пример. Рассмотрим евклидово пространство E^3 и векторы

$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Эти векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину. Следовательно, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ – новый ортонормированный базис в E^3 отличный от базиса **i,j,k.** Найдем координаты вектора $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в новом базисе. Воспользуемся предыдущим следствием и найдем коэффициенты Фурье вектора **a** относительно системы векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$. .

$(\mathbf{a}, \mathbf{a_1})=\frac{5}{3}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a_2})=\frac{1}{3}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a_3})=\frac{1}{3}$. $\quad \mathbf{a}=\frac{5}{3}\ \mathbf{a_1}\ +\frac{1}{3}\ \mathbf{a_2}\ +\frac{1}{3}\ \mathbf{a_3}$.

Методы нахождения проекции вектора **a** на подпространство.

Пусть линейное подпространство задано как линейная оболочка векторов: $L = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \rangle$ (эти векторы необязательно линейно независимы). Возможны два способа нахождения проекции вектора **a** на подпространство L. В первом случае заменяем данную систему векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ на линейно независимую подсистему $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$, линейная оболочка которой совпадает с L и находим ортонормальный базис $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_k}$ подпространства *L* используя алгоритм Грама − Шмидта . После этого остаётся лишь применить формулу (5), то есть записать проекцию, как линейную комбинацию базисных векторов $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_k}$ с коэффициентами Фурье. Мы нашли проекцию вектора на подпространство с помощью ортонормального базиса этого подпространства.

Второй способ нахождения проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на подпространство L не предполагает нахождения ортонормального базиса в пространстве L. Мы будем исходить из определения проекции. Пусть $\boldsymbol{a}$ − вектор евклидова пространства *E*, для которого мы ищем $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$, где $L = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \rangle$. Так как $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} \in L$, то $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + + \alpha_n\boldsymbol{a_n}$. Итак, требуется найти числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что вектор $\boldsymbol{a} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - (\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a_n})$ будет ортогонален подпространству *L*. Для этого, согласно теореме 8, необходимо и достаточно, чтобы этот вектор был ортогонален системе векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, порождающей подпространство *L*. Это условие равносильно системе:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a} - \alpha_1 \mathrm{a}_1 - \alpha_2 \mathrm{a}_2 - \ldots \alpha_n \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{a} - \alpha_1 \mathrm{a}_1 - \alpha_2 \mathrm{a}_2 - \ldots \alpha_n \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_2) = 0 \\ \ldots \\ (\boldsymbol{a} - \alpha_1 \mathrm{a}_1 - \alpha_2 \mathrm{a}_2 - \ldots \alpha_n \mathrm{a}_n, \mathrm{a}_n) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

которая после преобразования принимает вид:

$$\begin{cases}\alpha_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_1) + \alpha_2(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1) + \cdots + \alpha_n(\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_1) = (\mathrm{a}, \mathrm{a}_1) \\ \alpha_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) + \alpha_2(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_2) + \cdots + \alpha_n(\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_2) = (\mathrm{a}, \mathrm{a}_2) \\ \alpha_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_n) + \alpha_2(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_n) + \cdots + \alpha_n(\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_n) = (\mathrm{a}, \mathrm{a}_n) \end{cases} \quad (7)$$

Это неоднородная система линейных уравнений относительно неизвестных α_1, α_2, …, α_k, матрица которой есть матрица Грама $G(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ системы векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$. Из существования ортогональной проекции вектора на любое линейное подпространство следует, что система (7) совместна. Заметим, однако, что из единственности ортогональной проекции вектора на подпространство L не следует единственность решения системы (8). Каждое решение системы − это набор коэффициентов α_1, α_2, …, α_n, с помощью которых вектор $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{a}$ записывается как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, порождающих подпространство L. Такая запись будет единственной тогда и только тогда, когда система векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ линейно независима, т. е. является базисом линейной оболочки $L = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \rangle$. Мы нашли проекцию вектора на подпространство с помощью матрицы Грама системы векторов, порождающих это подпространство.

Пример из домашней работы по евклидовым пространствам. Часть2**.**

Даны три вектора: $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbf{E}^5$.

Требуется найти проекцию вектора $\boldsymbol{f}_3$ на линейную оболочку векторов $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle$ и его ортогональную составляющую. Выше были описаны два способа нахождения проекции вектора на линейное подпространство L. Продемонстрируем эти два способа на рассматриваемом примере. Первый способ использует ортонормальный базис в линейном подпространстве L.Но такой базис в линейной оболочке векторов $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle$ уже построен в первой части домашней работы: это векторы $\boldsymbol{l}_1{}^0$, $\boldsymbol{l}_2{}^0$.

$$\mathbf{l_1^0} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l_2^0} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (6) $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3 = (\boldsymbol{f}_3, \mathbf{l}_1^0)\,\mathbf{l}_1^0 + (\boldsymbol{f}_3, \mathbf{l}_2^0)\,\mathbf{l}_2^0$. Но скалярные произведения $(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_1})$ и $(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_2})$ вычислены в первой части домашней работы:

$(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_1})$=-10, а $(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{l_2})$ =14, поэтому $(\boldsymbol{f}_3, \mathbf{l}_1^0) = -\sqrt{10}$, $(\boldsymbol{f_3}, \mathbf{l}_2^0) = \sqrt{14}$ и

$$\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3 = (\boldsymbol{f}_3, \mathbf{l}_1^0)\,\mathbf{l}_1^0 + (\boldsymbol{f}_3, \mathbf{l}_2^0)\,\mathbf{l}_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдем $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3$ другим способом (с помощью матрицы Грама). В самом деле, мы знаем, что $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3 = \alpha \boldsymbol{f}_1 + \beta \boldsymbol{f}_2$. Найдем коэффициенты α и β из системы (8).

$$\begin{cases} \alpha(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1}) + \beta(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_1}) = (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{f_1}) \\ \alpha(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}) + \beta(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_2}) = (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{f_2}) \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} 10\alpha - 10\beta = -10 \\ -10\alpha + 24\beta = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ -5\alpha + 12\beta = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ -5\alpha + 12\beta = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Оба способа привели нас к одному результату, так как проекция вектора на подпространство определена однозначно. Для нахождения ортогональной составляющей воспользуемся формулой

$$\mathrm{ort}_L \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

§ 5. Метод наименьших квадратов.

Рассмотрим несовместную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n = b_m \end{cases} \qquad (9)$$

Матрица этой системы A=$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$, а столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$, причем из несовместности системы следует, что rk A ≠rk $\hat{A}$.

Запишем данную систему в векторном виде: $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$,

где векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_n$ − столбцы коэффициентов при соответствующих неизвестных, а $\boldsymbol{b}$ − столбец свободных членов. Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}$ принадлежат m-мерному координатному пространству $\mathbf{R}^m$. Несовместность системы (9) с геометрической точки зрения означает, что вектор $\boldsymbol{b}$ не лежит в линейном подпространстве $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ (линейной оболочке этих векторов). Однако на практике, например, при математической обработке результатов наблюдений, часто возникает задача нахождения хотя бы приближённого решения системы (9). Дело в том, что в этих случаях несовместность возникает из-за погрешности измерений.

Определение 14. Набор чисел x_1, x_2, …, x_n называется решением системы (9) по методу наименьших квадратов, если этот набор минимизирует выражение

$\sigma^2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2)^2 + \ldots +$

$+ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)^2$.

σ^2- сумма квадратов разностей между правыми и левыми частями уравнений системы. Такой подход, при котором в качестве наилучшего приближённого решения системы (9) берётся решение по методу наименьших квадратов, был предложен Гауссом и называется методом наименьших квадратов. Число σ называется среднеквадратичной погрешностью «решения».

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ стандартное скалярное произведение. Погрешность σ имеет простой геометрический смысл − это длина вектора $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}$, т. е. $\sigma^2 = |x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}|^2$.

Заметим, что при любом наборе чисел x_1, x_2, …, x_n вектор $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \quad + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n \in L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$. Из теоремы 12 о минимизирующем свойстве

проекции следует, что $\min_{a \in L} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = |\mathrm{pr}_L \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}|$. Таким образом, решение системы (9) по методу наименьших квадратов − это набор чисел, для которых $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n$ является проекцией вектора $\boldsymbol{b}$ на линейное подпространство L, а σ^2 − квадрат длины ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{b}$. Следовательно, решение системы (9) по методу наименьших квадратов всегда существует. Отметим, что, несмотря на то, что проекция вектора на подпространство определена однозначно, решение системы по методу наименьших квадратов не обязано быть единственным. Единственность будет в том и только в том случае, когда вектор-столбцы коэффициентов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, порождающие линейное подпространство L, линейно независимы. Если же векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы, то решений будет бесконечно много, однако погрешность σ всех таких решений будет одна и та же, и в этом смысле все решения равноправны.

С геометрической точки зрения нахождение решения системы $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ по методу наименьших квадратов сводится к нахождению обычного решения системы $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ − ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на подпространство $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

Воспользуемся вторым способом нахождения проекции вектора **b** на подпространство L с помощью системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} \alpha_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_1) + \alpha_2(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1) + \cdots + \alpha_n(\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_1) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1) \\ \alpha_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) + \alpha_2(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_2) + \cdots + \alpha_n(\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_2) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2) \\ \ldots \\ \alpha_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_n) + \alpha_2(\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_n) + \cdots + \alpha_n(\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_n) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_n) \end{cases} \qquad (10)$$

Матрица этой системы – матрица Грама системы векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \ldots \mathbf{a_n}$, порождающих линейное подпространство L . Векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \ldots \mathbf{a_n}$ - это столбцы коэффициентов при неизвестных $x_1\ x_2 \ldots x_n$ исходной системы. Матрица Грама может быть получена из матрицы системы A следующим образом $G = A^T A$.

Действительно, $A^T A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} = G(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \ldots \mathbf{a_n})$

Столбец свободных членов системы (10) можно записать в виде $A^T \mathbf{b}$. Таким образом для решения системы (9) по методу наименьших квадратов нужно решить совместную систему (10), которую удобно записать в матричном виде

$$A^T AX = A^T \mathbf{b}. \qquad (11)$$

Пример. Дана несовместная система (первые два уравнения противоречивы).

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Решим эту систему по методу наименьших квадратов и найдем σ^2 .

Записываем систему в векторной форме $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ x+ $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$y= $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Записываем матрицу системы A=$\begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$ и ее транспонированную матрицу A^T=$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\3 & 3 & -1\end{pmatrix}$, перемножаем $A^TA = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\3 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 11\\11 & 19\end{pmatrix}$ и вычисляем A^T **b**= $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\3 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Формула (11) приводит к системе $\begin{pmatrix}9 & 11\\11 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, а ,при переходе от матричной записи к традиционной к системе $\begin{cases} 9x + 11y = 4 \\ 11x + 19y = 1 \end{cases}$.

Эта система всегда совместна, так как проекция вектора на подпространство всегда существует. Матрица системы квадратная и невырожденная, поэтому можно решить систему методом Крамера: det$\begin{pmatrix}9 & 11\\11 & 19\end{pmatrix}$= 50, det $\begin{pmatrix}4 & 11\\1 & 19\end{pmatrix}$= 65 ,

det $\begin{pmatrix}9 & 4\\11 & 1\end{pmatrix}$= -35. Получаем x =1,3 , y= -0,7. Находим квадрат среднеквадратичной погрешности :

$\sigma^2 = (2x+3y-0)^2 + (2x+3y-1)^2 + (x-y-2)^2 = 0{,}5^2 + 0{,}5^2 = 0{,}5$. Запишем систему в векторной форме : x $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ + y$\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.Вектор свободных членов **b**=$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ не принадлежит линейной оболочке L векторов $\mathbf{a_1}$=$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ и $\mathbf{a_2}$=$\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$, так как система несовместна. Вектор 1,3 $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ -0,7$\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$ - проекция вектора **b** на подпространство L, а σ^2 - квадрат длины ортогональной составляющей вектора **b** .

Пример из домашней работы по евклидовым пространствам. Часть3.

Даны три вектора: $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5$.

Требуется решить методом наименьших квадратов систему $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы имеем систему линейных уравнений явно несовместную, так как вектор $\boldsymbol{f}_3$ не принадлежит линейной оболочке векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ и ,следовательно, вектор $\boldsymbol{b}$ не принадлежит линейной оболочке L $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$.

Несовместная система принимает вид
$$\begin{cases} -x_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -5 \\ 3x_2 = 6 \\ -2x_1 = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Решать систему (12) методом наименьших квадратов можно разными способами. Для начала, спроектируем вектор $\boldsymbol{b}$ на $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$. $\mathrm{pr}_L\, \boldsymbol{b} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \mathrm{ort}_L\, \boldsymbol{b}$.

Находим коэффициенты μ_1 и μ_2 из системы (10) (то есть умножаем скалярно последнее равенство на $\boldsymbol{a}_1$, затем на $\boldsymbol{a}_2$):

$$\begin{cases} (a_1, a_1)\mu_1 + (a_1, a_2)\mu_2 = (\boldsymbol{b}, a_1) \\ (a_1, a_2)\mu_1 + (a_2, a_2)\mu_2 = (\boldsymbol{b}, a_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} 10\mu_1 = -10 \\ 14\mu_2 = 28 \end{cases}.$$

У нас случайно получилось, что $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$ (в других вариантах домашней работы это может быть не так). Решая систему, получаем: $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 2$. Таким образом, проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на L равна:

$$\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = 2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-5\\6\\2\end{pmatrix}$$

Геометрический смысл метода наименьших квадратов в том, что теперь мы заменим столбец свободных членов $\boldsymbol{b}$ на проекцию $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}$, и получится совместная система:

$$\begin{cases} -x_1 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -5 \\ 3x_2 = 6 \\ -2x_1 = 2 \end{cases}$$

Решать её заново не нужно, так как очевидно, что числа μ_1 и μ_2 являются её решением. Эти числа и считаются приближённым решением исходной несовместной системы, так что можно написать: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Мерилом погрешности этого приближённого решения считается длина вектора $\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}$ (для совместной системы этот вектор равен нулю, а приближённое решение совпадает с обычным). Таким образом,

погрешность σ равна $|\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}|$. Чтобы не возиться с радикалами, часто вычисляют σ^2. В нашем случае $\sigma^2 = |\mathrm{ort}_L\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{b} - \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}|^2 = 20$.

Как видим, погрешность получилась весьма значительной (в других вариантах она может получиться даже еще больше). В реальных прикладных задачах она, конечно, значительно меньше.

Заметим, что наша задача допускает другой способ решения. Из теоремы 12 о линейности проекции следует, что ортогональное проектирование на L есть линейное отображение евклидова пространства E в линейное подпространство L. После замены нашей исходной несовместной системы уравнений на совместную имеем равенство $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{b}$, где x_1, x_2 – искомое (приближённое) решение. Но $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3$;

$\mathrm{pr}_L\boldsymbol{b} = \mathrm{pr}_L(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3) = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_1 + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_2 + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3$. Но $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_1$, $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2$, т. к. $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in L$, так что $x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3$; Вычитая из обеих частей $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$, получим

$x_1\boldsymbol{f}_1 + (x_2 - 1)(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3$; $\quad (x_1 + x_2 - 1)\boldsymbol{f}_1 + (x_2 - 1)\boldsymbol{f}_2 = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{f}_3$.

Заметим, что вектор $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3$ и его разложение в линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ мы уже вычислили выше (вторая часть домашней работы). Так что имеем $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ и , следовательно , $x_1 + x_2 - 1 = 0$; $x_2 - 1 = 1$.

Получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (как и выше). Наконец, можно сразу воспользоваться формулой (11) и записать систему $A^T AX = A^T \mathbf{b}$. Матрица системы (12)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Мы снова пришли к системе $\begin{cases} 10x_1 = -10 \\ 14x_2 = 28 \end{cases}$, решение которой x_1=-1, x_2=2.

Необходимость решать несовместную систему методом наименьших квадратов возникает при решении задачи аппроксимации. Пусть известны значения некоторой функции y= f(x) в конечном числе точек $x_1, x_2, \ldots, x_к$: y_1= f(x_1), y_2= f(x_2),..., $y_к$= f($x_к$), а аналитическое выражение функции, неизвестно или весьма сложно, тогда возникает необходимость найти функцию простого вида, например многочлен p(x) заданной степени, график которого наилучшим образом аппроксимирует точки $(x_1, y_1), \ldots, (x_к, y_к)$. В качестве меры отклонения заданных точек (x_i, y_i) от графика функции p(x) служит величина $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \mathrm{p}(x_i))^2$.

Если мы рассматриваем линейную аппроксимацию, то задача сводится к нахождению функции вида $y = ax + b$, для которой $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (y_i - ax_i - b)^2$

минимальна . Если бы точки (x_1, y_1), ..., ($x_к$, $y_к$) принадлежали бы некоторой прямой y=ax+b,то выполнялись бы соотношения:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ \quad ... \\ ax_к + b = y_к \end{cases} \qquad (13),$$

причем искомые коэффициенты a и b были бы решением системы (13). Однако, если система (13) несовместна и мы хотим минимизировать отклонение $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k}(y_i - ax_i - b)^2$, то задача сводится к нахождению неизвестных a и b, которые являются решением по методу наименьших квадратов системы (13).

Пример. Рассмотрим таблицу значений функции y= f(x).

X	-2	-1	0	1	2
Y	2	0	1	2	1

И запишем систему (13) для заданных в таблице значений функции.

$$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ -a + b = 0 \\ b = 1 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$ a и b- неизвестные, A=$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$- матрица системы.

$A^T=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^TA=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Это- матрица Грама столбцов матрицы A. Умножим A^T на столбец свободных членов:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$ и получаем систему для нахождения a и b:

$\begin{cases} 10a = 0 \\ 5b = 6 \end{cases}$, следовательно искомая линейная функция y=$\frac{6}{5}$=1,2. Найдем погрешность σ^2=$(1,2-2)^2+(1,2)^2+(1,2-1)^2+(1,2-2)^2+(1,2-1)^2$=2,8

Рассмотрим теперь квадратичную аппроксимацию и сравним полученные погрешности. Квадратичная функция имеет вид $y=ax^2+bx+c$, где a,b,c-неизвестные коэффициенты и запишем соответствующую систему.

$$\begin{cases} a\mathrm{x}_1{}^2 + b\mathrm{x}_1 + \mathrm{c} = y_1 \\ \quad\quad ... \\ a\mathrm{x}_\mathrm{к}{}^2 + b\mathrm{x}_\mathrm{к} + \mathrm{c} = y_\mathrm{к} \end{cases} \quad (14),$$

Система по-прежнему несовместна. Рассмотрим функцию заданную таблицей и соответствующую систему (14).

$$\begin{cases} 4a - 2b + \mathrm{c} = 2 \\ a - b + \mathrm{c} = 0 \\ \mathrm{c} = 1 \\ a + b + \mathrm{c} = 2 \\ 4a + 2b + \mathrm{c} = 1 \end{cases}, \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{- матрица системы.}$$

Вычисляем $\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ и получаем систему для нахождения решения системы (14) по методу наименьших квадратов:

$\begin{cases} 34a + 10c = 14 \\ 10b = 0 \\ 10a + 3c = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ 17a + 5c = 7 \\ 10a + 3c = 6 \end{cases}$. Находим неизвестные *a* и *c* по формулам Крамера. $a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{1}$, $c = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 7 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{32}{1}$.

Мы нашли квадратичную функцию $y=-9x^2+32$, Вычислим погрешность $\sigma^2 =$

$= (-4-2)^2+(23)^2+(32-1)^2+(23-2)^2+(-4-1)^2$. Даже не вычисляя эту сумму квадратов, видно, что погрешность существенно больше, чем при линейной аппроксимации.

§ 6. Комплексное евклидово пространство.

Пусть *V* – линейное пространство над полем комплексных чисел **C**.

Определение 15. Скалярным произведением в пространстве *V* называется отображение, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ из пространства *V* комплексное число, обозначаемое $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, причём так, что выполняются условия:

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{a} \in V$.

2. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$ для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, т. е. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ – комплексно сопряжённые числа.

3. $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ и $\lambda \in \mathbf{C}$.

4. $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$ для любых $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \in V$.

Из этих свойств следует, что

3*. $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Действительно, $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \overline{(\lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \overline{\lambda(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \bar{\lambda}\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} =$

$\bar{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

4*. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2)$. Действительно, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \overline{(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a})} = =$ $\overline{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a})} = \overline{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a})} + \overline{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a})} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2)$.

При выводе свойств 3* и 4* мы воспользовались свойствами комплексного сопряжения выведенными при доказательстве теоремы 10 главы 4, а именно, если $z = \alpha + i\beta$, $\bar{z} = \alpha - i\beta$, то $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$.

Свойство 2 и вытекающее из него свойство 3* отличает комплексное евклидово пространство от вещественного. Заметим, что сохранить одновременно положительную определённость и симметрию скалярного произведения при переходе от вещественного пространства к комплексному

невозможно, так как из $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ следует, что $(\lambda\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и при $\lambda = i$ получаем $(i\boldsymbol{a}, i\boldsymbol{a}) = i^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, т. е. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ и $(i\boldsymbol{a}, i\boldsymbol{a})$ не могут быть одновременно положительными числами.

Определение 16. Пространство V вместе с заданным в нём скалярным произведением называется комплексным евклидовым пространством и обозначается E.

Сохранив положительную определённость скалярного произведения (свойство 1), можно определить в комплексном евклидовом пространстве длину вектора.

Определение 17. Длиной вектора $\boldsymbol{a} \in E$ называется число $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$.

Отметим, что неравенство $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$ подразумевает, что число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ вещественное, так как невещественные комплексные числа сравнивать нельзя. Угол между векторами в комплексном евклидовом пространстве не определяется, так как скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ − комплексное число, однако вводится понятие ортогональных векторов.

Определение 18**.** Два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ в комплексном евклидовом пространстве E называются ортогональными ($\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$), если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Эти определения позволяют рассматривать ортогональные и ортонормальные системы (в том числе и базисы) в пространстве E и его линейных подпространствах. Причём свойства ортогональных систем, доказанные для вещественных евклидовых пространств, сохраняются и в комплексном случае, в частности, из любой линейно независимой системы векторов, применяя процесс ортогонализации и нормирование, можно получить ортонормальный базис в линейной оболочке этих векторов, а также разложить евклидово пространство E в прямую сумму $E = L \oplus L^{\perp}$, где L − линейное подпространство в E, а $L^{\perp}$ − его ортогональное дополнение.

Основным примером комплексного евклидова пространства является линейное пространство $\mathbf{C}^n = \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix};\ z_i \in \mathbf{C}\right\}$ со стандартным скалярным произведением $(\mathbf{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$.

В этом евклидовом пространстве длина вектора $\boldsymbol{z}$ вычисляется по формуле:

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2},$$

а векторы $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ по-прежнему образуют ортонормальный базис.

Произвольное n-мерное комплексное евклидово пространство E можно «отождествить» с евклидовым пространством $\mathbf{C}^n$. Для построения изометрического изоморфизма пространств E и $\mathbf{C}^n$ зафиксируем в E ортонормальный базис $\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n}$. Если $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \boldsymbol{e_i}$ − разложение вектора $\mathbf{z} \in E$ по базису $\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n}$, то, поставив этому вектору в соответствие вектор-столбец комплексных чисел $\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, мы получим биективное и линейное отображение φ пространства E в $\mathbf{C}^n$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{z}$ и $\boldsymbol{w}$ пространства E в ортонормальном базисе вычисляется по формуле $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \overline{w_i}$ (доказательство такое же, как и в вещественном случае) .Следовательно, построенное отображение φ является изометрическим изоморфизмом.

Матрица Грама G для системы векторов $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ в комплексном евклидовом пространстве определяется так же, как и в вещественном случае, но ее структура будет другой.

Из свойства 2 скалярного произведения. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$ следует , что при транспонировании матрицы G мы получим матрицу из сопряженных чисел.

$G^T = \bar{G}$. На диагонали будут стоять вещественные неотрицательные числа . Матрицы с комплексными элементами , удовлетворяющие условию $G^T = \bar{G}$, называются эрмитовыми.

Пример.

$\begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 2 & -2+i \\ 1+i & -2-i & 2 \end{pmatrix}$ -эрмитова матрица.

Пример. Рассмотрим два вектора в пространстве $\mathbf{C}^4$. $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \\ -i \end{pmatrix}$,

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Вычислим длины этих векторов и их скалярное произведение.

$(\mathbf{z},\mathbf{z})$= 1+i(-i) +(1-i)(1+i) +(-i)(i)=5, $|\mathbf{z}| = \sqrt{5}$

$(\mathbf{w},\mathbf{w})$=i(-i) +(-i)i +2(2) + (1+i)(1-i)=10 , $|\mathbf{w}| = \sqrt{10}$

$(\mathbf{z},\mathbf{w})= \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} = 1(\overline{\imath}) + i(\overline{-\imath}) + (1-i)\overline{2} + (-i)\overline{(1+\imath)} = -i + i^2 + 2 - 2i - i(-i)^2 = 1 - 2i$

§7. Упражнения.

1. L_1 , L_2 L_3 – линейные подпространства в линейном пространстве V. Верно ли, что $L_1 \cap (L_2 + L_3) = L_1 \cap L_2 + L_1 \cap L_3$?

2. L_1 , $L_2 \dots L_n$ – линейные подпространства в линейном пространстве V такие, что $L_i \cap L_j = \{\mathbf{0}\}$. Будет ли сумма этих подпространств прямой ?

3. $L_1 = \{\mathbf{x} \in R^n , x_1 + \dots + x_n = 0\}$, $L_2 = \{\mathbf{x} \in R^n , x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$. Доказать, что R^n – прямая сумма L_1 и L_2 .

4. Доказать что для любого линейного подпространства L_1 в пространстве R^n найдется линейное подпространство L_2 такое, что R^n – прямая сумма L_1 и L_2 .Однозначно ли определено подпространство L_2 ?

5. f(L)-функция, определенная на множестве линейных подпространств в R^n , обладающая свойствами

a) $f(L_1 + L_2) = f(L_1) + f(L_2)$,если $L_1 \cap L_2 = 0$. b) Если dim(L)=1 ,то f(L)=1.

Доказать, что f(L)= dimL.

6.Скалярное произведение в пространстве R^2 задано матрицей Грама $G(\mathbf{i,j}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.Найти

а) длину векторов **i** и **j** и угол между ними.

б) длину вектора **a**= (1,1).

в) проекцию вектора **a** на линейную оболочку вектора **i.**

г) ортонормированный базис в пространстве R^2.

7.Скалярное произведение в пространстве R^3 задано матрицей Грама $G(i,j,к) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.L- линейная оболочка векторов $\mathbf{a_1}$=(1,0,1) и $\mathbf{a_2}$=(-1,1,1). Найти

а) ортогональное дополнение к пространству L.

б) проекцию вектора **i** на линейное подпространство L.

в) длину ортогональной составляющей вектора **i** .

8.В пространстве R^3 скалярное произведение задано матрицей Грама

G**(i, j, k**)=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти проекцию вектора **a** = $(1, \quad 1, \quad 1)$ на плоскость $x_1+2x_2 - 2x_3 =0$.

9. В пространстве R^3 скалярное произведение задано матрицей Грама

G(**i, j, k**)=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти проекцию вектора **a** = $(1, \quad 0, \quad 0)$ на прямую $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

10 . В пространстве R^3 скалярное произведение задано матрицей Грама

G(**i, j, k**)=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти ортогональное дополнение к плоскости x+ y+ z =0.

11. В пространстве R^3 скалярное произведение задано матрицей

G**(i, j, k**)=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти ортогональное дополнение к прямой $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

Глава 6. Линейные операторы.

§1. Определения и примеры.

Пусть V – линейное пространство над полем P (P = **R** или P = **C**) и

φ – отображение V в V, т.е. правило, описывающее, как по вектору $\boldsymbol{x} \in V$ найти вектор $\boldsymbol{y} \in V$. При этом вектор $\boldsymbol{y}$ называется образом вектора $\boldsymbol{x}$ и обозначается $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$.

Определение**1.** Пусть V_1 и V_2- линейные пространства над одним полем P. Отображение φ: $V_1 \to V_2$ называется линейным, если оно обладает следующими свойствами.

1. $\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$, т.е. образ суммы двух векторов совпадает с суммой образов этих векторов.

2. $\varphi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$ – образ вектора, умноженного на число, совпадает с произведением образа этого вектора на то же число.

Если $V_1 = V_2$, то линейное отображение называется линейным оператором**.**

Из определения следует, что если φ – линейное отображение, то $\varphi(\alpha_1 \boldsymbol{x} + \alpha_2 \boldsymbol{y}) = \alpha_1\varphi(\boldsymbol{x}) + \alpha_2\varphi(\boldsymbol{y})$, то есть образ линейной комбинации векторов равен линейной комбинации образов этих векторов с теми же коэффициентами.

Примеры.

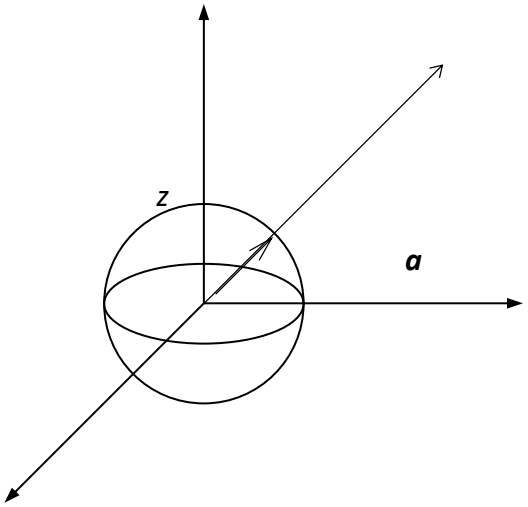
1.Рассмотрим произвольное линейное пространство *V* и в нем два оператора: $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0 \ \ \forall\ \mathbf{x} \in V$ и $\varphi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in V$. Оператор φ_1 называется нулевым , а оператор φ_2 - тождественным оператором и обозначается id. Линейность этих операторов проверяется без труда.

2. Рассмотрим линейное пространство $V = V^2$, т.е. множество всех векторов плоскости, и отображение φ – поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{6}$. Это отображение является линейным оператором, так как $\varphi(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) = \varphi(\boldsymbol{x_1}) + \varphi(\boldsymbol{x_2})$, $\varphi(\lambda \boldsymbol{x_1}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x_1})$. Можно рассмотреть оператор поворота на произвольный угол α. Этот линейный оператор обозначается φ_α. Заметим, что при $\alpha = 2k\pi$ $\varphi_\alpha = \mathrm{id}$.

3. Пусть $V = V^3$ – множество всех векторов трехмерного пространства. Отображение φ – ортогональное проектирование на плоскость *OXY* Линейность этого оператора вытекает из теоремы 12 предыдущей главы. проектирования. $\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{pr}_{OXY}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{pr}_{OXY}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{pr}_{OXY}\,\boldsymbol{b} = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$; $\varphi(\lambda\boldsymbol{a}) = \mathrm{pr}_{OXY}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{pr}_{OXY}\,\boldsymbol{a} = \lambda\varphi(\boldsymbol{a})$. Оператор ортогонального проектирования на плоскость называется проектором. Заметим, что для любой плоскости трехмерного пространства, проходящей через начало координат, можно определить оператор ортогонального проектирования на эту плоскость.

Замечание. Если *V* = E- евклидово пространство, L-его линейное подпространство, тот для любого вектора **x** определена его проекция $\mathrm{pr}_L\boldsymbol{x}$ на подпространство L. Из свойства линейности проекции (глава 5, теорема 12) следует, что отображение $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{pr}_L\boldsymbol{x}$ является линейным оператором в пространстве E. Операторы в евклидовых пространствах будут рассмотрены в следующей главе.

4. Не все отображения являются линейными. В том же векторном пространстве $V = \mathbf{V}^3$ рассмотрим единичную сферу, задаваемую в декартовой системе координат уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и отображение φ, переводящее вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $\varphi(\boldsymbol{a})$, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}$ и имеющий единичную



$\Phi(\boldsymbol{a})$

длину.

Отображение φ не является линейным оператором, т.к. $\varphi(\lambda\boldsymbol{a}) = \varphi(\boldsymbol{a}) \neq \lambda\varphi(\boldsymbol{a})$ при $\lambda \neq 1$.

5. Рассмотрим $V = P_n[x]$, т.е. линейное пространство всех многочленов степени не выше n: $P_n[x] = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in P\}$ и φ – отображение дифференцирования: $\varphi(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$.

Мы знаем свойства производной: $(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$ и $(\lambda p(x))' = \lambda p'(x)$;

следовательно, отображение дифференцирования является линейным оператором, который обозначается $\varphi = d$.

6. Пусть $V = M_n$ – линейное пространство квадратных матриц порядка n, A – фиксированная матрица, φ – отображение $M_n \to M_n$, действующее следующим образом: для произвольной матрицы $B \in M_n$ образ $\varphi(B) = A \cdot B$.

Проверим линейность этого отображения, используя известные свойства

умножения матриц: $\varphi(B + C) = A(B + C) = AB + AC = \varphi(B) + \varphi(C)$; $\varphi(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda\varphi(B)$. В частности, если $n = 2$, а матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то для любой матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\varphi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$.

7. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbf{R} \right\}$ и $A \in M_n$ – фиксированную квадратную матрицу порядка n; $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ – векторы пространства $\mathbf{R}^n$. С помощью матрицы $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ зададим отображение φ_A: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \boldsymbol{y} = \varphi_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}.$$

φ_A – линейный оператор, т.к. $\varphi_A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \varphi_A(\boldsymbol{x}_1) + \varphi_A(\boldsymbol{x}_2)$;

$\varphi_A(\lambda\boldsymbol{x}) = A\cdot(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi_A(\boldsymbol{x})$.

Этот пример, как мы увидим в следующем параграфе, является универсальным.

§2. Матрица линейного оператора в данном базисе

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – некоторый базис линейного пространства V, т.е. линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства V; φ – линейный оператор. Образы базисных векторов $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$, как и все векторы пространства V, линейно выражаются через базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_n^1\boldsymbol{e}_n$;

$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_1^2\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_n^2\boldsymbol{e}_n$;

…

$\varphi(\boldsymbol{e}_n) = a_1^n\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_n^n\boldsymbol{e}_n$.

Определение2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$, в столбцах которой стоят координаты образов базисных векторов в рассматриваемом базисе , называется матрицей линейного оператора в данном базисе.

Примеры.

1. Пусть $V = \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ – стандартный базис.

Рассмотрим нулевой и тождественный операторы. В первом случае $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\ , \forall\ \boldsymbol{x}$ и, следовательно, $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$; $\varphi(\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$;

$\varphi(\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$; $A = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ – матрица нулевого оператора.

Если $\varphi = \mathrm{id}$, то $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\ , \forall\ \boldsymbol{x}$ и, следовательно, $\mathrm{id}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$;

$\mathrm{id}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 = 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$; $\mathrm{id}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3$. Следовательно, матрицей оператора id будет матрица $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E$.

Заметим, что матрицами нулевого и тождественного оператора в любом базисе любого линейного пространства будут нулевая и единичная матрицы соответственно.

2. $V = \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^2$. Оператор φ – поворот на угол $\frac{\pi}{6}$ против часовой стрелки. $\varphi(\boldsymbol{i}) = (\cos\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{i} + (\sin\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{j}$;

$\varphi(\boldsymbol{j}) = (-\sin\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{i} + (\cos\frac{\pi}{6})\,\boldsymbol{j}$. Следовательно, матрицей поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ будет матрица $A = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$. Аналогичным образом можно получить матрицу оператора φ_α поворота плоскости на угол α против часовой стрелки: $A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

3. $V = \mathbf{R}^3$, φ – оператор проектирования на плоскость *OXY*. Найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Так как $\varphi(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varphi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\varphi(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, то $A = = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

В столбцах матрицы A стоят образы базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в координатной форме.

4. $V = P_3[x]$ – линейное пространство многочленов степени не выше 3, $\varphi = d$ – оператор дифференцирования; 1, x, x^2, x^3 – стандартный базис пространства V. Напомним, что любой многочлен $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в рассматриваемом базисе может быть записан в координатной форме, как четырехмерный вектор $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $d(1) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x) = 1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x^2) = 2x = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$,

$d(x^3) = 3x^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$. Следовательно, матрица оператора d в стандартном базисе имеет вид: $A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5. $V = \mathbf{R}^3$, φ_A – оператор умножения на матрицу A. Пусть, например $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Рассмотрим $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^3$; вектор $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

Действие оператора φ_A описывается следующим образом:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\x_2+2x_3\\x_3\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем: φ (***i***) = $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, φ (***j***) = $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, φ (***k***) = $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Матрица оператора φ_A совпадает с исходной матрицей $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Заметим, что в другом (отличном от стандартного базиса пространства $V = \mathbf{R}^3$) матрица оператора будет отличаться от исходной матрицы А. Этот пример показывает, что любая матрица является матрицей некоторого оператора, а именно, оператора умножения на эту матрицу.

Теорема 1.Каждый линейный оператор φ однозначно определяется своей матрицей.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix}a_1^1 & \dots & a_1^n\\ \dots & \dots & \dots\\ a_n^1 & \dots & a_n^n\end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора φ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_n$. Столбцы матрицы представляют собой координатную запись образов базисных векторов. А= $\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi(\boldsymbol{e}_1)\,\varphi(\boldsymbol{e}_2)\dots\varphi(\boldsymbol{e}_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}$

Однако, если известны векторы $\varphi(\mathbf{e_1})$, …, $\varphi(\mathbf{e_n})$, то известно, куда отображается любой вектор **x.** Пусть $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ – разложение вектора ***x*** по базису

$\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_n$, тогда в силу линейности оператора **y** = $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n) =$

$$x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = x_1\begin{pmatrix}a_1^1\\ \dots\\ a_n^1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}a_1^2\\ \dots\\ a_n^2\end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix}a_1^n\\ \dots\\ a_n^n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Следовательно, зафиксировав некоторый базис линейного пространства V и вычислив матрицу оператора φ в этом базисе, можно, зная координаты вектора **x** , найти координаты образа **y** = $\varphi(\boldsymbol{x})$ по формуле:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \dots\\ y_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix} \qquad (1)$$

Таким образом, каждый оператор является оператором умножения на свою матрицу *A*.

Так, рассмотренный нами в примере 4 оператор дифференцирования d имеет в стандартном базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если многочлен $p(x) \in P_3[x]$ имеет вид $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, то координатная запись этого многочлена в базисе $1, x, x^2, x^3$ такова: $p(x) = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$; $d(p(x)) = p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Координатная запись многочлена $p'(x) = \begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Этот вектор получается из вектора $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$, как и утверждает теория, умножением на матрицу A: $\begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

§3. Ядро и образ линейного оператора

С каждым линейным оператором φ связаны два важных подмножества векторов из линейного пространства V.

Определение 3. Ядром оператора φ (обозначается $\operatorname{Ker} \varphi$) называется множество всех векторов, отображаемых этим оператором в нулевой вектор $\mathbf{0}$: $\operatorname{Ker} \varphi = \{\boldsymbol{x}: \varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$.

Определение 4. Образом оператора φ (обозначается $\operatorname{Im} \varphi$) называется множества всех образов векторов пространства V: $\operatorname{Im} \varphi = \{\boldsymbol{y}: \boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})\}$.

Для любого линейного оператора φ ядро $\operatorname{Ker} \varphi \neq \varnothing$, т.к. обязательно содержит нулевой вектор: $\mathbf{0} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Действительно, возьмем произвольный

вектор $\boldsymbol{a} \in V$ и запишем: $\mathbf{0} = 0\cdot\boldsymbol{a}$; $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\cdot\boldsymbol{a}) = 0\cdot\varphi(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$. Из равенства $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ следует, что и образ линейного оператора φ (Im φ) также не пуст: $\mathbf{0} \in$ Im φ.

Теорема 2. Ядро и образ линейного оператора φ являются линейными подпространствами *V*.

Доказательство. $\mathbf{0} \in$ Ker φ, $\mathbf{0} \in$ Im φ. Проверим, что ядро Ker φ и образ Im φ - подмножества, замкнутые относительно линейных операций в пространстве *V*. Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ Ker φ, то есть $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$; $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ – линейная комбинация рассматриваемых векторов. Оператор φ - линейный и переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов этих векторов с теми же коэффициентами: $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$.

Таким образом $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in$ Ker φ. Если же $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ Im φ, то $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{b})$, то есть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – образы каких-то векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Рассмотрим вектор $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ – линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с коэффициентами α и β и найдем его образ:

$\varphi(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{a}) + \beta\varphi(\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$. Вектор $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ является образом вектора $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ и, следовательно, принадлежит образу оператора Im φ.

Примеры.

1. φ – нулевой оператор в $\mathbf{R}^3$. Ker $\varphi = \mathbf{R}^3$, Im $\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

2. φ = id.- тождественный оператор в $\mathbf{R}^3$. Ker $\varphi = \{\mathbf{0}\}$, Im $\varphi = \mathbf{R}^3$.

3. φ - поворот на некоторый угол α в $\mathbf{R}^2$. Ker $\varphi = \{\mathbf{0}\}$, Im $\varphi = \mathbf{R}^2$.

4. φ – проектор в $\mathbf{R}^3$ на плоскость *OXY*. Ker $\varphi = \{\lambda\boldsymbol{k}\}$ – ось *OZ*, Im $\varphi = <\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}>$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, т.е. плоскость *OXY*.

5. φ =d- дифференцирование в $P_3[x]$. Ker φ = {const.} = <1>,

Im $\varphi = <1, x, x^2> = P_2[x]$ - множество многочленов степени не выше 2.

Найдем Ker φ и Im φ для произвольного оператора φ, который в фиксированном базисе есть оператор умножения на матрицу *A*.

Ker φ – это такие векторы $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, для которых $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + & \dots & + a_1^n x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 x_1 + & \dots & + a_n^n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, ядро оператора совпадает с $V(\hat{A})$ – множеством всех решений однородной системы

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \ \dots \ + a_1^n x_n = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n^1 x_1 + \ \dots \ + a_n^n x_n = 0. \end{cases}$$

Для определения размерности ядра мы можем воспользоваться теоремой 17 главы 2. dim Ker φ = dim $V(\hat{A})$ = $n - r$, где n – размерность пространства V, а r – ранг матрицы A.

Если $V(\hat{A}) = \{\mathbf{0}\}$, то Ker φ = $\{\mathbf{0}\}$ и любой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ переходит под действием оператора φ в ненулевой вектор. В этом случае, если $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, то $\varphi(\boldsymbol{x}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{x}_2)$. Действительно, рассмотрим вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Из сказанного выше следует, что $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, но $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}_2)$, т.е. $\varphi(\boldsymbol{x}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{x}_2)$. Такие отображения φ, для которых образы различных векторов различны, называются инъективными**.** Если ядро оператора Ker φ состоит не только из **0**, то отображение φ не является инъективным. Действительно, пусть $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и пусть $\boldsymbol{x} \in$ Ker φ, тогда $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Образ $\boldsymbol{x}$ и образ **0** совпадают.

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in V$ и разложим его по некоторому базису $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$. Применим к вектору $\boldsymbol{x}$ линейный оператор φ. $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)$.

Так как любой вектор из образа Im φ имеет вид $\varphi(\boldsymbol{x})$, то любой вектор $\boldsymbol{y} \in$ Im φ является линейной комбинацией векторов $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$.Рассмотрим $L = \langle\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\rangle$ – линейную оболочку образов базисных векторов, то есть множество всевозможных линейных комбинаций вида $\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Очевидно, что Im $\varphi \subset L$. Однако верно и обратное включение: $L \subset$ Im φ. Для доказательства этого включения рассмотрим произвольную линейную комбинацию векторов $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$: $\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \dots + \lambda_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{y}$ и покажем, что существует вектор $\boldsymbol{x} \in V$, для которого $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. Это- вектор $\boldsymbol{x} = \sum_1^n \lambda_i e_i$. Действительно, в силу линейности оператора $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{y}$.

Следовательно, образ оператора Im φ совпадает с $\langle\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\rangle$ – линейной оболочкой образов базисных векторов, и dim Im φ = dim $\langle\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)\rangle$. Но размерность линейной оболочки векторов совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов в системе $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Это число совпадает с rk $A = r$, так как столбцы матрицы A – это векторы $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Итак:

dim Ker φ = n – rkA, a dim Im φ = rkA (2)

Из формул (2) следует , что dim Ker φ + dim Im φ = n . В частности, если rkA = n = dim$V$, то Im φ = V и отображение φ сюръективно, то есть образ отображения совпадает со всем пространством. С другой стороны, в этом

случае Ker φ ={**0**} и, как мы отметили выше, отображение φ инъективно. Таким образом, φ является биективным**,** т.е. взаимно однозначным отображением пространства *V* на себя. Биективное линейное отображение одного линейного пространства V_1 в другое линейное пространство V_2 называется изоморфизмом. (Биективное линейное отображение линейного пространства в себя называется автомофизмом).

Заметим, что из соотношения dim Ker φ + dim Im φ = *n* не следует, что линейные подпространства L_1= Ker φ и L_2= Im φ пересекаются только по нулевому вектору (хотя, во многих примерах рассмотренных выше, это так). Рассмотрим снова оператор φ =d- дифференцирование в P_3 [*x*]. Ker φ = <1>- многочлены нулевой степени, Im φ = <1, *x*, x^2> = P_2 [*x*] - множество многочленов степени не выше 2. Подпространство Ker φ содержится в линейном подпространстве Im φ.

§4. Действия над линейными операторами

Пусть φ_1 и φ_2 – линейные операторы в векторном пространстве *V*. Определение 5. Суммой линейных операторов φ_1 и φ_2 называется оператор φ, действующий следующим образом: $\boldsymbol{x} \to \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x})$. Оператор φ обозначается $\varphi_1 + \varphi_2$.

Теорема 3. Сумма линейных операторов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. – линейный оператор в пространстве *V*.

Доказательство. Проверим, что $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$. Согласно определению 5, $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \varphi_1(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) + \varphi_2(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi_1(\boldsymbol{y}) + \alpha\varphi_2(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi_2(\boldsymbol{y}) = \alpha(\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x})) + \beta(\varphi_1(\boldsymbol{y}) + \varphi_2(\boldsymbol{y})) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$.(Мы воспользовались линейностью операторов φ_1 и φ_2).

В фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ каждый оператор описывается своей матрицей. Пусть *A* – матрица оператора φ_1, *B* – матрица оператора φ_2 и *C* – матрица оператора $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Столбцы этих матриц – образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в координатной записи:

$$A = \begin{pmatrix} \cdots \\ \varphi_1(\boldsymbol{e}_i) \\ \cdots \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \varphi_2(\boldsymbol{e}_i) \\ \cdots \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} \cdots \\ \varphi_1(\boldsymbol{e}_i) + \varphi_2(\boldsymbol{e}_i) \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $C = A + B$, так ка $c_i^j = a_i^j + b_i^j$. Мы видим, что при сложении операторов их матрицы складываются.

Определение 6.Пусть φ – произвольный линейный оператор, λ – число из рассматриваемого поля P. Произведением оператора φ на число λ называется оператор ψ, обозначаемый $\lambda\varphi$ и действующий следующим образом: $\psi(\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$.

Несложно проверить, что если φ – линейный оператор, то ψ – также линейный оператор. (Проверьте!) Если A – матрица оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_n$, то B – матрица оператора ψ в этом же базисе – имеет вид:

$B = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \lambda\varphi(\boldsymbol{e}_1) & \dots & \lambda\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \lambda A$. Таким образом, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число.

Определение 7.Произведением линейных операторов φ_1 и φ_2 называется оператор φ, действующий следующим образом:$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{x}))$.

Оператор φ обозначается $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и является композицией отображений φ_1 и φ_2.

Теорема 4.Произведение линейных операторов $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ – линейный оператор.

Доказательство. Проверим линейность оператора φ: $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})) = \varphi_2(\alpha\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi_1(\boldsymbol{y})) = \alpha\varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{x})) + \beta\varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{y})) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y})$. (Мы воспользовались линейностью операторов φ_1 и φ_2).

Пусть A – матрица оператора φ_1, B – матрица оператора φ_2, а C – матрица оператора $\varphi_1\,\varphi_2$ в фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_n$. Выясним, как связаны между собой эти матрицы. Воспользуемся формулой (1)-матричной записью действия оператора. Если $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; то $\varphi_1(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi_2(\boldsymbol{x}) = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = C\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

.

Согласно определению произведения операторов,

$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi_2(\varphi_1(\boldsymbol{x})) = B\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi_1(\boldsymbol{x}) = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, т.е. $\varphi(\boldsymbol{x}) = B(A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix})=$

(BA)$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.(Мы воспользовались ассоциативностью умножения матриц!)

С другой стороны, $\varphi(\boldsymbol{x}) = C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Итак, мы имеем равенство $C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ =

$(B\cdot A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, справедливое для любого вектора $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. То есть, с одной стороны, φ – оператор умножения на матрицу C, а с другой стороны, φ – оператор умножения на матрицу $B\cdot A$.

Мы знаем, что матрица линейного оператора в данном базисе определена однозначно, так как ее столбцами являются столбцы $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$, …, $\varphi(\boldsymbol{e}_n)$. Следовательно, $C = B\cdot A$. Таким образом, матрица оператора $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ является произведением матриц операторов φ_1 и φ_2 , взятых в обратном порядке.

Определение 8. Оператор ψ называется обратным к оператору φ, если $\psi\cdot\varphi = \varphi\cdot\psi =$ id, то есть их произведение в любом порядке дает тождественный оператор.

Если φ имеет обратный оператор ψ, то для матриц этих операторов в данном базисе $\mathbf{e_1, \dots, e_n}$ выполняется равенство:

$A_\varphi\cdot A_\psi = A_\psi\cdot A_\varphi = E$, ($E$ – матрица оператора id.) т.е. $A_\psi = A_\varphi^{-1}$.

Оператор ψ однозначно определяется по оператору φ (если он, конечно, существует) и обозначается φ^{-1}. Сформулируем несколько равносильных критериев обратимости линейного оператора.

Для существования оператора φ^{-1} необходимо и достаточно, чтобы

а) матрица A оператора φ была бы обратима, что равносильно, как мы знаем, условиям $|A| \neq 0$.

б) ранг матрицы оператора в каком-либо базисе (а следовательно, и в любом) равен размерности пространства. rkA =n.

в) Ker $\varphi = \{0\}$. Ядро оператора состоит только из нулевого вектора.

г) Im $\varphi = V$. Образ оператора заполняет все линейное пространство.

д) отображение φ является изоморфизмом.

§ 5. Примеры.

Проиллюстрируем изложенную выше теорию на операторах в трехмерном пространстве R^3 (V^3).

1. Обозначим через φ оператор в пространстве V^3 осуществляющий поворот каждого вектора трехмерного пространства (R^3) вокруг оси *OY* на 45° против часовой стрелки, если смотреть из конца оси *OY* (точнее, смотреть вдоль этой оси в направлении, противоположном стрелке). (Очевидно, что φ действительно есть линейный оператор.) Прежде всего запишем матрицу этого оператора. Из геометрических соображений ясно, что плоскость *XOZ*, перпендикулярная к оси *OY*, будет вращаться внутри себя, поэтому поворот вектора ***i*** будет осуществляться в пределах этой плоскости. Координаты вектора φ(**i**) в плоскости *XOZ* будут равны $\{\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, следовательно, $\varphi(\boldsymbol{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$. Далее, $\varphi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}$ (вектор ***j*** при заданном вращении не меняется), а $\varphi(\boldsymbol{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$. Таким образом, искомая матрица равна:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Этот оператор обратим – обратным к нему будет оператор поворота на угол 45° в противоположную сторону вокруг оси OY. (Обратимость данного оператора следует также из невырожденности матрицы A_φ – ее определитель равен 1). Найдем теперь ядро и образ этого оператора. Так как любой вектор имеет прообраз, то образ совпадает со всем пространством V^3. Что же касается ядра, то это по определению множество всех векторов, переходящих в нуль. Так как при повороте длина вектора не меняется, то таковым может быть только нулевой вектор. Итак, ядро в данном случае равно нулевому подпространству. Впрочем, мы могли воспользоваться общим утверждением: если линейный оператор обратим, то у него нулевое ядро, а его образ есть всё пространство. Заметим, что рассматриваемый оператор φ действует в плоскости *XOZ* как оператор поворота на угол 45° в направлении противоположном направлению кратчайшего поворота от первого базисного вектора ***i*** ко второму базисному вектору ***k***, поэтому его матрица в базисе ***i*** , ***k*** имеет стандартный вид $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ при α=-45°.

Рассмотрим в линейном пространстве $\mathbf{R^3}$ двумерное подпространство - плоскость π , проходящую через начало координат. π: Ax+By+Cz=0, где $\boldsymbol{n}$=(A,B,C) - вектор нормали к плоскости. В пространстве определено стандартное скалярное произведение, следовательно пространство $\mathbf{R^3}$ является евклидовым и может быть разложено в прямую сумму $\mathbf{R^3} = L \oplus L^{\perp}$, где L – плоскость π , а $L^{\perp}$ - прямая l , проходящая через начало координат в направлении вектора $\boldsymbol{n}$. Любой вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{R^3}$ можно записать единственным образом в виде $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, где $\mathbf{b}$ принадлежит плоскости π , а $\mathbf{c}$ – прямой l. $\mathbf{b}=pr_L\boldsymbol{a}$, $\mathbf{c}=pr_l\boldsymbol{a}$. Таким образом разложение $\mathbf{R^3} = L \oplus L^{\perp}$ позволяет определить два оператора: $\varphi_1(\mathbf{a})=\mathbf{b}$ и $\varphi_2(\mathbf{a})=\mathbf{c}$. Из свойства линейности проекции вектора на подпространство вытекает линейность операторов φ_1 и φ_2. (Аналогичным образом можно определить операторы φ_1 и φ_2 для любого линейного подпространства L в произвольном евклидовом пространстве E).В пространстве $\mathbf{R^3}$ оператор φ_1 называется оператором ортогонального проектирования на плоскость π, а φ_2 - оператором ортогонального проектирование на ось l. (В произвольном евклидовом пространстве E соответствующие операторы называются ортогональными проекторами на подпространства L и $L^{\perp}$).

Рассмотрим подробнее оператор φ_2 ортогонального проектирования на ось l. Для нахождения образа вектора $\mathbf{a}$ можно воспользоваться формулой для нахождения численной проекции вектора на ось : $pr_l\,\boldsymbol{a}=\frac{(a,\boldsymbol{l})}{|\boldsymbol{l}|}$, где $\mathbf{l}$-произвольный вектор, задающий направление на оси , а затем умножить полученное число на единичный вектор $\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}$, идущий в направлении этой оси. Окончательно получаем формулу для нахождения вектор- проекции вектора на ось:

$$\mathbf{pr}_{l(}\boldsymbol{a)} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|^2}. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь оператор φ_1 ортогонального проектирования на плоскость π .Из разложения $\mathbf{R^3} = L \oplus L^{\perp}$ следует, что

$$\mathbf{pr}_{\pi}(\boldsymbol{a)} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}. \qquad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ – произвольный ненулевой вектор, нормальный к плоскости π.

2. Обозначим через ω – оператор ортогонального проектирование на ось $x = y$, $z = 0$. Прямая ,на которую мы проектируем, задана общими уравнениями. Прямая лежит в плоскости OXY и ее направляющий вектор $\mathbf{l}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Образы базисных векторов можно найти как из геометрических соображений, так и с помощью формулы (3):

$$\omega(\boldsymbol{i}) = \mathbf{pr}_{\boldsymbol{l}}(\mathbf{i}) = \frac{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|^2} = \frac{1}{2}\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega(\boldsymbol{j}) = \mathbf{pr}_{\boldsymbol{l}}(\mathbf{j}) = \frac{(\boldsymbol{j},\boldsymbol{l})}{|\boldsymbol{l}|^2}\mathbf{l} = \frac{1}{2}\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\omega(\boldsymbol{k}) = \mathbf{pr}_{\boldsymbol{l}}(\mathbf{к}) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, матрица оператора $A_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Оператор ω необратим, так как не выполняется ни один из критериев обратимости . Так как критерий – необходимое и достаточное условие обратимости, то достаточно, чтобы не выполнялся хотя бы один из них (матрица A_ω- вырожденная). Образом оператора ω будет данная ось **l**, точнее, соответствующее одномерное подпространство векторов коллинеарных данной прямой. Таким образом Im ω является линейной оболочкой вектора **l.** Ядро же (совокупность векторов отображаемых в **0**)- совокупность векторов перпендикулярных нашей оси. Эта совокупность является плоскостью, уравнение которой мы легко можем написать, пользуясь тем, что вектор **l** - нормаль к искомой плоскости. Ядро Ker ω задается уравнением $x + y = 0$. Найдем какой -нибудь базис подпространства Ker ω. Например, можно взять два вектора **a**= $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **b**= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, координаты которых удовлетворяют уравнению плоскости и записать Kerω =<**a**,**b**>.

3. Обозначим через ψ оператор ортогонального проектирования на плоскость $x = y$. Плоскость проходит через ось OZ и биссектрису первого и третьего координатных углов в плоскости OXУ. В нашем случае в качестве вектора нормали можно взять вектор $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Поэтому,

$$\psi(\boldsymbol{i}) = \mathbf{pr}_{\pi}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} - \frac{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2} = \boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\psi(\boldsymbol{j}) = \mathbf{pr}_\pi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j} - \frac{(\boldsymbol{j},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{n}|^2}\,\mathbf{n} = \boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}$, так как вектор $\boldsymbol{k}$ принадлежит плоскости, на которую мы проектируем. В результате получаем матрицу оператора $A_\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассматриваемый оператор необратим так как он, например, не инъективен: $\psi(\boldsymbol{i}) = \psi(\boldsymbol{j})$. Он также не является сюръективным – образы всех векторов заполняют плоскость $x = y$, но не заполняют всего пространства. Необратимость оператора ψ вытекает также из того, что $\det A_\psi = 0$ (первые две строки матрицы A_ψ одинаковы).

Найдем ядро и образ оператора ψ. Так как образы всех векторов заполняют плоскость $x = y$, то эта плоскость и является образом нашего оператора. Что же касается ядра, то это по определению есть множество всех векторов, переходящих в нуль, то есть в данном случае проектирующихся в нуль. Легко понять, что эти векторы заполняют прямую, перпендикулярную данной плоскости и проходящую через начало координат. Ядро – множество всех векторов коллинеарных вектору $\boldsymbol{n}$. То есть $\mathrm{Ker}\,\psi$ – линейная оболочка указанного вектора. Запишем канонические уравнения соответствующей прямой $\mathrm{Ker}\,\psi$: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$.

Рассмотрим оператор зеркального отражения (симметрии) относительно плоскости π: $Ax+By+Cz=0$, где $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ - вектор нормали к плоскости. Используя разложение $\mathbf{R^3} = L \oplus L^{\perp}$, где L – плоскость π , а $L^{\perp}$ - прямая l , проходящая через начало координат в направлении вектора ***n,*** можно можно оператор $\mathbf{s}_\pi(\boldsymbol{a})$ симметрии относительно плоскости π описать следующим образом: если $\mathbf{a=b+c}$, где $\mathbf{b}\in L$, а $\mathbf{c}\in L^{\perp}$, то $\mathbf{s}_\pi(\boldsymbol{a}) = \mathbf{b-c.}$

(аналогичным образом в любом евклидовом пространстве можно определить оператор симметрии относительно линейного подпространства). Используя формулы (3) и (4) можно получить формулу для оператора симметрии:

$$\mathbf{s}_\pi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} - \frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2} \qquad (5)$$

Из формулы (5) видно, что оператор симметрии является линейной комбинацией тождественного оператора и оператора проектирования на прямую. $\mathbf{s}_\pi(\boldsymbol{a}) = \mathrm{id}(\mathbf{a}) - 2\ \mathbf{pr}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{a})$. Следовательно **,** рассматриваемый оператор - линейный

4. Обозначим через σ оператор зеркального отражения относительно плоскости $y = z$ и найдем образы базисных векторов . Это можно сделать, как из геометрических соображений , так и с помощью формулы (5). Пусть $\boldsymbol{n}$

– произвольный ненулевой вектор, нормальный к данной плоскости. В нашем случае в качестве вектора нормали можно взять вектор $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Поэтому,

$\sigma(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}-2\frac{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}=\mathbf{i}$, $\sigma(\boldsymbol{j})=\boldsymbol{j}-\frac{2(\boldsymbol{j},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\sigma(\mathbf{k})=\mathbf{k}+\mathbf{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\mathbf{j}$. ($|\boldsymbol{n}|^2=2$)

В результате получаем матрицу оператора σ : $A_\sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Матрица A_σ не вырождена, и, следовательно, оператор σ обратим. Это ясно также из того, что любой оператор зеркального отражения (относительно плоскости или прямой) всегда обратен самому себе (объясните это).

Поскольку наш оператор обратим, то у него нулевое ядро, а его образ есть всё пространство.

Оператор зеркального отражения относительно прямой(относительно $L^{\perp}$ в общем случае) можно описать следующим образом: если l прямая, проходящая через начало координат , а π - ортогональная ей плоскость, также проходящая через начало координат и $\mathbf{R^3}=L\oplus L^{\perp}$, где L – плоскость π а $L^{\perp}$ - прямая l , то для любого вектора $\boldsymbol{a}$ справедливо разложение $\mathbf{a=b+c}$, где $\mathbf{b}\in L$, а $\mathbf{c}\in L^{\perp}$. Оператор зеркального отражения относительно прямой l действует следующим образом: $\mathbf{s}_l(\boldsymbol{a})=-\mathbf{b+c}$. Из формул (3) и (4) получаем:

$$\mathbf{s}_l(\boldsymbol{a})=\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|^2}-\boldsymbol{a} \qquad (6)$$

В формуле (6) $\boldsymbol{l}$ – произвольный ненулевой (направляющий) вектор данной оси.

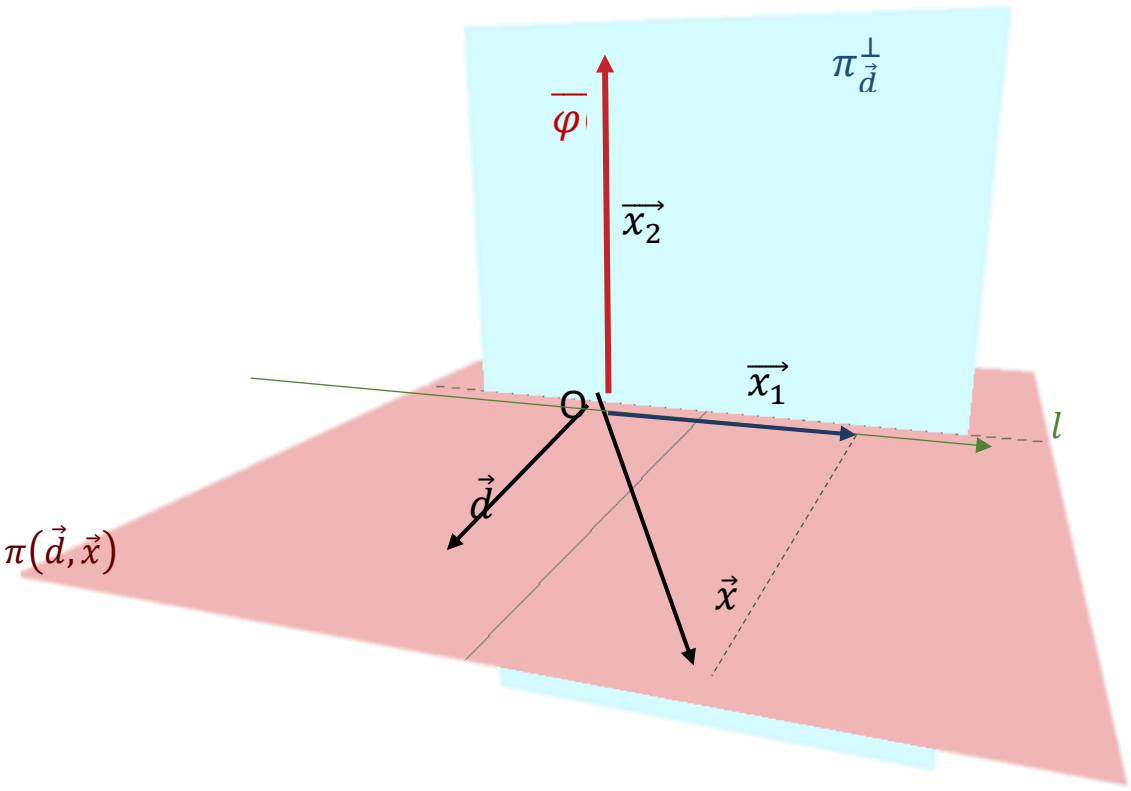
5. Пусть τ – оператор зеркального отражения относительно прямой $y = z, x = 0$. . Найдем образы базисных векторов и матрицу оператора τ.Это можно сделать, например, из геометрических соображений- прямая лежит в плоскости OYZ и является биссектрисой первого и третьего координатных углов:$\tau(\boldsymbol{i})=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=-\boldsymbol{i}$; $\tau(\boldsymbol{j})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{k}$; $\tau(\boldsymbol{k})=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{j}$. Те же самые образы базисных векторов можно получить, если воспользоваться формулой (6). В рассматриваемом примере в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Поэтому, $\tau(\boldsymbol{i})=2\frac{(\mathbf{i},\mathbf{l})}{|\mathbf{l}|^2}\boldsymbol{l}-\mathbf{i}=-\mathbf{i}$, $\tau(\boldsymbol{j})=\frac{2(\boldsymbol{j},\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|^2}-\mathbf{j}=\mathbf{l}-\mathbf{j}=\mathbf{k}$,

$\tau(\boldsymbol{k})=2\ \frac{(\mathbf{k},\mathbf{l})}{|\mathbf{l}|^2}\boldsymbol{l}\text{-}\mathbf{k}=\mathbf{l}\text{-}\mathbf{k}=\mathbf{j}.$. Таким образом, матрица оператора τ: $A_\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.Из геометрических соображений, а так же из задания оператора $\mathbf{s}_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{a})=-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ следует, что оператор τ обратим , причем обратный оператор совпадает с τ . Будучи обратимым оператор имеет нулевое ядро, а его образ - всё пространство $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{V}^3$ оператор φ векторного умножения на фиксированный вектор $\boldsymbol{d}$: $\varphi(\mathbf{x})=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}]=-[\boldsymbol{d},\boldsymbol{x}]$ (свойство антисимметрии векторного произведения) **.** Из свойства линейности векторного умножения следует, что φ - линейный оператор. При выводе этого важного свойства в курсе геометрии мы воспользовались следующим построением векторного произведения:

Векторы $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{x}$ определяют плоскость $\pi(\boldsymbol{d},\boldsymbol{x})$, проходящую через точку О. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку О и перпендикулярную вектору $\boldsymbol{d}$. Обозначим эту плоскость $\pi_{\boldsymbol{d}}^{\perp}$. Плоскости имеют общую точку и пересекаются (согласно аксиомам Евклидовой геометрии) по прямой l. Превратим эту прямую в числовую ось, выбрав в качестве начала отсчета точку О и произвольные (одно из двух возможных направлений).



Пусть угол между векторами **d** и **x** равен α, тогда угол между вектором **x** и осью l равен или $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ($\mathbf{d} \perp l$), или $= \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Пусть $\mathbf{x_1}$ – вектор-проекция вектора **x** на ось l, тогда $|\mathbf{x_1}| = |pr_l \mathbf{x}|$

Вектор $\mathbf{x_1} \in \pi_{\mathbf{d}}^{\perp}$ и одновременно $\mathbf{x_1} \in \pi(\mathbf{d}, \mathbf{x})$

Повернём его в плоскости $\pi_{\mathbf{d}}^{\perp}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, находящегося в конце вектора d. Полученный вектор обозначим через $\mathbf{x_2}$. Проверим, что $[\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}] = |\mathbf{d}| \mathbf{x_2}$ Для этого достаточно убедиться, что все три свойства векторного произведения векторов $\boldsymbol{d}$ и $\mathbf{x}$ выполняются для вектора $|\mathbf{d}| \mathbf{x_2}$. Действительно, $\big||\mathbf{d}| \mathbf{x_2}\big| = |\mathbf{d}||\mathbf{x_2}| = |\mathbf{d}||\mathbf{x_1}| = |\mathbf{d}| \left||\mathbf{x}| \cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)\right| = |\mathbf{d}||\mathbf{x}| \sin\alpha$; $\mathbf{x_2} \perp \mathbf{d}$, $\mathbf{x_2} \perp \mathbf{x_1}$, следовательно, $\mathbf{x_2} \perp \text{пл}(\boldsymbol{d}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{x_2} \perp \mathbf{x}$. Тройка векторов $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{d}$ имеет положительную ориентацию по построению вектора $\mathbf{x_2}$. При «круговой» перестановке векторов их ориентация сохраняется. Описанная конструкция векторного произведения показывает, что оператор векторного умножения есть композиция (произведение) трех линейных операторов: оператора проектирования вектора на ось l, оператора поворота на 90^0 вокруг оси вектора **d** и оператора умножения на число $|\boldsymbol{d}|$. Оператор умножения на число λ: φ(**x**)=λ**x** можно обозначить φ=λid. Это оператор подобия (гомотетии) с коэффициентом λ.

6. Обозначим через δ оператор векторного умножения на вектор $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и найдем матрицу A_δ этого линейного оператора в стандартном базисе. Следуя определению матрицы линейного оператора, последовательно вычисляем образы базисных векторов:

$$\delta(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta(\boldsymbol{j}) = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\delta(\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные векторы записываем в столбцы матрицы $A_\delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Можно вычислить $\det A_\delta$ и убедиться, что $\det A_\delta = 0$ и, следовательно, оператор δ необратим. Можно указать другую причину необатимости : $\delta(\boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}] = \mathbf{0}$,

причем $\boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}$, то есть отображение δ не является инъективным и его ядро отлично от нуля. Найдем ядро и образ данного оператора. Ядру принадлежат те и только те векторы $\boldsymbol{x}$, для которых $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}] = \mathbf{0}$. Последнее условие, как известно, равносильно тому, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны. Таким образом, ядро нашего линейного оператора – это совокупность всех векторов, коллинеарных вектору $\boldsymbol{d}$, т.е. это одномерное подпространство, являющееся линейной оболочкой вектора $\boldsymbol{d}$. $\mathrm{Ker}\delta = <\mathbf{d}>$. Для нахождения образа нашего линейного оператора, то есть совокупности всех векторов вида $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}]$, где вектор $\boldsymbol{x}$ пробегает всё пространство, заметим прежде всего, что все эти векторы перпендикулярны вектору $\boldsymbol{d}$ и, следовательно, лежат в плоскости, ему перпендикулярной и проходящей через начало координат. Так как сумма размерностей ядра и образа любого линейного оператора всегда равна размерности всего пространства, мы заключаем отсюда, что размерность образа в нашем случае должна быть равна двум, откуда вытекает, что образ оператора δ совпадает с указанной плоскостью. Так как нормальным к этой плоскости вектором будет вектор $\boldsymbol{d}$, то уравнение этой плоскости будет $2x + y - z = 0$.

§6. Пример решения Домашней работы 3 .

Напомним здания в Домашней работы по линейным операторам, относящиеся ко всем вариантам. Даны линейные операторы φ и ψ в пространстве V^3. Требуется

1. Найти матрицы операторов φ, ψ и их произведения $\varphi\cdot\psi$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
2. Найти ядро и образ операторов φ и ψ. В случае ненулевого ядра описать соответствующие линейные подпространства уравнениями в R^3.
3. Выяснить, существует ли обратный оператор для произведения $\varphi\cdot\psi$. Если да, то описать его геометрический смысл; если нет, то указать причину.

Обозначим матрицы данных операторов φ, ψ и оператора $\chi = \varphi\psi$ в стандартном базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ соответственно через A_φ , A_ψ и A_χ. Нам надо найти эти три матрицы. Как найти матрицы A_φ и A_ψ для типичных линейных операторов в пространстве V^3 мы описали в предыдущем параграфе, используя определение матрицы линейного оператора. Сразу отметим , что, зная эти матрицы, по свойству матрицы произведения двух линейных операторов можно найти матрицу A_χ: $A_\chi = A_\psi \cdot A_\varphi$.Таким образом, матрица A_χ легко вычисляется, если уже найдены матрицы A_φ и A_ψ. Чтобы выяснить, обратим ли оператор χ, можно воспользоваться любым критерием обратимости линейного оператора . Допустим, что $\det A_\chi \neq 0$, тогда у оператора χ существует обратный оператор , а так как

$\det A_\chi = \det (A_\psi A_\varphi) = \det A_\psi \cdot \det A_\varphi$,то $\det A_\varphi$ и $\det A_\psi$ также отличны от нуля. Отсюда, как легко видеть, вытекает, что операторы φ и ψ также обладают

обратными; при этом $\chi^{-1} = (\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\cdot\varphi^{-1}$,то есть, сначала выполняется оператор ψ^{-1}, а затем φ^{-1}. На этом пути можно дать геометрическое описание оператора χ^{-1}, если геометрическое описание операторов φ^{-1} и ψ^{-1} нам известно (обычно оно получается легко, если операторы φ и ψ действительно обратимы; см. вышеприведенные примеры).

Если же $\det A_\chi = 0$, то тогда, в силу вышеприведенного равенства $\det A_\chi = \det A_\psi \cdot \det A_\varphi$, хотя бы один из операторов φ и ψ не имеет обратного. Для указания причины необратимости оператора достаточно, следовательно, указать, какой из операторов φ и ψ необратим (может быть, что и оба). Необратимость же оператора вытекает из того, что он не является биективным. А это, в свою очередь, следует из того, что оператор имеет ненулевое ядро или его образ не совпадает со всем пространством (т.е. оператор не является инъективным или сюръективным). Поэтому в работе следует указать (и обосновать!), что, например, оператор ψ не является инъективным (или сюръективным) и тем самым необратим.

Примеры. Рассмотрим задачу об обратимости произведения двух операторов для некоторых операторов рассмотренных выше.

1.Найдем матрицу оператора $\chi = \varphi\psi$, где φ есть оператор поворота всего пространства на 45° вокруг оси OY (см. пример 1), а ψ – оператор проектирования на плоскость $x = y$ (см. пример 2). Матрицу оператора χ получим, перемножая матрицы операторов ψ и φ (именно в этом порядке!):

$$A_\chi = A_\psi \cdot A_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Оператор χ необратим. В качестве причины можно указать, например, на отсутствие сюръективности у оператора χ – образы всех векторов будут лежать в плоскости $x = y$, то есть, они не заполняют всего пространства. Или можно указать на вырожденность матрицы A_χ (в ней две одинаковые строки) .

2. Рассмотрим отображение, являющееся результатом последовательного выполнения операторов φ (поворот на 45° вокруг оси OY, (см. пример 1) и оператора σ (зеркальное отражение относительно плоскости $y = z$,

(см. пример 4). Это отображение есть произведение $\varphi\sigma$ оператора φ на оператор σ и, следовательно, само является линейным оператором. Его матрица $A_{\varphi\sigma} = A_\sigma \cdot A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Этот оператор обратим, так как является композицией обратимых операторов; обратным к нему будет оператор последовательного выполнения сначала зеркального отражения относительно нашей плоскости $x = y$ ($\sigma^{-1} = \sigma$), а затем поворота вокруг оси OY на угол 45° по часовой стрелке (если смотреть вдоль этой оси в направлении, противоположном стрелке; это оператор φ^{-1}). Аналогичным образом можно исследовать произведения любых двух операторов из рассмотренных выше .

§ 7. Упражнения.

1.Доказать, что линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

2.Описать все линейные операторы в R^1 и в C^1 . Указать их геометрический смысл.

3.Доказать, что всякое линейное подпространство является ядром некоторого линейного оператора. Однозначно ли определен этот оператор?

4. Доказать, что всякое линейное подпространство является образом некоторого линейного оператора.

5.Пусть ф- линейный оператор, определенный на линейном подпространстве L пространства R^n .Доказать, что существует бесконечно много линейных операторов в пространстве R^n совпадающих с ф на L.

6.Доказать, что образ линейного подпространства под действием линейного оператора также является линейным подпространством. Как связаны размерности этих двух подпространств?

7. ф – оператор умножения слева на матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в пространстве M_2 .

Найти его матрицу в базисе $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. ф – оператор умножения справа на матрицу A =$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ в пространстве M_2 . Найти его матрицу в базисе E_1 =$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, E_2 =$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, E_3 =$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$, E_4 =$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

9.ф – оператор транспонирования в пространстве M_2 . ф(A)=A^T. Доказать его линейность и найти его матрицу в базисе E_1 =$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, E_2 =$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, E_3 =$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$, E_4 =$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

10. Линейный оператор отображает базис пространства R^n снова в некоторый базис этого пространства. Будет ли оператор обратимым?

11.ф – оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ в пространстве R^2 .Каков его геометрический смысл?

12.ф – оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ в пространстве R^2 .Каков его геометрический смысл?

13.ф – оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ в пространстве R^2 .Каков его геометрический смысл?

14. A =$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора в базисе **i ,j** . Найти матрицу этого оператора в базисе **j ,i**.

15.Доказать, что множество линейных операторов в пространстве R^2 относительно операций сложения и умножения на число является линейным пространством. Найти его размерность и какой-нибудь базис.

16. Доказать, что в пространстве R^2 существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\mathbf{a_1}$=(1,1) , $\mathbf{a_2}$=(1,0) соответственно в векторы $\mathbf{b_1}$=(0,1) ,$\mathbf{b_2}$=(1, -1). Найти матрицу этого оператора в базисе **i,j**. Верно ли это утверждение для произвольного набора векторов $\mathbf{a_1, a_2, b_1, b_2}$?

17. Оператор ф отображает R^3 в R^3 по формуле (x_1 ,x_2 ,x_3) → (x_1 +3,x_2 -5, x_3). Найти ядро Kerф . Будет ли оно линейным подпространством? Как это согласуется с теорией?

18.Найти матрицу линейного оператора ф в базисе $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,….,$\mathbf{e_k}$,…..$\mathbf{e_n}$, где $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,….,$\mathbf{e_k}$ Є Kerф. Будут ли векторы ф(,$\mathbf{e_{k+1}}$).....ф(,$\mathbf{e_n}$) линейно зависимыми?

19. ϕ – оператор поворота на плоскости на угол α, ψ – симметрия относительно прямой y=0. Найти операторы ψϕ и ϕψ. (Описать их геометрически).

Глава 7. Канонический вид линейного оператора.

§1. Инвариантные подпространства. Собственные векторы.

Пусть φ – линейный оператор в пространстве V; $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ – некоторый фиксированный базис этого пространства, тогда, согласно формуле (1) из предыдущей главы, действие оператора - $\varphi(\boldsymbol{x}) = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, где A_φ − матрица оператора φ в данном базисе, а $\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ − столбец из координат вектора $\boldsymbol{x}$ в том же базисе.

Определение 1**.** Линейное подпространство $L \subseteq V$ называется инвариантным подпространством оператора φ, если из $\boldsymbol{x} \in L$ следует , что $\varphi(\boldsymbol{x}) \in L$.

Примеры.

1. $V = R^3$, φ – нулевой оператор, L – произвольное линейное подпространство V. Если $\boldsymbol{x} \in L$, то $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in L$. Следовательно, в этом случае любое линейное подпространство L инвариантно.

2. $V = R^3$, φ = id – тождественный оператор. В этом случае любое линейное подпространство L также инвариантно.

3. $V = R^3$, φ – оператор ортогонального проектирование на плоскость OXY. Опишем инвариантные подпространства этого оператора. Это- всё пространство R^3, нулевое подпространство $\{\boldsymbol{0}\}$, плоскость OXY, прямые, лежащие в плоскости OXY и проходящие через начало координат, ось OZ, а также плоскости, проходящие через ось OZ.

4. $V = R^2$, φ – оператор поворота на угол α. Если $\alpha \neq k\pi$, то нетривиальных (отличных от V и от $\{\boldsymbol{0}\}$) инвариантных подпространств нет. Если $\alpha = k\pi$, то все линейные подпространства в R^2 инвариантны.

5. Пусть φ – произвольный линейный оператор в пространстве V,

$L_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi$, $L_2 = \mathrm{Im}\ \varphi$. Тогда линейные подпространства L_1 и L_2 инвариантны (это вытекает из их определения − докажите!).

6. Пусть V – линейное пространство, в котором действует линейный оператор φ, а L_1 и L_2 – инвариантные подпространства оператора φ. Пусть

также $V = L_1 \oplus L_2$, тогда для любого вектора $\boldsymbol{v}$ из V имеем: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \in L_1$, $\boldsymbol{y} \in L_2$ и $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$. Выберем базис в пространстве V следующим образом: пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ – базис L_1, а $\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – базис L_2. Совокупность векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ будет базисом V. Действительно, каждый вектор $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} \in L_1$, а $\boldsymbol{y} \in L_2$, поэтому $\boldsymbol{v}=x_1e_1+\ldots+x_ke_k+x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$, то есть каждый вектор пространства V линейно выражается через векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы, так как из равенства $x_1\mathbf{e_1}+\ldots+x_k\mathbf{e_k}+x_{k+1}\mathbf{e_{k+1}}+\ldots+x_n\mathbf{e_n}=\mathbf{0}$ следует, что $x_1\mathbf{e_1}+\ldots+x_k\mathbf{e_k}=-x_{k+1}\mathbf{e_{k+1}}-\ldots-x_n\mathbf{e_n} \in L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.Из линейной независимости систем $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ следует, что все коэффициенты нулевые.

Найдем в этом базисе матрицу A_φ нашего оператора φ. Так как L_1 и L_2 инвариантны, то $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_k) \in L_1$, а $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n) \in L_2$, и, следовательно,

$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_k^1\boldsymbol{e}_k + 0\cdot\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e}_n,$

$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_1^2\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_k^2\boldsymbol{e}_k + 0\cdot\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e}_n$ .....

$\varphi(\boldsymbol{e}_k) = a_1^k\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_k^k\boldsymbol{e}_k + 0\cdot\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e}_n,$

$\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) = 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e}_k + a_{k+1}^{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + a_n^{k+1}\boldsymbol{e}_n,$

$\ldots$

$\varphi(\boldsymbol{e}_n) = 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{e}_k + a_{k+1}^n\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + a_n^n\boldsymbol{e}_n.$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_k^1 & \ldots & a_k^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \ldots & a_{k+1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n^{k+1} & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\varphi^1 & 0 \\ 0 & A_\varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь A_φ^1 – матрица оператора φ, действующего в пространстве L_1 в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, а A_φ^2 – матрица оператора φ, действующего в пространстве L_2 в базисе $\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Аналогично, если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ и $L_1, L_2, \ldots, L_k$ – инвариантные подпространства оператора φ, то матрица оператора в соответствующем образом построенном базисе (объединении рассматривамых базисов пространств $L_1, \ldots, L_k$) выглядит следующем образом:

$$A\varphi = \begin{pmatrix} A_\varphi^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_\varphi^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & A_\varphi^k \end{pmatrix}$$

Здесь каждая матрица A_φ^i есть матрица оператора φ , действующего в пространстве L_i в рассматриваемом базисе этого подпространства. Этот пример показывает, что наличие инвариантных подпространств позволяет упростить матрицу оператора за счет выбора подходящего базиса.

Рассмотрим одномерное линейное подпространство L, инвариантное относительно оператора φ, и его базисный вектор $\boldsymbol{e}$, $L = \langle\boldsymbol{e}\rangle$. Так как $\varphi(\boldsymbol{e}) \in L$,

то $\varphi(\boldsymbol{e}) = \lambda\boldsymbol{e}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in L$ и, следовательно, $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{e}$ для некоторого скаляра (числа из основного поля) α; тогда $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\alpha\boldsymbol{e}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{e}) = \lambda\cdot\alpha\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{x}$.Значит, все векторы из L умножаются на одно и то же число λ, и оператор φ действует в L как гомотетия с коэффициентом λ.

Если, в частности, все $<\boldsymbol{e}_k>$ (линейные оболочки базисных векторов пространства V) суть инвариантные подпространства оператора φ, то $V = <\boldsymbol{e}_1> \oplus <\boldsymbol{e}_2> \oplus \ldots \oplus <\boldsymbol{e}_n>$ и матрица A_φ в рассматриваемом базисе - диагональна:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Определение2. Ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ называется собственным вектором оператора φ, если $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Число λ из рассматриваемого поля называется собственным значением оператора φ, соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{x}$.

Если $\boldsymbol{x}$ − собственный вектор оператора φ, то $<\boldsymbol{x}>$ − одномерное инвариантное подпространство и оператор в нем действует как умножение на число λ − собственное значение.

Теорема 1. Множество всех собственных векторов оператора φ, соответствующих одному собственному значению λ, если присоединить к нему нулевой вектор $\mathbf{0}$, является линейным подпространством, которое называется собственным подпространством оператора φ и обозначается V_λ.

Доказательство. V_λ содержит нулевой вектор по определению (вектор $\mathbf{0}$ присоединен). Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_\lambda$. Рассмотрим вектор $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ и покажем, что он является собственным вектором оператора φ с тем же самым собственным значением λ (либо равен $\mathbf{0}$) и тем самым принадлежит V_λ. Действительно, $\varphi(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) + \beta\varphi(\boldsymbol{y}) = \alpha\lambda\boldsymbol{x} + \beta\lambda\boldsymbol{y} = \lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})$, то есть вектор $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ либо собственный вектор с тем же собственным значением, если он не нулевой, либо нулевой и , следовательно, в любом случае принадлежит V_λ.

Теорема 2. Собственные векторы оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. (Методом математической индукции). Пусть k − число собственных векторов в системе. При $k = 1$ собственный вектор один $\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}_1$ − линейно независимая система из одного вектора. Пусть для системы из k векторов утверждение теоремы верно. Выведем из этого предположения, что теорема верна для системы из $k + 1$ собственного вектора. Пусть даны собственные векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ с различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ и пусть выполняется соотношение

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Для проверки линейной независимости системы требуется доказать, что все $\alpha_i = 0$. Из (1) следует, что $\varphi(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Из линейности оператора φ получаем $\alpha_1\varphi(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2\varphi(\boldsymbol{x}_2) + \ldots + \alpha_k\varphi(\boldsymbol{x}_k) + \alpha_{k+1}\varphi(\boldsymbol{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$;

$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0}$. (2)

Умножим обе части равенства (1) на λ_{k+1}:

$\alpha_1\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0}$. (3)

Вычитаем из равенства (3) равенство (2):

$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$.

Так как $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_k$ − система k собственных векторов с различными собственными значениями λ_1, λ_2, …, λ_k, то по предположению индукции эти векторы линейно независимы и, следовательно, все коэффициенты в последнем равенстве равны нулю. Таи образом при $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняются соотношения $\alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = \boldsymbol{0}$, но тогда $\alpha_i = 0$, ибо $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$. Подставив эти $\alpha_i = 0$ в равенство (1), получаем $\alpha_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0}$. Так как $\boldsymbol{x}_{k+1}$ − собственный вектор и, следовательно, ненулевой, то $\alpha_{k+1} = 0$. Теорема доказана.

§2. Метод нахождения собственных векторов линейного оператора.

Рассмотрим базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства V и запишем вектор $\boldsymbol{x}$ и матрицу оператора φ в этом базисе:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, A_\varphi = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как действие оператора φ на вектор $\boldsymbol{x}$ описывается с помощью матрицы A_φ следующим образом:

$\varphi(\boldsymbol{x}) = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, то для собственного вектора $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ оператора φ, соответствующего собственному значению λ, имеем соотношение:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Умножая матрицу A_φ на вектор $\boldsymbol{x}$, получаем:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \ \ldots \ + a_1^n x_n = \lambda x_1; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_n^1 x_1 + \ \ldots \ + a_n^n x_n = \lambda x_n. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) − это система линейных уравнений для нахождения собственных векторов оператора φ, соответствующих собственному значению λ. После приведения подобных членов получаем однородную систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x_1 + \ \ldots \ + a_1^n x_n = 0; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_n^1 x_1 + \ \ldots \ + (a_n^n - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Матрица этой системы квадратная и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1-\lambda & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = A_\varphi - \lambda E.$$

Элементы этой матрицы зависят от λ. Так как по определению собственный вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, то нас интересуют ненулевые решения системы (6).

Если $\det(A_\varphi - \lambda E) \neq 0$, то система (6) по теореме Крамера имеет единственное решение − нулевой вектор. Если же $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$, то $r = \operatorname{rang}(A_\varphi - \lambda E) < n$ и размерность подпространства решений системы (6) равна $n - r > 0$. В этом случае имеются ненулевые решения системы (6) − собственные векторы, соответствующие собственному значению λ. Линейное подпространство решений системы (6) оказывается в этом случае собственным подпространством V_λ линейного оператора φ. Оно состоит из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ, дополненных вектором **0**, и, следовательно, является инвариантным подпространством оператора φ.

Рассмотрим теперь определитель матрицы $A_\varphi - \lambda E$. Это число, которое зависит от λ, то есть $\det(A_\varphi - \lambda E)$ является функцией от λ. Используя определение детерминанта матрицы, легко понять, что $\det(A_\varphi - \lambda E)$ является многочленом степени n.

Действительно, при $n = 1$ $\det(a_1^1 - \lambda)$ − многочлен первой степени. Используя формулу $\det(A_\varphi - \lambda E) = (a_1^1 - \lambda) M_1^1 - a_1^2 M_1^2 + \dots + (-1)^{n+1} a_1^n M_1^n$ и рассуждая по индукции, получаем, что $P_{A_\varphi}(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E) = (-1)^n\lambda^n + \dots + \det A_\varphi$. (Свободный член многочлена $P_{A_\varphi}(\lambda)$ равен $P_{A_\varphi}(0) = \det A_\varphi$.)

Определение 3. Многочлен $P_{A_\varphi}(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом матрицы A_φ.

Так как собственные векторы существуют только для тех λ, для которых $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$, то собственные значения линейного оператора являются теми корнями уравнения $P_{A_\varphi}(\lambda) = 0$, называемого характеристическим уравнением матрицы A_φ, которые принадлежат полю P (R или **C**). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ − все корни характеристического уравнения (в случае поля **R** мы рассматриваем и комплексные корни!), $k_1, k_2, \dots, k_s$ − их кратности. Спектр $\mathbf{S} = \{\lambda_1^{[k_1]}, \lambda_2^{[k_2]}, \dots, \lambda_s^{[k_s]}\}$ характеристического многочлена $P_{A_\varphi}(\lambda)$ называется спектром матрицы A_φ. Спектр матрицы A_φ - множество корней характеристического уравнения с указанием их кратностей. Заметим, что $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Таким образом, чтобы найти собственные векторы оператора φ, нужно найти его матрицу в некотором базисе, записать характеристический многочлен этой матрицы и найти его корни. Если оператор φ действует в линейном пространстве V над полем **C**, то все корни будут собственными значениями оператора φ. Соответствующие собственные векторы находятся из системы (6). Следовательно, если оператор φ действует в пространстве над

полем **C**, то у него есть собственные векторы. Если оператор φ действует в линейном пространстве над полем R, то только вещественным корням характеристического многочлена соответствуют собственные векторы оператора. Следовательно, оператор, действующий в линейном пространстве над полем R, может вообще не иметь собственных векторов.

Примеры**.**

1. φ − оператор поворота на угол α в R^2, $\alpha \neq k\pi$;

$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ − матрица φ в базисе ***i***, ***j***; Характеристический многочлен матрицы $P_{A_\varphi}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1=0$ – квадратное уравнение, причем его дискриминант $D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) < 0$. Следовательно у характеристического уравнения вещественных корней нет, а, следовательно, нет и собственных векторов. Найдем спектр матрицы поворота A_φ .Корни характеристического уравнения- комплексно сопряженные числа $\lambda_1 = \cos\alpha+i\sin\alpha$, $\lambda_2 = \cos\alpha-i\sin\alpha$. $S = \{e^{i\alpha[1]}, e^{-i\alpha[1]}\}$ − спектр матрицы A_φ.

Отсутствие собственных векторов у оператора поворота вытекает также и из геометрического смысла собственного вектора. Вектор **x-** собственный вектор оператора φ , если его образ φ**(*x*)** ему коллинеарен. При повороте на угол $\alpha \neq k\pi$ φ(***x***) не коллинеарен ***x***, если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

2. φ – оператор ортогонального проектирования на плоскость *OXY* в пространстве R^3.

$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ − матрица оператора φ в базисе ***i***, ***j***, ***k***; Ее характеристический многочлен $P_{A_\varphi}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$; $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ − корни характеристического уравнения $-\lambda(1-\lambda)^2 = 0$; $S = \{0^{[1]}, 1^{[2]}\}$ − спектр матрицы A_φ. Все корни вещественны, и для каждого можно найти собственное подпространство. Пусть $\lambda_1 = 0$. Рассмотрим соответствующую систему (6) $\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x_1 + \ \dots \ + a_1^n x_n = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n^1 x_1 + \ \dots \ + (a_n^n - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$ для $\lambda=0$.

Матрица этой системы совпадает с $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и имеет главный

ступенчатый вид. Решения соответствующей системы $\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 0 \end{cases}$ − векторы вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{k},$$

то есть собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, − ненулевые векторы, коллинеарные вектору $\boldsymbol{k}$. Собственное подпространство V_0 − ось OZ; $\dim V_0 = 1$. Для второго собственного значения $\lambda_2 = 1$ собственные векторы также находим из системы (3) для $\lambda=1$, матрица которой $A_\varphi - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Система (6) имеет вид: $x_3 = 0$.

Отсутствующие неизвестные x_1, x_2 − свободные, а общее решение записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j}.$$

Собственное подпространство V_1 − плоскость OXY; $\dim V_1 = 2$.

Пусть V − n-мерное линейное пространство над полем P (R или C), φ − линейный оператор и характеристический многочлен $P_{A_\varphi}(\lambda)$ имеет n различных корней в поле P. В этом случае спектр матрицы A_φ имеет вид: $S = \{ \lambda_1^{[1]}, \lambda_2^{[1]}, \ldots, \lambda_n^{[1]} \}$. Пусть $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_n}$ − соответствующие собственные подпространства оператора φ и $\boldsymbol{e}_1 \in V_{\lambda_1}, \boldsymbol{e}_2 \in V_{\lambda_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in V_{\lambda_n}$ − собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям; тогда по теореме 2 (§7) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства V, а все подпространства V_{λ_i} одномерны. Найдем матрицу B_φ оператора φ в этом новом базисе.

$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{e}_n$;

$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{e}_n$;

…

$\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \lambda_n \boldsymbol{e}_n = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$.

Получаем $B_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Матрица B_φ диагональная, и на диагонали стоят соответствующие собственные значения. Вообще, если в пространстве V удается найти базис из собственных векторов, не обязательно соответствующих различным собственным значениям, то матрица оператора в этом базисе будет диагональной, а на диагонали будут стоять соответствующие собственные значения оператора φ.

§3. Преобразование координат.

Рассмотрим линейный оператор φ в пространстве V. Координаты вектора $\mathbf{x} \in V$ зависят от выбора рассматриваемого базиса. Согласно определению 2 предыдущей главы, матрица A_φ оператора также зависит от выбора базиса в линейном пространстве. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ − различные базисы пространства V. Векторы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, как и все остальные векторы пространства V, имеют свои координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и записываются как линейные комбинации базисных векторов:

$\boldsymbol{f}_1 = p_1^1 \boldsymbol{e}_1 + p_2^1 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_n^1 \boldsymbol{e}_n;$

$\boldsymbol{f}_2 = p_1^2 \boldsymbol{e}_1 + p_2^2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_n^2 \boldsymbol{e}_n;$

…

$\boldsymbol{f}_n = p_1^n \boldsymbol{e}_1 + p_2^n \boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_n^n \boldsymbol{e}_n.$

Определение 4. Матрица $P = \begin{pmatrix} p_1^1 & \ldots & p_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n^1 & \ldots & p_n^n \end{pmatrix}$, в столбцах которой стоят координаты векторов второго базиса в первом базисе называется матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$.

Столбцы матрицы P − векторы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, которые являются линейно независимыми, так как образуют базис. Следовательно, rk $P = n$, det $P \neq 0$ и существует обратная матрица P^{-1}.

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ пространства V и разложим его по базисам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{f}_i$. Если $P = (p_i^j)$ − матрица перехода от первого базиса ко второму, то $\boldsymbol{f}_i = \sum_{k=1}^{n} p_k^i \boldsymbol{e}_k$.

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{k=1}^{n} p_k^i \boldsymbol{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i' p_k^i \boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i' p_k^i \boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' p_k^i \right) \boldsymbol{e}_k.$$

Так как координаты вектора в данном базисе определены однозначно, то

$x_1 = p_1^1 x_1' + p_1^2 x_2' + \ldots + p_1^n x_n';$

$x_2 = p_2^1 x_1' + p_2^2 x_2' + \ldots + p_2^n x_n';$

…

$x_n = p_n^1 x_1' + p_n^2 x_2' + \ldots + p_n^n x_n'.$

В матричном виде эти соотношения записываются как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}; \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{P^{-1}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) называются формулами преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

Заметим, что если для координат произвольного вектора **x** в базисах $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ и некоторой обратимой матрицы Q выполняется соотношение (7) , то матрица Q – матрица перехода от первого базиса ко второму. Действительно, возьмем $\mathbf{x}= \boldsymbol{f}_i = \sum_{k=1}^{n} p_k^i \boldsymbol{e}_k$, тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^i \\ \dots \\ p_n^i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p_1^i \\ \dots \\ p_n^i \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^i \\ \dots \\ q_n^i \end{pmatrix}$. Из этого замечания вытекают следующие свойства матриц перехода их одного базиса к другому.

1.Если P- матрица перехода от первого базиса ко второму, то P^{-1}- матрица перехода от второго базиса к первому.

2. Если P_1-матрица перехода от первого базиса ко второму, P_2 - матрица перехода от второго базиса к третьему , то P_1P_2 - матрица перехода от первого базиса к третьему. Действительно , если $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора **x** в первом базисе, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора **x** во втором базисе, $\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора **x** в третьем базисе, то

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ =P$_1$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$= P$_2$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ и, следовательно. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ = P$_1$ P$_2$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть первый базис $\boldsymbol{e}_1$=$\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$,…, $\boldsymbol{e}_n$=$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ - стандартный, а $\boldsymbol{f}_1$=$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ \dots \\ f_n^1 \end{pmatrix}$, …, $\boldsymbol{f}_n$ =$\begin{pmatrix} f_1^n \\ \dots \\ f_n^n \end{pmatrix}$- второй базис , тогда матрица перехода от первого базиса ко второму P=$\begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & & f_n^n \end{pmatrix}$.

Рассмотрим линейный оператор φ, и пусть A_φ и $A_{\varphi'}$ − матрицы этого оператора в первом и во втором базисах. Пусть $\boldsymbol{x}$ − произвольный вектор пространства V и $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$; тогда в первом и во втором базисах можно записать:

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix} = A_\varphi' \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Используя формулу (7), первое из равенств запишем в виде: $P \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix} = A_\varphi P \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$,или, так как матрица P обратима, в виде:

$\begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix} = P^{-1} A_\varphi P \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Отсюда получаем $P^{-1} A_\varphi P \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = A_\varphi' \begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{P^{-1} A_\varphi P} = A_\varphi'. \qquad (9)$$

Пример. Найти координаты вектора **x**=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и матрицу оператора ф умножения на матрицу A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{f}_1$ =$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2$. =$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Мы предполагаем, что координаты векторов заданы в стандартном базисе **i,j.** Матрица оператора ф в этом базисе $A_ф$ =A. В предыдущем примере мы вычислили матрицу перехода из стандартного базиса в любой другой. В нашем случае матрица перехода в базис $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ будет

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Для того, чтобы воспользоваться формулами (8) и (9) найдем матрицу P^{-1}. Воспользуемся формулой обратной матрицы . detP=3

$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Координаты вектора **x** в базисе $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ -

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу оператора ф в базисе

$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$. $A'_{\varphi} = P^{-1}A_{\varphi}P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$.

§4. Подобные матрицы.

Определение 5**.** Две матрицы A и B называются подобными ($A \sim B$), если существует невырожденная матрица P такая, что $B = P^{-1}AP$.

Это определение задает на множестве квадратных матриц порядка n бинарное отношение.

Определение 6. Пусть X – произвольное множество, X*X -множество пар элементов (x, y), где $x, y \in X$, тогда бинарным отношением на множестве X называется подмножество R множества $X*X$.

Примеры.

1. $X = \mathbb{R}$ - множество действительных чисел,
   Подмножество R в $\mathbb{R}*\mathbb{R}$ — это все пары (x, x), где $x \in \mathbb{R}$. В этом случае отношение R можно назвать отношением равенства.
2. $X = \mathbb{N}$- множество натуральных чисел. Подмножество $R \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ и состоит из пар натуральных чисел (m, n) таких, что m делится на n. Такое отношение R можно назвать отношением делимости.
3. X= M_n-множество квадратных матриц порядка n, $R \in M_n * M_n$ и состоит из пар подобных матриц. R- отношение подобия матриц.

Отношение R на множестве X называется рефлексивным**,** если $(x, x) \in R$, $\forall x \in X$. Отношение равенства и отношение делимости рефлексивны. Отношение подобия матриц- рефлексивно. Действительно, $A \sim A$, так как $A = EAE$ ($E^{-1} = E$).

Отношение R называется симметричным**,** если из $(x, y) \in R$ следует, что $(y, x) \in R$. Отношение может не быть симметричным. Например, отношение делимости не симметричное. Однако, отношение подобия матриц- симметричное. Если $A \sim B$, то $B \sim A$. Действительно, из $B = P^{-1}AP$ следует, что $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.

Отношение R называется транзитивным, если из $(x, y) \in R$ и $(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \in R$ следует, что $(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in R$. Например, отношение делимости транзитивно а отношения знакомства или соседства нет. Отношение подобия матриц-транзитивно. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$. Действительно, $B = P_1^{-1}AP_1$, $C = P_2^{-1}BP_2$; следовательно, $C = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}AP_1P_2$. Заметим, что $(P_1P_2)^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$, т.к. $P_1P_2 \cdot P_2^{-1}P_1^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}P_1P_2 = E$.

Определение 7. Отношение называется отношением эквивалентности**,** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примером отношения эквивалентности является отношение равенства на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, а также отношение подобия матриц.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности, тогда $\forall$x определяется множество $[\mathrm{x}] = \{\mathrm{y}, (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}\}$ -класс элементов эквивалентных x .

Теорема 3**.** Если R – отношение эквивалентности, то множество X разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, то есть либо $[\mathrm{x}] \cap [\mathrm{y}] = \emptyset$, либо $[\mathrm{x}] = [\mathrm{y}]$.

Доказательство. В силу рефлексивности каждый элемент x принадлежит своему классу эквивалентности, $\mathrm{x} \in [\mathrm{x}]$. Если $\mathrm{y} \in [x]$, то (x,y) ∈ R. Проверим, что $[y] \in [x]$. Пусть $\mathrm{z} \in [\mathrm{y}]$, т.е. $(y, z) \in \mathrm{R}$, но из $(x, y) \in \mathrm{R}$ и $(y,z) \in \mathrm{R}$ в силу транзитивности следует , что $(x,z) \in \mathrm{R}$, то есть $\mathrm{z} \in [\mathrm{x}]$. Обратное включение $[x] \in [y]$ вытекает из симметричности отношения R .

Определение 8. Множество классов эквивалентности на которые разбивается множество X называется фактор множеством множества X по отношению R и обозначается $X/_R$.

Из того, что подобие является отношением эквивалентности и из теоремы 7 следует, что множество всех квадратных матриц порядка n разбивается на непересекающиеся классы подобных матриц. Среди этих классов есть такие, которые состоят только из одной матрицы. Например, классы матриц, подобных матрице E или матрице 0. (Найдите все такие классы!)

Из формулы (9) следует, что матрицы линейного оператора φ в различных базисах подобны. Верно и обратное. Пусть $B = P^{-1}AP$, т.е. $A \sim B$. Рассмотрим оператор φ в пространстве R^n, действующий следующим образом: $\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Это- оператор умножения на матрицу A.

Матрица A_φ этого оператора в стандартном базисе совпадает с матрицей A. Рассмотрим столбцы матрицы P. Это n векторов, записанных в координатном виде в стандартном базисе, причем эти n векторов линейно независимы, так как существует P^{-1}. Рассмотрим новый базис $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n$, составленный из столбцов матрицы P. Матрица перехода от стандартного базиса к базису $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n$ совпадает с матрицей P, и, следовательно, по формуле (9) $A'_\varphi = = P^{-1}A_\varphi P = P^{-1}AP = B$, то есть подобные матрицы суть матрицы одного оператора в различных базисах. Итак, имеется взаимно однозначное соответствие между линейными операторами, действующими в пространстве V (dim $V = n$), и классами подобных матриц порядка n. Можно сказать, что множество всех линейных операторов является фактор множеством множества матриц порядка n по отношению подобия.

Определим некоторые инварианты подобных матриц.

Теорема 4**.** Характеристические многочлены подобных матриц равны.

Доказательство. Рассмотрим характеристические многочлены: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E)$. Нам дано, что $A \sim B$, то ест $B = C^{-1}AC$. $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda E)C) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det C = \det(A - \lambda E) = P_A(\lambda)$. Таким образом коэффициенты характеристического многочлена матрицы, которые выражаются через элементы этой матрицы, являются инвариантами .

Следствие. Спектры подобных матриц совпадают.

Из теоремы 4 следует, что можно ввести понятия характеристического многочлена $P_\phi(\lambda)$ оператора φ , спектра S_ϕ оператора φ, вычисляя их по матрице A_φ, взятой в произвольном базисе пространства V.

Важной геометрической характеристикой линейного оператора является размерность пространства Im φ. Если A_φ - матрица оператора в некотором базисе, то dim Im φ =rk A_φ и , следовательно, ранги подобных матриц совпадают.

§ 5. Диагонализируемый линейный оператор.

Определение 9. Оператор φ называется диагонализируемым**,** если существует базис, в котором его матрица диагональная.

Если A_φ − матрица такого оператора в произвольном базисе, то она подобна матрице $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $A_\varphi \sim D$.

Как по матрице A_φ узнать, диагонализируем ли оператор φ? Мы уже знаем, что в некоторых случаях, а именно, если спектр оператора $S_\phi = \{\lambda_1^{[1]}, \lambda_2^{[1]}, \dots, \lambda_n^{[1]}\}$,и все корни характеристического уравнения лежат в рассматриваемом поле, то оператор диагонализируем.

Если оператор диагонализируем, а характеристические многочлены подобных матриц , как следует из теоремы 4, равны, то

$$P_\phi(\lambda) = P_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n). \qquad (10)$$

Мы видим, что характеристический многочлен диагонализируемого оператора разлагается на линейные множители в рассматриваемом поле,

причем в последнем выражении возможно повторение сомножителей. Для поля **C** это условие, как известно, выполняется всегда. Для поля **R** оно означает, что все корни характеристического многочлена являются действительными числами, причем равными тем самым λ_i, которые стоят на диагонали матрицы D. Заметим, однако, что условие принадлежности всех корней характеристического уравнения рассматриваемому полю еще не является достаточным для диагонализируемости оператора. Рассмотрим, например, матрицу порядка n:

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

называемую жордановой клеткой, и оператор φ умножения на эту матрицу в пространстве $\mathbf{R}^n$. Характеристический многочлен

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^n,$$

имеет один корень α кратности n, и, следовательно, спектр оператора φ имеет вид $S_\varphi = \{\alpha^{[n]}\}$. Если бы матрица $J_n(\alpha)$ была подобна диагональной

матрице D, то ее вид должен был бы быть:

$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$, так как спектры подобных матриц совпадают, и, следовательно, оператор φ был бы гомотетией с коэффициентом α, что неверно, так как умножение на матрицу $J_n(\alpha)$ переводит вектор $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ в вектор $\boldsymbol{y} = J_n(\alpha)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha x_2 + x_3 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Теорема 5**.** Оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются два условия.

1. Характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители в рассматриваемом поле.

2. Размерность каждого собственного подпространства равна кратности соответствующего корня характеристического многочлена.

Доказательство.

Необходимость. Пусть оператор φ- диагонализируем, и пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – базис, в котором $A_\varphi = D$, тогда этот базис состоит из собственных векторов оператора φ. Действительно, пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – базис, в котором $A_\varphi = D$; тогда векторы базиса можно записать в координатном виде : $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 на i-м

месте) и найти их образы $\phi(\boldsymbol{e}_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \boldsymbol{e}_i.$

Таким образом, числа, стоящие на диагонали матрицы D - собственные значения оператора φ. Формулу (10) можно записать в виде: $P_\phi(\lambda) =$

$(-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k1}\dots(\lambda - \lambda_s)^{ks}$, где $\lambda_1 \dots \lambda_s$- различные числа, стоящие на диагонали матрицы D. Они являются корнями характеристического многочлена, а $k_1,\dots k_s$-кратности соответствующих корней. Найдем размерности собственных подпространств $V_{\lambda i}$. Собственное подпространство $V_{\lambda i}$ -подпространство решений однородной системы с матрицей $A_\varphi - \lambda_i E$, следовательно размерность подпространства $\dim V_{\lambda i} = n - rk(A_\varphi - \lambda_i E)$. В случае $A_\varphi = D$, матрица $D - \lambda_i E$ – диагональная, причем на месте λ_i на диагонале стоят 0, а остальные диагональные элементы имеют вид $\lambda_j - \lambda_i$ и отличны от нуля. Ранг такой матрицы равен числу отличных от нуля элементов на диагонали(проверьте) и равен $n - k_i$. Следовательно $\dim V_{\lambda i} = k_i$.

Достаточность. Пусть характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители в рассматриваемом поле, $P_\phi(\lambda) =$

$(-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k1}\dots(\lambda - \lambda_s)^{ks}$, где $\lambda_1 \dots \lambda_s$- различные корни характеристического многочлена, а $k_1,\dots k_s$-кратности соответствующих корней, причем $k_1+\dots+k_s = n$. Если размерности собственных подпространств $V_{\lambda i} = k_i$, то внутри каждого собственного подпространства можно найти k_i линейно независимых собственных векторов $\mathbf{e}_1^i, \dots, \boldsymbol{e}_{ki}^i$ соответствующих собственному значению λ_i . Соберем эти векторы в систему $\mathbf{e}_1^1, \dots, \mathbf{e}_{k1}^1, \dots, \mathbf{e}_1^s, \dots, \mathbf{e}_{ks}^s$. В системе $k_1+\dots+k_s = n$ векторов. Докажем линейную независимость этой системы, для чего рассмотрим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее к **0.**

$\alpha_1^1 \mathbf{e_1^1} + \dots + \alpha_{k1}^1 \mathbf{e}_{k1}^1 + \dots + \alpha_1^s \mathbf{e}_1^s + \dots + \alpha_{ks}^s \mathbf{e}_{ks}^s = \mathbf{0}$. Сгруппируем векторы следующим образом: $(\alpha_1^1 \mathbf{e_1^1} + \dots + \alpha_{k1}^1 \mathbf{e}_{k1}^1) + \dots + (\alpha_1^s \mathbf{e}_1^s + \dots + \alpha_{ks}^s \mathbf{e}_{ks}^s) = \mathbf{0}$. В каждой скобке находиться вектор из собственного подпространства, следовательно ,это либо собственный вектор оператора , либо вектор **0,** добавленный к собственным векторам. Но векторы в скобках не можут быть ненулевым, ибо в противном случае мы получим нетривиальную линейную комбинацию собственных векторов оператора φ, отвечающих различным собственным значениям равную **0.** Но это невозможно, так как согласно теореме 2, такие векторы

линейно независимы. Итак, в каждой скобке должен быть нулевой вектор. Но линейная комбинация базисных векторов равно **0** только, если все коэффициенты α_i^j равны нулю. Из этого следует, что система $\mathbf{e}_1^1$, …, $\mathbf{e}_{k1}^1$,…, $\mathbf{e}_1^s$, …, $\mathbf{e}_{ks}^s$ линейно независима и образует базис линейного пространства. Этот базис состоит из собственных векторов, матрица оператора в котором – диагональная.

Пример**.** Рассмотрим снова оператор φ умножения на жорданову клетку (11) и найдем собственные векторы этого оператора φ. Единственное собственное значение оператора φ − число α. Собственное подпространство находим из решения системы (6). В рассматриваемом случае система принимает вид: $\begin{cases} x_2 = 0; \\ \dots \\ x_n = 0, \end{cases}$, в которой x_1 − свободное неизвестное. Пространство $V_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, dim V_α = 1, и собственных векторов не хватает, чтобы составить из них базис пространства $\mathbf{R}^n$. Второе условие теоремы о диагонализируемом операторе не выполняется, так как кратность корня α равна n, а dim V_α = 1 (мы предполагаем, что n > 1).

§6. Жорданова нормальная форма.

Определение 10. Матрица $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_к \end{pmatrix}$, где $A_1, A_2, .., A_к$ – квадратные матрицы порядка $n_1, n_2, \dots, n_k$, причем $n_1+n_2+\dots+n_k = n$, где n- порядок матрицы А называется клеточно- диагональной .

Клеточно-диагональные матрицы А и В называются матрицами одной структуры, если у них одинаковые порядки n_i матриц A_i и B_i ,i=1,2,..,k.

Для клеточно- диагональных матриц справедливы следующие утверждения.

Теорема 6. $\det A = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_k$.

Теорема 7**.** $rkA = rkA_1 + rkA_2 + \dots + rkA_k$.

Теорема 8**.** Если А и В – клеточно- диагональные матрицы одной структуры, то их сумма С=А +В –клеточно- диагональная матрица той же

структуры и $C_i=A_i+B_i$.

Теорема 9**.** Если A и B – клеточно- диагональные матрицы одной структуры, то их произведение C=A B –клеточно- диагональная матрица той же структуры и $C_i=A_iB_i$.

Определение 11**.** Клеточно-диагональная матрица называется жордановой и обозначается через J, если ее клетки A_i –жордановы клетки.

$$A_i = J_{ni}(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_i & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & O & \dots & \alpha_i \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} Jn_1(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Jn_2(\alpha_2) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & O & \dots & Jn_k(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

Заметим, что числа α_i , находящиеся в жордановых клетках не обязательно различны.

Теорема 10. (О жордановой нормальной форме). Пусть ф- линейный оператор в линейном пространстве V над полем P и пусть все корни характеристического многочлена оператора принадлежат рассматриваемому полю P, тогда в линейном пространстве V существует базис (называемый жордановым), в котором матрица оператора жорданова .

(Без доказательства).

Таким образом, при выполнении условий теоремы 10 матрица оператора A_φ подобна жордановой , $A_\varphi \sim J$, $A_\varphi = P^{-1}JP$. Матрица J в этом случае называется жордановой нормальной формой оператора ф. Если ф линейный оператор в пространстве V над полем C , то у него существует жорданова нормальная форма. Матрица J определена однозначно с точностью до порядка клеток на диагонали. Существует алгоритм (довольно сложный) нахождения жорданова базиса по матрице A_φ .Однако , вид жордановой нормальной формы оператора можно найти без поиска жорданова базиса. Рассмотрим характеристический многочлен оператора ф. $P_\phi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\kappa 1}\dots(\lambda - \lambda_s)^{ks}$, где $\lambda_1 \dots \lambda_s$- различные корни характеристического многочлена, а $k_1,\dots k_s$- кратности соответствующих корней, причем $k_1+\dots+k_s = n$, и $\lambda_1,..,\lambda_s$ принадлежат рассматриваемому полю P. В этом случае $A_\varphi \sim J$ и матрица J имеет тот же характеристический многочлен и тот же спектр. Вычислим характеристический многочлен матрицы J.

$$\det(J-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} Jn_1(\alpha_1) - \lambda E_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Jn_2(\alpha_2) - \lambda E_{n2} & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & O & \dots & Jn_k(\alpha_k) - \lambda E_{nk} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

E_{ni}- единичные матрицы порядка n_i. (при вычислении матрицы J-λE мы воспользовались теоремой 8.)

По теореме 9 det(J-λE) = det$(Jn_1\,(\alpha_1)-\lambda E_{n1})$ det$(Jn_2\,(\alpha_2)-\lambda E_{n2})$.. det$(Jn_k\,(\alpha_k)-\lambda E_{nk})$ = $(\alpha_1-\lambda)^{n1}(\alpha_2-\lambda)^{n2}\ldots.(\alpha_k-\lambda)^{nk}$. Спектр матрицы J (а следовательно и матрицы A_φ) состоит из чисел α_i , входящих в жордановы клетки этой матрицы, причем кратность корня α_i равна сумме размерностей клеток с этим числом на диагонали. Таким образом мы знаем числа α_i , входящие в жордановы клетки жордановой нормальной формы оператора ф.

Осталось найти размерности клеток с данным α_i .Обозначим через $m_n(\alpha_i)$ число жордановых клеток порядка n с числом α_iна диагонали.

Теорема 11**.** $m_n(\alpha_i) = rk(A_\phi - \alpha_i E)^{n-1} - 2\,rk(A_\phi - \alpha_i E)^n + rk\,(A_\phi - \alpha_i E)^{n+1}$

В доказательстве этой теоремы используются свойства подобных матриц. Из того, что $A_\varphi \sim J$, $A_\varphi = P^{-1}JP$ следует, что $A_\phi - \alpha_i E \sim J - \alpha_i E$. Действительно,

$A_\phi - \alpha_i E = P^{-1}JP - \alpha_i E = P^{-1}JP - P^{-1}\alpha_i E\,P = P^{-1}(J - \alpha_i E)\,P$.Кроме того, из подобия матриц $A \sim B$ следует подобие $A^n \sim B^n$. Если $A=P^{-1}BP$, то $A^n = P^{-1}BP\,P^{-1}BP\ldots P^{-1}BP = P^{-1}B^nP$. Но подобные матрицы имеют одинаковые ранги (§10), поэтому в формуле теоремы 11 можно заменить вычисление рангов $rk(A_\phi - \alpha_i E)^\kappa$ вычислением $rk(J - \alpha_i E)^k$. Из теоремы 9 следует, что

$(J-\alpha_i E)^n$

$$=\begin{pmatrix} (Jn_1\,(\alpha_1)-\alpha_i E_{n1})^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (Jn_2\,(\alpha_2)-\alpha_i E_{n2})^n & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & & \\ 0 & O & & (Jn_k\,(\alpha_k)-\alpha_i E_{nk})^n \end{pmatrix}$$

Ранг $rk(J - \alpha_i E)^n = rk\,(Jn_1\,(\alpha_1)-\alpha_i E_{n1})^n + \ldots + rk\,(Jn_k\,(\alpha_k)-\alpha_i E_{nk})^n$ (По теореме 7).

Рассмотрим жорданову клетку $J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix}$ и матрицу

$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$.Возможно два случая:

1) $\lambda \neq \alpha$, $rk(J_n(\alpha) - \lambda E) = n$ – порядку клетки.

2) $\lambda = \alpha$, $rk(J_n(\alpha) - \lambda E) = n-1$ и матрица $J_n(\alpha) - \lambda E = J_n(0)$

В первом случае матрица $J_n(\alpha) - \lambda E$ невырожденная и любая ее степень, оставаясь невырожденной , имеет ранг равный n. Во втором случае ранг матрицы $(J_n(0))^к$ зависит от к. Рассмотрим для примера матрицу $J_4(0)$ и вычислим ее степени: $J_4(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $(J_4(0))^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $(J_4(0))^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $(J_4(0))^4$=O- нулевая матрица. Аналогичным образом выглядят степени матрицы $(J_n(0))^к$. На каждом шаге диагональ с единицами сдвигается на единицу вверх., при этом ранг полученной матрицы уменьшается на единицу. $(J_n(0))^n$=O, а $rk(J_n(0))^к$= n-k.

Пример. Описать все операторы в пространстве R^3, спектр которых $Spec(\phi)=\{\alpha^{[3]}\}$, где $\alpha \in R$.Условия теоремы 10 выполняются и в некотором базисе матрица оператора ф имеет жорданову нормальную форму, причем все жордановы клетки на диагонали отвечают одному α и могут отличаться только размером. Таких жордановых матриц может быть (с точностью до порядка клеток на диагонали) только три: $J_1=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$, $J_2=\begin{pmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$ и $J_3=\begin{pmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&1\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$. Найдем размерность собственного подпространства V_α в каждом из этих случаев. $\dim V_\alpha = n - rk(A_\varphi - \alpha E) = n - rk(J - \alpha E)$.В первом случае $\dim V_\alpha = 3$, во втором случае $\dim V_\alpha = 2$, а в последнем случае $\dim V_\alpha = 1$.

В каждом инвариантном подпространстве, в котором оператор действует, как оператор умножения на жорданову клетку с числом α размерность собственного подпространства $\dim V_\alpha = 1$, поэтому для жордановой матрицы J $\dim V_\alpha$ показывает число жордановых клеток с числом α, находящихся на ее диагонали . В трехмерном пространстве можно по размерности $\dim V_\alpha$ однозначно определить вид жордановой нормальной формы. В пространстве большей размерности информации о размерности $\dim V_\alpha$ не достаточно и приходиться использовать теорему 11.

Пример. Найти жорданову нормальную форму матрицы

A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Для начла найдем спектр оператора ф – оператора умножения на матрицу А.

$P_\phi(\lambda)$= det $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$=(3-λ)det$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

+ det$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$= (3-λ) (1-λ) det $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ +

det $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$=$(\lambda-2)^4$, следовательно Spec(ф)=$\{2^{[4]}\}$. По теореме 10 у оператора ф существует жорданова нормальная форм . Все жордановы клетки на диагонали соответствуют числу 2. Найдем число клеток, вычисляя размерность собственного подпространства V_2. dim V_2 = n-rk(*A*-2E)=2, так как→

A-2E=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. rk(*A*-2E)=2. В четырехмерном пространстве жордановых нормальных форм с таким числом клеток может быть две: J_1 = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и J_2= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

В первом случае на диагонали две клетки порядка два, во втором случае тоже две клетки, но одна размерности три, а другая –один. Для того, чтобы окончательно определить вид жордановой нормальной формы матрицы А воспользуемся формулой теоремы 11. Найдем число клеток размерности 1.

$m_1(2)$= rk(*A*-2E)^0-2 rk(*A*-2E)^1 + rk(*A*-2E)^2. Естественно считать, что любая матрица в нулевой степени равна Е и ее ранг равен порядку матрицы-4,

rk(*A*-2E)^1=2,осталось вычислить rk(*A*-2E)^2.

(*A*-2E)^2=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$=O- нулевая матриц. Ее ранг равен 0.Таким образом, $m_1(2)$=0 и A∼ J_1.

§7. Примеры из Домашней работы.

Рассмотрим конкретные примеры на применение изложенных методов.

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, и известно, что она в стандартном базисе является матрицею некоторого линейного оператора φ, действующего в пространстве $\mathbf{R}^3$: $A = A_\varphi$. Найдем собственные числа и собственные векторы оператора φ.

Составляем матрицу $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ и вычисляем ее определитель, то есть характеристический многочлен оператора φ, разложением по третьему столбцу (можно вычислять любым удобным способом)

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -3-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$= 2(2 - 3 - \lambda) - 2(4 + 2\lambda - 2) + (1 - \lambda)(6 + 5\lambda + \lambda^2 - 2) = 2(-1 - \lambda) - 2(2\lambda + 2) + (1 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 4) = -2 - - 2\lambda - 4\lambda - 4 + \lambda^2 + 5\lambda + 4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2.$

Собственные числа нашего оператора суть вещественные корни этого многочлена. Решим характеристическое уравнение $-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$.

В надежде отыскать целый корень этого уравнения испытаем делители свободного члена. Немедленно обнаруживаем, что, например, число −1 является корнем. Для нахождения остальных корней воспользуемся теоремой Безу и разделим наш многочлен на $\lambda + 1$, получаем в частном многочлен $-\lambda^2 - 3\lambda - 2$, а это уже квадратный трехчлен, корни которого: −1 и −2 . Таким образом характеристический многочлен разлагается на линейные множители $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$, причем корень -1 имеет кратность 2.

Спектр оператора φ имеет вид: $S_\varphi = \{(-1)^{[2]}, (-2)^{[1]}\}$. Теперь для каждого собственного значения надо найти соответствующие собственные векторы. Для $\lambda_1 = -1$ вычисляем матрицу $A - \lambda_1 E = A + E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Для нахождения собственных векторов мы должны решить однородную систему линейных

уравнений с найденной матрицей. Для этого приводим матрицу к главному ступенчатому виду:

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Такой матрице соответствует система из одного уравнения: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$. Неизвестные x_2 и x_3 являются свободными, следовательно, подпространство решений двумерно.

Окончательно множество всех собственных векторов $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ с собственным значением −1 можно описать в виде :

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а собственное подпространство V_{-1} как линейную оболочку векторов $\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e_2}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, являющихся векторами фундаментальной системы решений, то есть линейно независимыми решениями.

А теперь тем же методом найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению −2.

Вычисляем матрицу $A - \lambda_2 E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и приводим ее к главному ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Соответствующая система состоит из двух уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Теперь свободное неизвестное - x_3, и подпространство решений одномерно.

Множество всех собственных векторов с собственным значением −2 можно описать в виде :

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, собственное подпространство V_{-2} порождается вектором $\mathbf{e_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Мы видим, что у нас выполняются все условия теоремы 5, так что должен существовать базис из собственных векторов, в котором матрица оператора будет диагональной, причем на диагонали должны стоять собственные значения оператора. Для нахождения такого базиса достаточно объединить найденные нами базисы в подпространствах решений двух однородных систем. Убедимся, что набор векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ линейно независим , для этого рассмотрим линейную комбинацию этих векторов равную нулевому вектору. $\alpha\mathbf{e_1}+\beta\mathbf{e_2}+\gamma\mathbf{e_3}=\mathbf{0}$. Вектор $\alpha\,\mathbf{e_1}+\beta\,\mathbf{e_2}$ принадлежит пространству V_{-1} и может быть либо **0**, либо собственным вектором оператора.

Если бы вектор $\alpha\,\mathbf{e_1}+\beta\,\mathbf{e_2}$ был бы собственным, то нетривиальная линейная комбинация собственных векторов отвечающих различным собственным значениям равнялась бы нулевом вектору $1(\alpha\mathbf{e_1}+\beta\mathbf{e_2})+\gamma\mathbf{e_3}=\mathbf{0}$. Но это противоречит теореме 2. Следовательно, вектор $\alpha\,\mathbf{e_1}+\beta\,\mathbf{e_2}=\mathbf{0}$, а так как векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ линейно независимы, то $\alpha=\beta=0$ и из $\gamma\,\mathbf{e_3}=\mathbf{0}$ получаем $\gamma=0$.

Матрица перехода от стандартного базиса к базису $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ есть матрица, столбцы которой суть найденные базисные векторы: $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица нашего линейного оператора в этом новом базисе будет диагональной: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Порядок собственных чисел на диагонали согласован с порядком соответствующих собственных векторов.

Осталось проверить выполнение формулы (9): $P^{-1}A_\varphi P = A'_\varphi$. Вместо этой формулы удобнее, однако, проверять эквивалентную ей формулу:

$$AP = PA'.$$

Вычисляя обе части этой формулы, имеем: $AP = PA' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, которая является матрицей линейного оператора φ в стандартном базисе в пространстве R^3: $A = A_\varphi$. Требуется найти собственные числа и собственные векторы оператора φ.

Составляем матрицу $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ и вычисляем ее определитель:

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. (Мы разложили определитель по третьему столбцу. У нас два собственных значения, одно из которых двукратно, и спектр таков: $S_\varphi = \{1^{[1]}, 2^{[2]}\}$.

Теперь для каждого собственного значения ищем соответствующие собственные векторы. Для $\lambda_1 = 1$ вычисляем $A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Приводим эту матрицу к главному ступенчатому виду и отбрасываем нулевые строки : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Соответствующая однородная система состоит из двух уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0; \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

У нас одно свободное неизвестное (x_3), и подпространство решений одномерно. Находим его базис: $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Множество всех собственных векторов с собственным значением 1 можно записать в виде : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

Для собственного значения $\lambda_2 = 2$ матрица $A - \lambda_2 E = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Приводим эту матрицу к главному ступенчатому виду и отбрасываем нулевые строки : $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$ (2 −1 0). Такой матрице соответствует система из одного уравнения: $2x_1 - x_2 = 0$. Неизвестные x_2 и x_3 – свободные, а базис подпространства решений состоит из двух векторов : $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Условия теоремы 5 выполняются, так что должен существовать базис из собственных векторов. Это - базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$.

Матрица перехода к этому базису $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица нашего линейного оператора в этом новом базисе будет диагональной:$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Проверим выполнение формулы: $AT = TA'$. Имеем: $AT = TA' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

§ 8. Упражнения.

1. Все ненулевые векторы пространства R^3 – собственные векторы линейного оператора ф. Что это за оператор?

2. ф – ненулевой линейный оператор в пространстве R^2, такой что $ф^2 = 0$. Каким может быть канонический вид матрицы этого оператора?

3. Линейный оператор ф необратим. Доказать. что у него есть собственные векторы.

4. Линейный оператор ф обратим. Доказать. что ф и $ф^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы .

5. ф – линейный оператор в пространстве матриц M_2 . ф: $A \to A^T$. Найти его собственные векторы и собственные значения.

6. ф- оператор в пространстве многочленов $P_n[x]$. ф(p(x))= x p'(x). Проверить линейность этого оператора, найти его матрицу в стандартном базисе, собственные векторы и собственные значения.

7. ф- оператор в пространстве многочленов $P_n[x]$. ф(p(x))=p(ax+b). Проверить линейность этого оператора, найти его матрицу в стандартном базисе, собственные векторы и собственные значения.

8. ф – оператор умножения на матрицу $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & в \end{pmatrix}$ в пространстве R^2 . $M=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ x^2 + y^2 = 1\right\}$ – подмножество в пространстве R^2 .Найти образ этого подмножества. Описать его геометрически.

9. Пусть операторы ф и ψ коммутируют, тогда собственное подпространство V_λ оператора ф инвариантно относительно оператора ψ.

9. Пусть λ^2 –собственное значение оператора $ф^2$, тогда одно из чисел λ или –λ является собственным значением оператора ф.

10. Доказать, что собственный вектор оператора ф будет собственным вектором оператора $ф^2$.

11. Найти инвариантные подпространства оператора дифференцирования в пространстве многочленов $P_n[x]$.

12. Описать все инвариантные подпространства оператора умножения на Жорданову клетку.

13. В каком случае матрица A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ подобна диагональной?

14. ф – оператор умножения на матрицу A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в пространстве R^3 . Будет ли оператор диагонализируемым? Найти Жорданову форму матрицы A.

15. ф – оператор умножения на матрицу A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор диагонализируемым? Найти Жорданову форму матрицы A.

16. ф – оператор умножения на матрицу A $=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор диагонализируемым? Найти Жорданову форму матрицы A.

Глава 8. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

§ 1. Основные факты о евклидовых пространствах.

Напомним основные факты, изложенные в главе 5 . Пусть V – линейное пространство над полем P (R,C), тогда, согласно теореме 1 главы 5,пространство V изоморфно линейному координатному пространству $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_i \in R \right\}$, или $C^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, z_i \in C \right\}$ в зависимости от поля P (n=dimV). Линейное пространство V над полем R можно превратить в евклидово, если задать в нем скалярное произведение − билинейную, симметрическую и положительно определённую функцию двух векторных переменных. Над полем C в определение скалярного произведения добавляется операция комплексного сопряжения (см. определение 16 главы 5). Если V n-мерное линейное координатное пространство R^n, то можно определить скалярное произведение по формуле:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k ,$$

где $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Такое скалярное произведение называется **с**тандартным , а соответствующее евклидово пространство − стандартным евклидовым пространством, которое обозначается E^n**.** Аналогичным образом определяется стандартное скалярное произведение в линейном пространстве C^n : $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$. В евклидовом пространстве для любого вектора $\boldsymbol{a}$ определена его длина $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$, в вещественном пространстве определен угол между векторами угол φ, $0 \le \varphi \le \pi$, такой, что $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$,в комплексном пространстве угол не определяется, но вводится понятие ортогональности двух векторов. Два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ в комплексном евклидовом пространстве E называются ортогональными $(\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b})$, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Вспомним важнейшие геометрические свойства евклидова пространства, которые мы будем использовать ниже.

1. В любом линейном подпространстве L евклидова пространства существует ортонормальный базис.

2. Для любого линейного подпространства L существует ортогональное дополнение $L^{\perp} = \{\mathbf{b} \in E: \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a} \in L\}$, которое является линейным подпространством.

3. Евклидово пространство E является прямой суммой $E = L \oplus L^{\perp}$.

§ 2. Сопряженный оператор.

Пусть ϕ – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E над полем *P* (R или C). Наличие в пространстве скалярного произведения позволяет для каждого оператора определить сопряженный.

Определение 1. Оператор ϕ* называется сопряжённым к оператору ϕ, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ выполняется соотношение

$$(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \phi^*(\mathbf{y})). \qquad (1)$$

Примеры.

1. ϕ = id – тождественный оператор: ϕ (**x**) = **x** для любого **x.**

$$(\mathrm{id}\,(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathrm{id}\,(\mathbf{y})).$$

Следовательно, id* = id.

2. ϕ – изометрический изоморфизм, то есть биективное линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\mathbf{y}))$.

У оператора ϕ существует обратный оператор ϕ^{-1} такой, что если ϕ (**x**) = ***y***, то $\phi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$, и, следовательно, ϕ^{-1} также является изометрией . Рассмотрим два произвольных вектора **x** и **y.**

$$(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\phi^{-1}(\phi(\mathbf{x}), \phi^{-1}(\mathbf{y})) = ((\phi^{-1}\phi)(\mathbf{x}), \phi^{-1}(\mathbf{y})) = (\mathrm{id}\,(\boldsymbol{x}), \phi^{-1}(\mathbf{y})) = (\boldsymbol{x}, \phi^{-1}(\boldsymbol{y})).$$

Таким образом, у изометрического изоморфизма существует сопряженный оператор $\phi^* = \phi^{-1}$.

3. Рассмотрим линейный оператор ϕ, действующий в одномерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbf{C}^1$. Такой оператор – оператор умножения на комплексное число α: ϕ (***z***) = α **z**. Если сопряженный оператор ϕ* существует, то он также будет оператором умножения на число: ϕ*(***z***) =β ***z*.** Согласно определению 1, (ϕ(**z**), **w**) = (**z**, ϕ*(**w**)). Но (ϕ(**z**), **w**)= (α**z**, **w**)=α(***z*,** **w**), (**z**, ϕ*(**w**))= (**z**, β**w**)= $\overline{\beta}$ (**z,w**) для любых векторов **z** и **w**.

Следовательно α= $\overline{\beta}$.В одномерном комплексном пространстве сопряженный оператор существует и представляет собой умножение на сопряженное число.

Теорема 1 (единственности). Если у оператора ф есть сопряжённый, то он единствен.

Доказательство**.** Пусть φ_1^* и φ_2^* − операторы, сопряжённые к ф; тогда

(ф (**x**), ***y***) = (**x**, φ_1^*(***y***)) = (***x***, φ_2^*(**y**)) для любых ***x***, ***y***.

Отсюда

(**x**, φ_1^*(**y**) − φ_2^*(**y**)) = (**x**, (φ_1^* − φ_2^*) (**y**)) = 0 для любых ***x***, ***y***.

Вектор (φ_1^* − φ_2^*) (**y**) ⊥ **x** для любого **x** и, следовательно, может быть только нулевым. Равенство (φ_1^* − φ_2^*) (***y***) = **0** для любого **y** означает, что оператор φ_1^* − φ_2^* нулевой, т. е. φ_1^* = φ_2^*.

Теорема 2 (существования)**.** У любого линейного оператора ф в конечномерном евклидовом пространстве существует сопряжённый оператор ф*.

Доказательство. Зафиксируем ортонормальный базис ***e*₁, …, *e*ₙ** в пространстве *E*; **x** = $\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\mathbf{e_i}$ − разложение вектора **x** по этому базису,

$A_ф$ = $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ − матрица оператора ф в рассматриваемом базисе. Действие оператора ф – это умножение на матрицу $A_ф$:

$$ф\ (\mathbf{x}) = A_ф \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_1^k x_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_n^k x_k \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в ортонормальном базисе имеет стандартный вид:

$$(ф\ (\boldsymbol{x}), \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_i^k\ x_k)\cdot\overline{y_i} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\ \overline{y_i})\cdot x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k\ \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i^k}\ y_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k\ \overline{z_k} = (\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

где $z = \sum_{k=1}^{n} z_k\ e_k$ и $z_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i^k}\ y_k$.

Таким образом, вектор ***z*** = $\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$ получается из вектора ***y*** = $\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ умножением на матрицу $\overline{A_ф^{\mathrm{T}}}$ = $\left(\overline{a_i^k}\right)$, а оператор умножения на эту

матрицу удовлетворяет определению сопряжённого. Таким образом, в базисе $e_1, \ldots, e_n$

$$A_{\varphi*} = \overline{A_{\varphi}^{\mathrm{T}}} \qquad (2)$$

Если оператор ф действует в вещественном евклидовом пространстве и A_φ − его матрица в фиксированном ортонормальном базисе, то все ее элементы вещественны и матрица сопряжённого оператора ф* в этом базисе получается транспонированием $A_{\varphi*} = A_{\varphi}^{\mathrm{T}}$, а действие оператора ф* − умножение на эту матрицу.

Заметим, что формула (2) справедлива для матрицы сопряженного оператора только в ортонормированном базисе, так как при ее выводе мы использовали стандартный вид выражения скалярного произведения чрез координаты сомножителей в таком базисе.

Примеры.

1. Пусть φ –оператор в стандартном двумерном вещественном евклидовом пространстве E^2, **i,j** – стандартный ортонормированный базис . $A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ –матрица оператора в базисе $\mathbf{e_1}$ =**i** ,$\mathbf{e_2}$=**i-j** . Требуется найти матрицу сопряженного оператора $A_{\varphi*}$в этом базисе. Базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ не является ортонормальным, поэтому просто воспользоваться формулой (2) нельзя. Воспользуемся формулой , связывающей матрицы оператора в различных базисах : $P^{-1}A_\varphi P = A'_\varphi$ (формула 6 глава 7). Найдем матрицу перехода P из базиса
$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ в базис **i,j** , в котором мы знаем, как по матрице оператора φ найти матрицу сопряженного оператора $A_{\varphi*}$ (просто транспонировать). Матрица P будет обратной к матрице перехода из базиса **i,j** в базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$. В ее столбцах стоят координаты векторов базиса $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ в стандартном базисе **i,j .** Это матрица $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Матрица P=$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Мы воспользовались формулой для обратной матрицы. Итак в базисе **i,j**

$A'_\varphi= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. $A'_{\varphi*}$ в этом базисе находится транспонированием: $A'_{\varphi*}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.Перейдем теперь в исходный базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ и снова воспользуемся формулой связывающей матрицы оператора в различных базисах $A_{\varphi*}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.В рассмотренном примере матрица перехода P совпала со своей обратной. В общем случае при обратном переходе из базиса в базис в формуле : $P^{-1}A_\varphi P = A'_\varphi$ матрицы P и P^{-1} меняются местами.

2. Пусть φ –оператор проектирования векторов координатной плоскости на ось ординат параллельно биссектрисе второго и четвертого координатных углов в стандартном евклидовом пространстве E^2 . Найти геометрический смысл оператора φ*.

Опишем действие оператора φ. Если **a** произвольный вектор плоскости, то для построения вектора φ(**a**) нужно разложить вектор **a** по правилу параллелограмма на две составляющие, идущие в направлении оси ординат и биссектрисы l : y=-x.

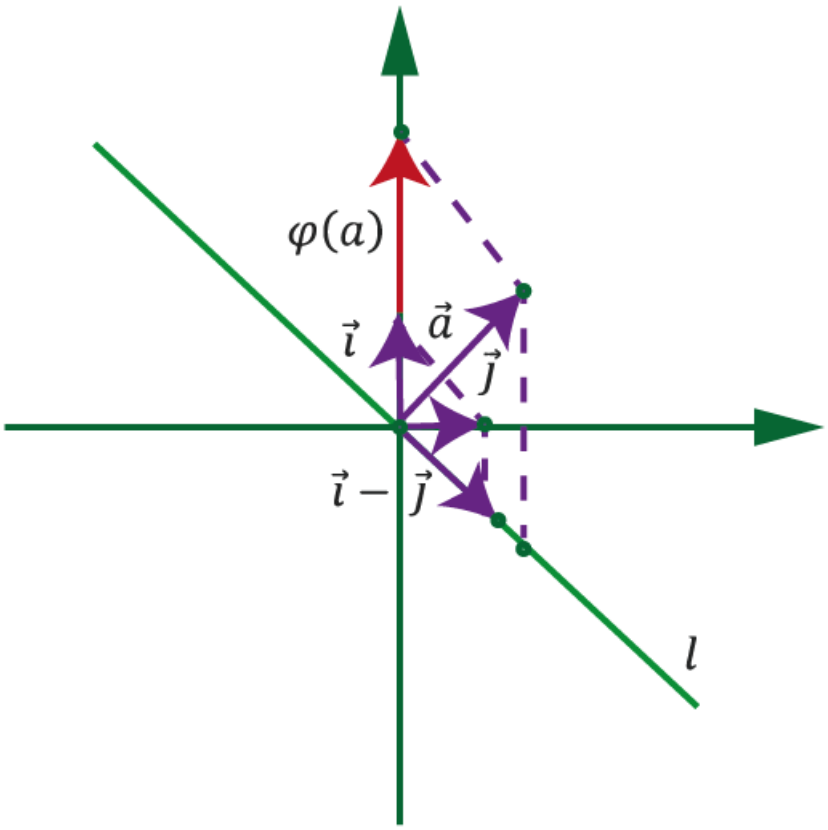


Рис.1

Для начала найдем матрицу оператора в ортонормированном базисе **i,j .** В таком базисе легко найти матрицу сопряженного оператора (просто транспонировать!).Для нахождения матрицы вычислим φ(**i**) и φ(**j**). Из рисунка1 следует, что φ(**i**)=**j** и φ(**j**)=**j.** Таким образом в стандартном базисе матрица оператора $A_{\varphi}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Найдем матрицу сопряженного оператора в этом же базисе $A_{\varphi^*}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Ker φ*= <**i**> - линейная оболочка вектора **i,**

Im φ*=< $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$> - линейная оболочка вектора $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Таким образом оператор φ* осуществляет проектирование на прямую y=x вдоль оси абсцисс.

Этот пример допускает обобщение на случай многомерного евклидова пространства. Пусть E= $L_1 \oplus L_2$, где L_1 и L_2 - линейные подпространства. То есть каждый вектор **x** можно единственным образом записать в виде **x=y+z**, где **y**$\in L_1$, а **z**$\in L_2$.Определим оператор ф следующим образом: ф(**x**) =**y**. Проверим , что оператор ф- линейный .Пусть $\mathbf{x}_1=\mathbf{y}_1+\mathbf{z}_1$, а $\mathbf{x}_2=\mathbf{y}_2+\mathbf{z}_2$, тогда $\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2=(\alpha y_1+\beta\mathbf{y}_2)+(\alpha\mathbf{z}_1+\beta\mathbf{z}_2)$. В силу линейности подпространств L_1 и L_2 вектор $\alpha\mathbf{y}_1+\beta\mathbf{y}_2$ принадлежит L_1, а вектор $\alpha\mathbf{z}_1+\beta\mathbf{z}_2$ принадлежит L_2. Следовательно, $\varphi(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)=\alpha\mathbf{y}_1+\beta\mathbf{y}_2=\alpha\,\phi(\mathbf{x_1})+\beta\,\phi(\mathbf{x_2})$. Линейный оператор ф называется оператором проектирования на линейное подпространство L_1 вдоль линейного подпространства L_2.

Рассмотрим $L_1^{\perp}$ и $L_2^{\perp}$ ортогональные дополнения к линейным подпространствам L_1 и L_2.

Теорема 3**.** Пусть E= $L_1 \oplus L_2$, где L_1 и L_2 - линейные подпространства, тогда

E= $L^{\perp}_1 \oplus L^{\perp}_2$.

Доказательство. Если E= $L_1 \oplus L_2$, то dim L_1+ dim L_2=dim E=n. Объединение базиса $\boldsymbol{e_1, \ldots, e_к}$ подпространства L_1 и базиса $\mathbf{f_1\ldots,f_m}$ подпространства L_2 образует базис пространства E, в силу существования разложения **x=y+z** , где **y**$\in L_1$, а **z**$\in L_2$ для любого вектора **x** пространства E . $\mathbf{x}=\alpha_1\boldsymbol{e_1}+\ldots+\alpha_к\boldsymbol{e_к}+$

$\beta_1\,\mathbf{f_1}+\ldots+\beta_m\mathbf{f_m}$, причем такая линейная комбинация в силу единственности разложения **x=y+z** для нулевого вектора равна нулю только, если все коэффициенты равны нулю. Так как для любого линейного подпространства L евклидова пространства E справедливо разложение в прямую сумму этого подпространства и его ортогонального дополнения, то dim L+ dim $L^{\perp}$=n. Следовательно, dim $L_1^{\perp}$= n- dim L_1 ,a

dim $L_2^{\perp}$= n- dim L_2, dim $L_1^{\perp}$+ dim $L_2^{\perp}$= n- dim L_1+ n- dim L_1=2n-(dim L_1 +

dim L_2)=n. Найдем пересечение подпространств $L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$. Пусть **a** вектор из этого пересечения, тогда он ортогонален как любому вектору **y**$\in L_1$, так и любому вектору **z**$\in L_2$.Следовательно **a** ортогонален любому вектору **x** из E, в силу линейности скалярного произведения и разложения **x=y+z,** поэтому **a=0.**Но если сумма размерностей двух линейных подпространств равна размерности пространства, а пересечение состоит только из нуля, то сумма этих подпространств прямая и совпадает со всем пространством.

Теорема 4. Пусть ф оператор проектирования на линейное подпространство L_1 вдоль линейного подпространства L_2, тогда φ^*- оператор проектирования на линейное подпространство $L^{\perp}_2$ вдоль линейного подпространства $L^{\perp}_1$.

Доказательство. По теореме 3 E= $L^{\perp}_1 \oplus L^{\perp}_2$. Оператор проектирования на линейное подпространство $L^{\perp}_2$ вдоль линейного подпространства $L^{\perp}_1$ определяется двумя условиями: образ любого вектора из подпространства $L^{\perp}_2$ совпадает с этим вектором , а образ любого вектора из подпространства $L^{\perp}_1$ равен **0.** Проверим, что оператор φ* удовлетворяет этим условиям. Рассмотрим разложение E= $L_1 \oplus L_2$, для любого вектора **x** пространства E **x=y+z** , где **y**∈L_1, а **z**∈ L_2 и ϕ(**x**) =**y**. Пусть **u**∈ $L_1^{\perp}$, проверим, что φ*(**u**)=**0,** для чего вычислим (φ*(**u**), **x**) для произвольного вектора **x.** (φ*(**u**), **x**)= (**u**,(φ*)*(**x**))= (**u**,φ(**x**))=(**u, y**)=0. Вектор φ*(**u**) ортогонален любому вектору из пространства E, следовательно, φ*(**u**)=**0.** Пусть вектор **v**∈ $L_2^{\perp}$, проверим, что φ*(**v**) = **v** для любого вектора **v**∈ $L_2^{\perp}$.Для этого проверим, что φ*(**v**)-**v** - вектор ортогональный любому вектору **x** из пространства E. (φ*(**v**), **x**)= (**v**,(φ*)*(**x**))= (**v**,φ(**x**))=(**v, y**)= (**v, y+z**)=(**v, x**). Следовательно, (φ*(**v**)-**v**, **x**)=0 ∀$\boldsymbol{x}$ и вектор φ*(**v**)-**v**=**0.**

Теорема 5.Переход от линейного оператора к его сопряжённому обладает следующими свойствами:

1. (ϕ*)* = ϕ.

2. (ϕ + ψ)* = ϕ* + ψ*.

3. (λϕ)* = $\bar{\lambda}$ϕ*.

4. (ϕψ)* = ψ*ϕ*.

Доказательство основано на свойствах операций транспонирования и комплексного сопряжения матриц.

Определение 2**.** Оператор ϕ называется самосопряжённым**,** если ϕ = ϕ*.

Примеры.

1. id – самосопряжённый оператор.

2. В пространстве $\mathbf{E}^n$ со стандартным скалярным произведением любой оператор умножения на симметрическую матрицу ($A^{\mathrm{T}} = A$) является самосопряжённым.

3. В пространстве $\mathbf{C}^n$ со стандартным скалярным произведением оператор умножения на матрицу *A* будет самосопряжённым тогда и только тогда, когда $a_i^j = \overline{a_j^i}$ ($A = \overline{A^{\mathrm{T}}}$). Матрицы, обладающие этим свойством, называются эрмитовыми.

4. Рассмотрим линейный оператор ϕ, действующий в одномерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbf{C}^1$. Такой оператор – оператор

умножения на комплексное число α: ф (***z***) =α**z**. Оператор ф будет самосопряжённым тогда и только тогда, когда $\overline{\alpha}$ = α, то есть, когда α – вещественное число. Этот пример показывает, что самосопряжённые операторы во множестве всех линейных операторов являются как бы аналогами вещественных чисел на комплексной плоскости.

§ 3. Свойства самосопряжённых операторов

Рассмотрим линейное подпространство *L* в евклидовом пространстве *E*, инвариантное относительно линейного оператора ф. Это означает, что ф (**x**) ∈ *L* для любого **x** ∈ *L*, то есть образы векторов из линейного подпространства *L* не выходят за пределы подпространства *L*. Пусть $L^{\perp}$ − ортогональное дополнение пространства *L*, $L^{\perp}$ = {**y**; (**x, y**) = 0 для любого **x** ∈ *L*}.

Теорема 6. Если ф − самосопряжённый оператор и *L* -линейное подпространство инвариантное относительно ф, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ также инвариантно относительно ф.

Доказательство. Требуется доказать, что для любого **y** ∈ $L^{\perp}$ образ ф (***y***) ∈ $L^{\perp}$, что означает, что (ф (***y***), ***x***) = 0 для любого **x** ∈ *L*. (ф **(*y***), ***x***) = (**y**, ф* (**x**)) = (**y,** ф (**x**)), так как оператор ф самосопряженный. *L* инвариантное подпространство оператора ф, следовательно, для любого **x** ∈ *L* его образ ф (**x**) ∈ *L*. Поэтому (**y**, ф (**x**)) = 0 для любого **y** ∈ $L^{\perp}$.

Евклидово пространство *E* раскладывается в прямую сумму любого линейного подпространства *L* и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$. Причём, если **x** = **y + z**, где **y** ∈ *L*, а **z** ∈ $L^{\perp}$, то **y** = pr_L**x**, а **z** = ort_L**x.** Таким образом, наличие у самосопряжённого оператора ф инвариантного подпространства *L* позволяет рассматривать его действие во всём пространстве *E* как совокупность независимых действий в пространствах меньшей размерности *L* и $L^{\perp}$. Напомним, что в этом случае матрица $A_ф$ оператора ф в базисе $\mathbf{e_1, \ldots, e_n}$, при условии , что $\boldsymbol{e_1, \ldots, e_k} \in L$, а $\boldsymbol{e_{k+1}, \ldots, e_n} \in L^{\perp}$, имеет вид $A_ф = \begin{pmatrix} A'_φ & 0 \\ 0 & A''_φ \end{pmatrix}$, где $A'_φ$ − матрица ограничения оператора ф на подпространство *L* в базисе $\boldsymbol{e_1, \ldots, e_k}$, а $A''_φ$ − матрица ограничения оператора ф на подпространство $L^{\perp}$ в базисе $\mathbf{e_{k+1}, \ldots, e_n}$.

Естественными инвариантными подпространствами любого линейного оператора ф являются собственные подпространства $V_λ$ этого оператора, то есть множества собственных векторов оператора ф, соответствующих одному

собственному значению λ, пополненные нулевым вектором. В комплексном линейном пространстве собственные векторы у линейного оператора существуют всегда, в то время как в вещественном линейном пространстве их может не быть, например, если характеристический многочлен не имеет вещественных корней.

Теорема 7. Все корни характеристического многочлена самосопряжённого оператора ф вещественны.

Доказательство.

Случай 1. Пусть *E* − евклидово пространство над полем **C**. В этом случае любой корень характеристического многочлена будет собственным значением, то есть для любого λ_0 такого, что $P_ф$ (λ_0) = 0, существует соответствующий собственный вектор $\boldsymbol{x_0}$ такой, что ф ($\boldsymbol{x_0}$)= $\lambda\boldsymbol{x_0}$**.** Так как оператор ф самосопряжённый, то согласно определению 1, справедливо равенство (ф ($\boldsymbol{x_0}$), $\boldsymbol{x_0}$) = ($\boldsymbol{x_0}$, ф* ($\boldsymbol{x_0}$)) = ($\boldsymbol{x_0}$, ф ($\mathbf{x_0}$)) .Вычислим обе части этого равенства: (ф ($\boldsymbol{x_0}$), $\boldsymbol{x_0}$) = ($\lambda\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_0}$) = λ ($\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_0}$), а ($\boldsymbol{x_0}$, ф ($\mathbf{x_0}$))= ($\boldsymbol{x_0}$, $\lambda\boldsymbol{x_0}$) = $\overline{\lambda}$ ($\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_0}$).

Собственный вектор всегда (по определению) ненулевой и, следовательно, ($\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_0}$) ≠ 0. Из равенства λ ($\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_0}$) = $\overline{\lambda}$ ($\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_0}$) получаем λ = $\overline{\lambda}$, то есть λ - вещественно.

Случай 2**.** Пусть *E* – конечномерное евклидово пространство над полем R. Это более сложный случай, который мы сведем к предыдущему, используя известную конструкцию комплексификации исходного евклидова пространства. Фиксируем $\boldsymbol{e_1}$**, …,** $\boldsymbol{e_n}$ **−** ортонормальный базис в этом пространстве. Соответствие $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{e_i} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ задаёт изоморфизм E и E^n. При этом, если $A_ф$ − матрица оператора в базисе $\mathbf{e_1}$**, …,** $\mathbf{e_n}$, то соответствующее действие оператора в $\mathbf{E}^n$ − умножение на матрицу $A_ф$:

$$ф: \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow A_ф \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_ф$ − матрица оператора ф в стандартном базисе пространства E^n. Матрица $A_ф$, как матрица самосопряжённого оператора в ортонормальном базисе, симметрическая.

Пространство R^n является подмножеством пространства $\mathbf{C}^n$:

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in R \right\} \subset C^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}, z_i \in C \right\}.$$

Определим в C^n оператор $\tilde{\varphi}$ − оператор умножения на матрицу A_ϕ:

$$\tilde{\varphi}: \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \to A_\phi \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

A_ϕ − матрица оператора $\tilde{\varphi}$ в стандартном ортонормальном базисе пространства C^n. Так как A_ϕ – симметрическая матрица и все элементы a_i^j матрицы A_ϕ вещественны , то $\overline{A_\varphi^{\mathrm{T}}} = A_\phi$ и оператор $\tilde{\varphi}$ - самосопряжённый оператор в C^n. Характеристический многочлен $P_{\tilde{\varphi}}(\lambda)$ вычисляем, используя матрицу A_ϕ: $P_{\tilde{\varphi}}(\lambda) = \det(A_\phi - \lambda E) = P_\varphi(\lambda)$.

Характеристические многочлены операторов ф и $\tilde{\varphi}$ совпадают, и, следовательно, совпадают их корни. Как было доказано в случае 1, все эти корни вещественны.

Из теоремы 4 следует, что у самосопряжённого оператора всегда есть инвариантные подпространства. Это, например, собственные подпространства V_λ. Спектр любого оператора ф − множество корней характеристического многочлена с указанием их кратностей

$$\text{Spec } \phi = \{\lambda_1^{[k_1]}, \dots, \lambda_s^{[k_s]}\} -$$

можно изобразить на комплексной плоскости точками. Так как спектр самосопряжённого оператора ф содержит только вещественные числа, то все точки спектра этого оператора располагаются на вещественной оси.

§ 4. Канонический вид самосопряженного оператора

Теорема 8. У любого самосопряжённого оператора ф в конечномерном евклидовом пространстве E существует ортонормальный базис, в котором матрица оператора диагональная.

Доказательство. Применим метод математической индукции по размерности n евклидова пространства E. Если $\dim E = n = 1$, то оператор ф − умножение на вещественное число λ и $A_\phi = (\lambda)$.

Пусть утверждение теоремы верно для любого евклидова пространства E размерности n. Покажем, что при этом условии теорема справедлива для пространства E размерности $n + 1$.

Итак, самосопряженный оператор ф ($\phi = \phi^*$) действует в евклидовом пространстве E, $\dim E = n + 1$. По теореме 7 все корни характеристического уравнения вещественны и, следовательно, существует вещественное

собственное значение λ_1 и соответствующий собственный вектор $\mathbf{x_1}$. Рассмотрим линейную оболочку этого вектора $L = \langle \mathbf{x_1} \rangle$. Это инвариантное подпространство в пространстве E, в котором оператор действует как умножение на число λ_1. По теореме 6 ортогональное дополнение $L^\perp$ линейного подпространства L инвариантно dim L = 1, dim $L^\perp = n$. По предположению индукции в $L^\perp$ существует ортонормальный базис, в котором матрица оператора ф как оператора, действующего в пространстве $L^\perp$, диагональная. Это − ортонормальный базис $\boldsymbol{e_2, \ldots, e_{n+1}}$ из собственных векторов оператора ф. Обозначим через $\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{x_1}}{|\boldsymbol{x_1}|} \in L$, $\boldsymbol{e_1} \perp L^\perp$, и мы получили $\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}}$ − ортонормальный базис в E, в котором матрица оператора ф диагональная.

Ортонормальный базис, в котором матрица самосопряжённого оператора диагональная, естественно назвать каноническим**,** хотя он и не определён однозначно. Например, для тождественного оператора любой ортонормальный базис канонический.

Заметим, что сам факт существования базиса, в котором матрица оператора диагональная с вещественными числами на диагонали, не гарантирует , что оператор самосопряжен. Так, если матрица оператора A_ϕ в стандартном базисе в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ не симметрическая, а оператор ф диагонализируемый, то ф не будет самосопряжённым оператором, однако будет обладать базисом из собственных векторов. Этот базис не будет ортонормальным.

Из теоремы 8 следует, что любая симметрическая (эрмитова) матрица A подобна диагональной матрице с вещественными числами, стоящими на диагонали:

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A задаёт самосопряжённый оператор ф − оператор умножения на эту матрицу − и является матрицей оператора ф в стандартном ортонормальном базисе пространства R^n (C^n). Если P – матрица перехода от стандартного базиса к каноническому, а P^{-1} – матрица перехода из канонического базиса в стандартный, то $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$.

Матрица P – матрица перехода из одного ортонормального базиса в другой ортонормальный базис. Такие матрицы обладают рядом замечательных свойств, которые мы обсудим в следующем параграфе.

При нахождении канонического базиса для самосопряжённого оператора может оказаться полезным утверждение следующей теоремы.

Теорема 9**.** Собственные векторы самосопряжённого оператора ф, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство**.** Пусть λ_1 и λ_2 – различные собственные значения оператора ф (они вещественны по теореме 7), $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ – соответствующие собственные векторы. Из определения самосопряженного оператора следует, что (ф ($\boldsymbol{x_1}$), $\boldsymbol{x_2}$) = ($\boldsymbol{x_1}$, ф ($\boldsymbol{x_2}$)); Преобразуем правую и левую части этого равенства: (ф ($\boldsymbol{x_1}$), $\boldsymbol{x_2}$) = ($\lambda_1\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$) = λ_1($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$); ($\boldsymbol{x_1}$, ф ($\boldsymbol{x_2}$)) = ($\boldsymbol{x_1}$, $\lambda_2\boldsymbol{x_2}$)) = $\overline{\lambda_2}$($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$) = λ_2($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$). Итак, λ_1($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$) = λ_2($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$) и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то ($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$) = 0.

Таким образом, если корни характеристического многочлена самосопряжённого оператора различны и имеют кратность 1, канонический базис можно получить, выбирая по собственному вектору единичной длины для каждого собственного значения.

Пример. Найти канонический вид и канонический базис оператора умножения на матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$ в пространстве C^2.

Пусть ф − рассматриваемый оператор, тогда матрица $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$ является матрицей оператора ф в стандартном ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ стандартного комплексного евклидова пространства C^2, то есть A_ϕ = $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. Матрица A_ϕ – эрмитова, так как A_ϕ = $\overline{A_\varphi^{\mathrm{T}}}$, следовательно, оператор ф − самосопряжённый. Найдём характеристический многочлен и спектр оператора ф: $P_\phi(\lambda)$ = det $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{pmatrix}$ =(3 − λ)(1 − λ) – (2 + 2*i*)(2 − 2*i*) = $\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$. Корнями характеристического многочлена будут числа λ_1 = −1 и λ_2 = 5. Спектр оператора ф имеет вид: Spec ф = $\{-1^{[1]}, 5^{[1]}\}$ и состоит из вещественных чисел. Найдём собственные подпространства V_{-1} и V_5 оператора ф.

Подпространство V_{-1} – это множество решений системы: $\begin{cases} 4z_1 + (2+2i)z_2 = 0; \\ (2-2i)z_1 + 2z_2 = 0. \end{cases}$

Будем решать систему методом Гаусса. Так как матрица системы вырождена , то ее ранг равен одному и достаточно рассмотреть только одно

уравнение (например, второе). Откуда получаем : $z_1=-\frac{z_2}{1-i}=-\frac{1+i}{2}z_2$. Подпространство V_{-1}- одномерное комплексное пространство векторов вида $\alpha \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$, где α- произвольное комплексное число.

Подпространство V_5 – это множество решений системы: $\begin{cases} -2z_1+(2+2i)z_2=0; \\ (2-2i)z_1-4z_2=0. \end{cases}$

Множество решений этой системы находим аналогичным образом и получаем множество векторов вида $\alpha \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, где α∈ C. Векторы $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, порождающие, соответственно, подпространства V_{-1} и V_5, ортогональны и имеют длины $\sqrt{6}$ и $\sqrt{3}$, соответственно. Действительно ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$)=($1+i$) ($\overline{1+i}$) +(-2)* 1=0, ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1$)=($1+i$) ($\overline{1+i}$) +(-2) (-2)= 6 , ($\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2$)=($1+i$) ($\overline{1+i}$) +1* 1=3.

Поделив векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ на их длины, получим канонический базис $\boldsymbol{e_1}=\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2}= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ оператора ф, в котором матрица ф имеет канонический диагональный вид: $A'_{\varphi}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 5. Изометрический оператор

Рассмотрим ф – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E над полем *P* (R или C). У каждого такого оператора ф существует сопряжённый оператор ф* (см. теорему 2 § 2).

Определение 3. Оператор ф называется изометрическим, если ф·ф* = = ф*·ф = id.

Это определение означает, что оператор ф обратим, а сопряжённый оператор ф* является обратным к оператору ф, ф* = φ^{-1}. В примере 2 § 2 было показано, что изометрический изоморфизм, то есть биективное линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение, обладает этим свойством. Верно и обратное.

Теорема 10. Если ф – изометрический оператор, то отображение ф биективно и сохраняет скалярное произведение.

Доказательство. Биективность отображения ф вытекает из существования обратного оператора $ф^{-1}$= ф*. Проверим, что скалярное произведение сохраняется при отображении ф:

$$(ф(\boldsymbol{x}), ф(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, ф^*(ф(\boldsymbol{y}))) = (\boldsymbol{x}, (ф^*ф)(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \mathrm{id}\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Зафиксируем некоторый ортонормальный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ в евклидовом пространстве E. Пусть $A_ф$ – матрица изометрического оператора ф в этом базисе. Так как матрица сопряжённого оператора ф* в этом же базисе имеет вид $A_{φ*} = \overline{A_ф^{\mathrm{T}}}$ (или $A_{φ*} = A_ф^{\mathrm{T}}$ в вещественном случае), то матрица изометрического оператора ф обладает свойством:

$$A_ф \overline{A_ф^{\mathrm{T}}} = E.$$

Изучим подробнее такие матрицы.

Определение 4. Матрица $O \in M_n$ (R) называется ортогональной, если $O^{-1} = O^{\mathrm{T}}$. Матрица $U \in M_n$ (C) называется унитарной, если $U^{-1} = \overline{U^T}$

Теорема 11**.** Строки и столбцы унитарной (ортогональной) матрицы – попарно ортогональные векторы единичной длины.

Доказательство**.** Пусть $U = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$, $\overline{U^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \overline{u_1^1} & \dots & \overline{u_n^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{u_1^n} & \dots & \overline{u_n^n} \end{pmatrix}$.

Перемножим эти матрицы:

$$U \cdot \overline{U^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u_1^1} & \dots & \overline{u_n^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{u_1^n} & \dots & \overline{u_n^n} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_i^k \overline{u_j^k} \right) = E.$$

То есть элемент произведения, стоящий в *i*-й строке и в *j*-м столбце, $\sum_{k=1}^{n} u_i^k \overline{u_j^k}$, равен δ_i^j – соответствующему элементу матрицы *E*. Но $\sum_{k=1}^{n} u_i^k \overline{u_j^k}$ – скалярное произведение векторов, стоящих в *i*-й и *j*-й строках матрицы *U*. Следовательно, строки матрицы попарно ортогональны и имеют единичную длину . Перемножим теперь матрицы *U* и $\overline{U^{\mathrm{T}}}$ в другом порядке: $\overline{U^{\mathrm{T}}} \cdot U = \begin{pmatrix} \overline{u_1^1} & \dots & \overline{u_n^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{u_1^n} & \dots & \overline{u_n^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{pmatrix} = E.$

Элемент произведения, стоящий в *i*-й строке и в *j*-м столбце, имеет вид $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k^i} u_k^j$ и равен δ_i^j. Но $\sum_{k=1}^{n} u_k^j \overline{u_k^i}$ – скалярное произведение *j*-го и *i*-го столбцов матрицы *U*. Следовательно, и столбцы матрицы *U* попарно ортогональны и имеют единичную длину.

Это утверждение о столбцах матрицы *U* можно получить и из геометрических соображений, если *U* – матрица изометрического оператора в ортонормальном базисе. Столбцы матрицы состоят из координат образов базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ в рассматриваемом базисе. Изометрический оператор сохраняет скалярное произведение. Следовательно, столбцы – векторы ф ($\boldsymbol{e}_1$), …, ф ($\boldsymbol{e}_n$) – также образуют ортонормальный базис.

Заметим, что унитарные (ортогональные) матрицы встречаются также при рассмотрении матриц перехода от одного ортонормального базиса к другому. Действительно, пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, …, $\boldsymbol{e}_n'$ – два таких базиса и *P* – матрица перехода от первого базиса ко второму. Столбцы матрицы *P* состоят из координат векторов $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, …, $\boldsymbol{e}_n'$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$. Столбцы матрицы *P* тем самым – попарно ортогональные векторы единичной длины. Поэтому $\overline{P^{\mathsf{T}}} \cdot P$ – матрица, состоящая из попарных скалярных произведений столбцов, – равна *E*, $\overline{P^{\mathsf{T}}} \cdot P = E$. Таким образом, $\overline{P^{\mathsf{T}}}$ является левой обратной матрицей для матрицы P и ,следовательно, матрица P невырождена и обратима. В силу единственности обратной матицы $P^{-1} = \overline{P^{\mathsf{T}}}$, а сама матрица *P* оказывается унитарной (ортогональной).

Рассмотрим теперь определитель унитарной матрицы *U*. Определитель матрицы - сумма с соответствующими знаками произведений элементов матрицы, взятых из разных строк и разных столбцов. В рассматриваемом случае det *U* является комплексным числом.

$$\det U = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}, \text{ где } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} –$$

подстановка степени *n*, sgn σ – её знак, а S_n – множество всех таких подстановок. $\det \overline{U} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \overline{u_1^{i_1}} \dots \overline{u_n^{i_n}}$. Так как комплексное сопряжение перестановочно с операциями сложения и умножения комплексных чисел, то $\det \overline{U} = \overline{\det U}$. Вычислим модуль комплексного числа det *U*.

Теорема 12**.** Пусть *U* – унитарная матрица, тогда $|\det U| = 1$.

. $\det (U \cdot \overline{U^{\mathsf{T}}}) = \det U \cdot \det \overline{U^{\mathsf{T}}} = \det U \cdot \det \overline{U} = \det U \cdot \overline{\det U} = = |\det U|^2$.

Но $U\cdot\overline{U^{\mathrm{T}}} = E$, следовательно, $|\det U|^2 = 1$ и $|\det U| = 1$, так как модуль комплексного числа – вещественное положительное число. Определитель унитарной матрицы – комплексное число, по модулю равное единице, которое может быть записан в виде: $\det U = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Если O − ортогональная матрица, то все её элементы вещественны и $\overline{O} = O$. $\det O$ – вещественное число, а из доказательства теоремы 3 получаем $|\det O|^2 = 1$. Следовательно, в вещественном случае $\det O = \pm 1$.

Замечание. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ – два ортонормальных базиса в вещественном евклидовом пространстве, P − матрица перехода от первого базиса ко второму. P – ортогональная матрица, и, следовательно, $\det P = \pm 1$. Будем говорить, что базисы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ имеют одинаковую ориентацию, если $\det P = 1$, и противоположную, если $\det P = -1$. Рассмотрим стандартный базис $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$ в стандартном евклидовом пространстве E^n. Любой базис, имеющий одинаковую ориентацию со стандартным базисом, будем называть положительно ориентированным. Противоположно ориентированные базисы будем называть отрицательно ориентированными. Эти определения обобщают понятия положительно и отрицательно ориентированных троек векторов трёхмерного векторного пространства на случай ортонормальных базисов в стандартном евклидовом пространстве E^n.

Пример. Изометрические операторы на плоскости.

Пусть оператор ф действует в стандартном евклидовом пространстве E^2, его матрица О в стандартном базисе ортогональна. Покажем, что любая ортогональная матрица второго порядка может быть записана в одном из следующих видов :

$O=\begin{pmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix}$ или $O=\begin{pmatrix} Cos\alpha & Sin\alpha \\ Sin\alpha & -Cos\alpha \end{pmatrix}$ и опишем все изометрические операторы на плоскости. Рассмотрим ортогональную матрицу второго порядка $O=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ее столбцы – векторы единичной длины. Каждый такой вектор начинается в начале координат и заканчивается в точке единичной окружности, поэтому столбцы матрицы О имеют вид: $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Cos\alpha \\ Sin\alpha \end{pmatrix}$,

$\binom{b}{d}=\binom{Cos\beta}{Sin\beta}$, где α и β – углы наклона векторов к оси ОХ. Столбцы ортогональной матрицы – ортогональные векторы, поэтому скалярное произведение $Cos\alpha\ Cos\beta + Sin\alpha Sin\beta$=0 . $Cos(\alpha$-β)=0.

Возможно два варианта: α-β=$\frac{\pi}{2}$+ 2кπ или α-β=$-\frac{\pi}{2}$+ 2кπ. Следовательно либо β=α-$\frac{\pi}{2}$+ 2кπ, либо β=α +$\frac{\pi}{2}$+ 2кπ. В первом случае $\binom{b}{d}=\binom{Cos\beta}{Sin\beta}=\binom{Sin\alpha}{-Cos\alpha}$ и O=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} Cos\alpha & Sin\alpha \\ Sin\alpha & -Cos\alpha \end{pmatrix}$. Во втором случае $\binom{b}{d}=\binom{Cos\beta}{Sin\beta}=\binom{-Sin\alpha}{Cos\alpha}$ и O=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix}$. Это- матрица оператора поворота на угол α.

Найдем геометрический смысл оператора ф умножения на матрицу $\begin{pmatrix} Cos\alpha & Sin\alpha \\ Sin\alpha & -Cos\alpha \end{pmatrix}$. Заметим, что матрица симметрическая и, следовательно, оператор ф – самосопряженный. У него существует канонический ортонормальный базис из собственных векторов, в котором матрица оператора – диагональная. Вычислим характеристический многочлен $P_ф$ (λ) = det (*O* – λ*E*) = det $\begin{pmatrix} Cos\alpha - \lambda & Sin\alpha \\ Sin\alpha & -Cos\alpha - \lambda \end{pmatrix}$= λ^2- C$os\alpha$ ^{2}- $Sin\alpha$ ^{2}= λ^2-1. Спектр оператора Spec ф = {1$^{[1]}$, (−1)$^{[1]}$}. В каноническом базисе матрица оператора имеет вид $A'_φ$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, ф- оператор симметрии относительно прямой, идущей в направлении собственного вектора оператора, соответствующего собственному значению 1.

§ 6. Свойства изометрического оператора

Рассмотрим линейное подпространство *L* в евклидовом пространстве *E* и его ортогональное дополнение $L^{\perp}$.

Теорема 13. Если *L* − инвариантное подпространство изометрического оператора ф, то $L^{\perp}$ − также инвариантное подпространство этого оператора.

Доказательство**.** Для любых **x** ∈ *L* и **y** ∈ $L^{\perp}$ имеем: (***x, y***) = 0. Пусть **y** ∈ $L^{\perp}$; тогда для проверки инвариантности подпространства $L^{\perp}$ относительно действия оператора ф нужно убедиться, что (**x**, ф (**y**)) = 0 для любого **x** ∈ *L*. Подпространство *L* инвариантно относительно действия оператора ф, следовательно, ф: $L \to L$ − изометрический оператор в пространстве *L*, то есть биективное и линейное отображение. Поэтому любой вектор **x** ∈ *L* можно записать как ф (***x′***), где ***x′*** = ф$^{-1}$ (**x**). Таким образом,

($\boldsymbol{x}$, ф ($\boldsymbol{y}$)) = (ф ($\boldsymbol{x}'$), ф ($\boldsymbol{y}$)) = ($\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}$) = 0, так как $\boldsymbol{x}' \in L$, а $\boldsymbol{y} \in L^{\perp}$.

Напомним, что если линейный оператор (не обязательно изометрический) имеет собственные векторы, то у него есть и инвариантные подпространства, например, собственные подпространства V_λ. Поэтому поиски инвариантных подпространств изометрического оператора ф целесообразно начать с изучения его спектра.

Теорема 14. Корни характеристического уравнения изометрического оператора по модулю равны единице.

Доказательство. Случай 1. Пусть ф – изометрический оператор в комплексном евклидовом пространстве E.

Многочлен $P_ф$ (λ), как всякий многочлен степени $n \geq 1$ над полем **C**, имеет хотя бы один корень λ_0 (точнее, n корней с учётом их кратности). Этот корень является собственным значением оператора ф, соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{x_0}$.

$$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_0}) = (ф\ (\boldsymbol{x_0}), ф\ (\boldsymbol{x_0})) = (\lambda_0 \boldsymbol{x_0}, \lambda_0 \boldsymbol{x_0}) = \lambda_0 \overline{\lambda_0}\ (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_0}).$$

$\lambda_0 \overline{\lambda_0} = |\lambda_0|^2$. Так как $\boldsymbol{x_0}$ − собственный вектор, то $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_0}) \neq 0$ и $|\lambda_0|^2 = 1$. Следовательно, $|\lambda_0| = 1$.

Случай 2. Рассмотрим изометрический оператор в вещественном евклидовом пространстве E. Зафиксируем ортонормальный базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ и установим изометрический изоморфизм пространства E и стандартного евклидова пространства R^n . Пусть O − матрица изометрического оператора в рассматриваемом базисе; тогда ф: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \to O \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пространство R^n является подмножеством стандартного комплексного евклидова пространства C^n. Определим оператор $\tilde{\varphi}$ в этом пространстве, $\tilde{\varphi}: \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \to O \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix}$. Оператор $\tilde{\varphi}$ совпадает с ф на подмножестве R^n. Матрица O является матрицей оператора $\tilde{\varphi}$ в стандартном базисе, и так как O вещественна, то $O \cdot \overline{O^{\mathrm{T}}} = O \cdot O^{\mathrm{T}} = E$ и $\tilde{\varphi}$ – изометрический оператор в пространстве C^n. Характеристические многочлены операторов $\tilde{\varphi}$ и ф одинаковы, так как $P_{\tilde{\varphi}}$ (λ) = det ($O - \lambda E$), $P_ф$ (λ) = det ($O - \lambda E$).

Но в случае 1 было показано, что все корни характеристического многочлена оператора $\tilde{\varphi}$ по модулю равны 1.

Так как в комплексном линейном пространстве любой корень характеристического уравнения является собственным значением, то изометрический оператор имеет инвариантные подпространства. Если $\boldsymbol{x_0}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0, то его линейная оболочка $L = \langle \boldsymbol{x_0} \rangle$ − одномерное инвариантное подпространство изометрического оператора.

В вещественном случае, как показывает пример оператора поворота на плоскости на угол $\alpha \neq k\pi$, у изометрического оператора может не быть нетривиальных инвариантных подпространств (подпространств, отличных от нулевого и всего пространства). Это связано с отсутствием вещественных корней у характеристического уравнения.

Рассмотрим изометрический оператор ф в вещественном евклидовом пространстве. Корни его характеристического уравнения по модулю равны единице. Если они вещественны, то это числа ± 1, которые будут собственными значениями оператора, а соответствующие собственные подпространства будут инвариантными. Если корень характеристического уравнения λ не является вещественным, то $\lambda = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$.

Теорема 15**.** Пусть $\lambda = e^{i\alpha}$ ($\alpha \neq k\pi$) – корень характеристического уравнения $P_\phi(\lambda) = 0$ изометрического оператора ф, действующего в вещественном евклидовом пространстве E, тогда существует двумерное инвариантное подпространство $L \subset E$, в котором оператор ф есть поворот на угол α.

Доказательство**.** Зафиксируем ортонормальный базис $\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ в пространстве E; O – матрица оператора в этом базисе. Как и в доказательстве теоремы 14, установим изометрический изоморфизм между пространством E и стандартным евклидовым пространством R^n, ф: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \to O \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\tilde{\varphi}$ – оператор, продолжающий это действие в стандартное евклидово пространство C^n, $\tilde{\varphi}: \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \to O \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix}$. Как было показано в доказательстве теоремы 14, $\tilde{\varphi}$ − изометрический оператор с тем же спектром, так как Spec ф = Spec $\tilde{\varphi}$. Поэтому

λ = $e^{i\alpha}$ – собственное значение оператора $\tilde{\varphi}$, а **z** = $\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ – соответствующий собственный вектор.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \dots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}, \text{ где } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n;$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \tilde{\varphi}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = O\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + i\, O \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{x}) + i\phi(\mathbf{y});$$

$\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = e^{i\alpha}\mathbf{z} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\mathbf{x} + \mathbf{i}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\cos\alpha - \mathbf{y}\sin\alpha) + i(\mathbf{x}\sin\alpha + \mathbf{y}\cos\alpha)$.

Отсюда получаем:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cos\alpha - \boldsymbol{y}\sin\alpha,\ \phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\sin\alpha + \boldsymbol{y}\cos\alpha.$$

Рассмотрим двумерное подпространство, порождённое векторами **x** и ***y***: $L = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \subset \mathbf{R}^n$. Это подпространство инвариантно относительно оператора ф. Пусть $\bar{\boldsymbol{z}} = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$ – вектор, сопряжённый вектору **z** = **x** + *i***y**. $\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{z}}) = O \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \dots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = \overline{O \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}$ в силу вещественности матрицы *O* и вышеуказанных свойств комплексного сопряжения $\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{z}}) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\boldsymbol{z}} = e^{-i\alpha}\bar{\boldsymbol{z}}$. Вычислим скалярное произведение векторов **z** и $\bar{\boldsymbol{z}}$. $(\mathbf{z}, \bar{\boldsymbol{z}}) = (\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}), \tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{z}})) = e^{i\alpha}\,\overline{e^{-i\alpha}}\,(\boldsymbol{z}, \bar{\boldsymbol{z}}) = \lambda^2(\boldsymbol{z}, \bar{\boldsymbol{z}})$. Но $e^{i\alpha}\,\overline{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha} \neq 1$, так как $\alpha \neq k\pi$. Следовательно, $(\boldsymbol{z}, \bar{\boldsymbol{z}}) = 0$, то есть векторы ***z*** и $\bar{\boldsymbol{z}}$ ортогональны.

$(\boldsymbol{z}, \bar{\boldsymbol{z}}) = (\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + 2i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю. Получаем: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Векторы ***x*** и ***y*** ортогональны и имеют одинаковую длину: $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = a$. В подпространстве *L* рассмотрим два вектора $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{a}\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{a}\mathbf{y}$. Это ортогональные векторы единичной длины, то есть ортонормальный базис в линейном подпространстве *L*. Найдём матрицу оператора ф в этом базисе:

$\phi(\boldsymbol{e_1}) = \phi\left(\frac{1}{a}\,\mathbf{x}\right) = \frac{1}{a}(\mathbf{x}\cos\alpha - \mathbf{y}\sin\alpha) = \frac{1}{a}\,\mathbf{x}\,\cos\alpha - \frac{1}{a}\,\mathbf{y}\,\sin\alpha = \boldsymbol{e_1}\cos\alpha - \boldsymbol{e_2}\sin\alpha.$

Аналогичным образом $\phi(\boldsymbol{e_2}) = \phi\left(\frac{1}{a}\,\mathbf{y}\right) = \boldsymbol{e_1}\sin\alpha + \boldsymbol{e_2}\cos\alpha$.

Матрица оператора ф, действующего в инвариантном подпространстве L, – это $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, то есть матрица оператора поворота на угол α. (Подчеркнём, что эта матрица задаёт поворот, только если это матрица оператора в ортонормальном базисе.)

§ 7. Канонический вид изометрического оператора.

Теорема 17**.** Пусть ф – изометрический оператор в комплексном евклидовом пространстве E; тогда в E существует ортонормальный базис из собственных векторов оператора.

Доказательство (методом математической индукции). Если оператор ф действует в одномерном пространстве, то он есть умножение на число. Это число $\lambda = e^{i\alpha}$, любой вектор пространства E собственный, в том числе любой вектор **e** единичной длины, являющийся ортонормальным базисом E. Предположим, что теорема верна для евклидовых пространств E таких, что $\dim E = k$, и покажем, что из этого предположения следует справедливость теоремы для евклидовых пространств размерности $k + 1$.

Пусть ф – изометрический оператор в пространстве E, у которого $\dim E = k + 1$, $\lambda_0 = e^{i\alpha}$ – собственное значение оператора ф, соответствующее собственному вектору $\boldsymbol{x_0}$**.** Рассмотрим линейную оболочку этого вектора $L = \langle \boldsymbol{x_0} \rangle$. Это одномерное линейное подпространство, базисом которого будет вектор $\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{x0}}{|\boldsymbol{x0}|}$. L – инвариантное подпространство оператора ф, и по теореме 13 его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ также инвариантно относительно оператора ф. $E = L \oplus L^{\perp}$ и $\dim E = \dim L + \dim L^{\perp}$, следовательно $\dim L^{\perp} = k$. Оператор ф действует в пространстве $L^{\perp}$, и по предположению индукции в пространстве $L^{\perp}$ существует ортонормальный базис $\boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_{k+1}}$ из собственных векторов оператора ф. Тогда $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_{k+1}}$ – ортонормальный базис в пространстве E, состоящий из собственных векторов оператора ф.Матрица изометрического оператора в базисе из собственных векторов диагональная, и на диагонали стоят числа, по модулю равные единице. Таким образом, для любой унитарной матрицы U существует другая унитарная матрица V такая, что $V^{-1}UV$

− диагональная матрица. Матрица V − это матрица перехода от исходного стандартного ортонормального базиса, в котором оператор задаётся как оператор умножения на матрицу U, к каноническому базису из собственных векторов, существование которого доказано в теореме 17. Другими словами, можно сказать, что любая унитарная матрица подобна диагональной специального вида: $U \sim \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix}$.

Пример**.** Рассмотрим матрицу U= $\begin{pmatrix} \frac{i+1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Проверим, что эта матрица унитарная, то есть, что ее столбцы и строки попарно ортогональные векторы единичной длины. Начнем со столбцов $\mathbf{z}_1=\begin{pmatrix} \frac{i+1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Вычислим длины этих векторов и их скалярное произведение. $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)= \frac{i+1}{\sqrt{3}}*\frac{\overline{1}}{\sqrt{3}} +\frac{-1}{\sqrt{3}}*\frac{\overline{1-\imath}}{\sqrt{3}} =0$,

$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1)= \frac{i+1}{\sqrt{3}}*\frac{\overline{1+\imath}}{\sqrt{3}} +\frac{-1}{\sqrt{3}}*\frac{\overline{-1}}{\sqrt{3}}=1$, $(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2)= \frac{1}{\sqrt{3}}*\frac{\overline{1}}{\sqrt{3}} +\frac{1-i}{\sqrt{3}}*\frac{\overline{1-\imath}}{\sqrt{3}} =1$. Аналогичные результаты получаем для строк. Следовательно, оператор ф умножения на матрицу U в стандартном двумерном комплексном пространства C^2 - изометрический. Найдем канонический вид матрицы этого оператора. Вычислим характеристический многочлен $P_ф(\lambda) = \det(U - \lambda E)$ =

$\det \begin{pmatrix} \frac{i+1}{\sqrt{3}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} - \lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda+1$. Корни характеристического многочлена $\lambda_1= \frac{1}{\sqrt{3}} +i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и $\lambda_2= \frac{1}{\sqrt{3}} -i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Эти числа, модули которых равны единице, являются собственными значениями оператора ф. Канонический вид матрицы оператора $\acute{U}=\begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Если ф – изометрический оператор в вещественном евклидовом пространстве, то у него может не существовать ортонормального базиса из собственных векторов, как, например, у оператора поворота на угол $\alpha \neq k\pi$ на плоскости. Однако и в вещественном случае у изометрического оператора существует специальный (канонический) ортонормальный базис.

Теорема 18**.** Пусть ф – изометрический оператор в вещественном евклидовом пространстве *E*, тогда в этом пространстве существует ортонормальный базис, в котором матрица оператора имеет клеточно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} & & & & \\ & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix} & \end{pmatrix},$$

называемый каноническим.

Это клеточно-диагональная матрица, одномерные клетки которой суть числа 1 или −1, а двумерные – матрицы поворота на углы α_i. Некоторые клетки могут отсутствовать.

Доказательство (методом математической индукции). Пусть ф действует в одномерном евклидовом пространстве *E*. В этом случае оператор ф − умножение на число, которое в силу изометрии равно ± 1. Вектор **e** единичной длины в пространстве *E* и есть требуемый базис.

Предположим, что теорема верна для евклидовых пространств *E* размерности, меньшей *n* (dim *E* < *n*). Рассмотрим евклидово пространство *E* размерности *n* (dim *E* = *n*) и спектр оператора ф. Если в спектре оператора есть вещественные числа λ_0 (а это могут быть только числа ± 1), то это собственное значение, которому соответствует собственный вектор $\boldsymbol{x_0}$. Рассмотрим $L = \langle \boldsymbol{x_0} \rangle$, dim *L* = 1. Вектор $\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{x0}}{|\boldsymbol{x0}|}$ − базис пространства *L*. По теореме 13 подпространство $L^{\perp}$ также инвариантно относительно ф и операто ф действует в пространстве $L^{\perp}$. dim $L^{\perp} = n - 1$, и по предположению индукции пространство $L^{\perp}$ обладает ортонормальным базисом $\boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$, в котором матрица оператора ф имеет

требуемый клеточно-диагональный вид. Векторы $\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ − ортонормальный базис пространства E, в котором матрица оператора ф имеет требуемый клеточно-диагональный вид.

Если в спектре оператора ф нет вещественных чисел, то рассмотрим комплексный корень $\lambda_0 = e^{i\alpha_0}$ характеристического уравнения. Согласно теореме 15, в пространстве E существует двумерное инвариантное подпространство L, в котором оператор ф действует как поворот на угол α_0. Пусть $\boldsymbol{e_1, e_2}$ − ортонормальный базис подпространства L. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно оператора ф, и $\dim L^{\perp} = n - 2$. По предположению индукции в $L^{\perp}$ существует ортонормальный базис $\boldsymbol{e_3, \ldots, e_n}$, в котором матрица оператора ф имеет канонический вид. Канонический базис состоит из векторов $\boldsymbol{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n}$. Заметим, что в этом случае все клетки на диагонали двумерны.

Из этой теоремы следует, что для каждой ортогональной матрицы O существует другая ортогональная матрица Q (матрица перехода к каноническому базису) такая, что $Q^{-1}OQ$ − клеточно-диагональная матрица, описанная в теореме 1.

Наконец, заметим, что канонический вид ортогональной матрицы определён однозначно с точностью до перестановки местами клеток на диагонали.

§ 8. Изометрические операторы на плоскости и в пространстве

Теорема 18 даёт возможность классифицировать изометрические операторы на плоскости и в трёхмерном пространстве, описав не только все ортогональные матрицы размерности 2 (что мы уже сделали выше) и 3 с точностью до подобия, но и геометрическое действие соответствующих операторов.

Рассмотрим изометрический оператор ф на плоскости, т. е. в двумерном стандартном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^2$. Канонический вид матрицы оператора ф определён однозначно с точностью до порядка клеток на диагонали. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ − ортонормальный базис пространства $\mathbf{R}^2$, в котором матрица оператора ф имеет канонический вид.

Если $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, то ф = id , Spec ф = $\{1^{[2]}\}$. Оператор id можно интерпретировать, как оператор поворота на угол $2к\pi$.

Если $O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то ф = −id и Spec ф = {$(-1)^{[2]}$}. В этом случае оператор ф является центральной симметрией: ф (***x***) = −***x*** . Также его можно интерпретировать, как оператор поворота на угол $(2к+1)\pi$.

Если $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то Spec ф = {$1^{[1]}$, $(-1)^{[1]}$}. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ является собственным с собственным значением 1, а вектор $\boldsymbol{e}_2$ − собственным вектором с собственным значением −1. Оператор ф осуществляет симметрию относительно прямой, проходящей через начало координат на плоскости, направление которой задаёт вектор $\boldsymbol{e}_1$.

Наконец, если $O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $\alpha \neq к\pi$, то оператор ф – поворот на угол α, Spec ф = {$e^{i\alpha\,[1]}$, $e^{-i\alpha\,[1]}$}. Других изометрических операторов на плоскости нет.

Пусть ф – изометрический оператор, действующий в стандартном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ − ортонормальный базис, в котором матрица *O* оператора ф имеет канонический вид. (Теорема 18.)

Если $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, то ф = id и Spec ф = {$1^{[3]}$}.

Если $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, то Spec ф = {$1^{[2]}$, $(-1)^{[1]}$}.

В двумерном подпространстве $L = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ оператор ф действует как тождественный, а в пространстве осуществляет симметрию относительно плоскости, порождённой векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, проходящей через начало координат.

Если $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, то Spec ф = {$1^{[1]}$, $(-1)^{[2]}$}. $L_1 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ − собственное подпространство, соответствующее собственному значению 1, а $L_2 = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ − собственное подпространство, соответствующее собственному значению −1. Оператор ф действует в пространстве как симметрия относительно прямой, проходящей через начало координат в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$.

Если $O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, то ф = −id, Spec ф = $\{(-1)^{[3]}\}$. Все векторы пространства, кроме **0**, являются собственными векторами оператора ф с собственным значением −1. Оператор ф осуществляет в пространстве центральную симметрию относительно начала координат: ф (***x***) = −***x***.

Пусть теперь в спектре оператора ф есть невещественные числа. Оператор ф – изометрический, поэтому по теореме 14 это -числа вида $e^{i\alpha}$. Характеристический многочлен $P_ф(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты. Как известно, невещественные корни вещественных многочленов встречаются парами, то есть, если z_0 – корень, то $\overline{z_0}$ − также корень. Следовательно, Spec ф = $=\{e^{i\alpha\,[1]}, e^{-i\alpha\,[1]}, 1^{[1]}\}$ или Spec ф = $\{e^{i\alpha\,[1]}, e^{-i\alpha\,[1]}, (-1)^{[1]}\}$. В первом случае канонический вид матрицы оператора ф в ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ − собственный вектор, соответствующий собственному значению 1, $L = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ − двумерное инвариантное подпространство ортогональное к вектору $\boldsymbol{e}_1$, в котором оператор ф действует как поворот на угол α. В трёхмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ оператор ф осуществляет поворот вектора вокруг оси, проходящей через начало координат и идущей в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$, на угол α. Направление вращения зависит от ориентации базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Если матрица оператора ф имеет канонический вид

$O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, то $\boldsymbol{e}_1$ − собственный вектор, соответствующий собственному значению −1, а $L = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ − инвариантное подпространство ортогональное вектору $\boldsymbol{e}_1$, в котором ф действует как поворот на угол α. Оператор ф осуществляет поворот вокруг оси, проходящей через начало координат в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$, на угол α с последующей симметрией относительно перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{e}_1$ плоскости, проходящей через начало координат.

Описав все возможные изометрические операторы в пространстве R^3 и их спектры, можно по ортогональной матрице *O* изометрического оператора

ф, заданной в некотором ортонормированном базисе, определить действие оператора в пространстве геометрически.

§ 9. Пример.

Дано, что некоторый линейный оператор ф в стандартном базисе **i, j, k** стандартного евклидова пространства E^3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти геометрический смысл оператора ф.

Проверим, что оператор ф является изометрическим. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица *A* является унитарной, в данном случае ортогональной, так как все её элементы вещественны. Убеждаемся в этом непосредственным вычислением скалярных произведений строк (и столбцов) друг на друга либо проверяем, что $AA^T=A^TA=E$. Всевозможные изометрические операторы в пространстве E^3 были описаны выше. Для определения конкретного вида рассматриваемого оператора **н**айдём его спектр. Вычисляем характеристический многочлен оператора ф и его корни.

$$P_\phi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\frac{8}{9}-\lambda & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9}-\lambda & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9}-\lambda \end{vmatrix}$$

Для упрощения вычислений удобно положить $\lambda = \frac{\mu}{9}$. Тогда имеем:

$$\begin{vmatrix} -8-\mu & 4 & 1 \\ 1 & 4-\mu & -8 \\ 4 & 7 & 4-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 - 729 = (-9\lambda)^3 - 729 = -729(\lambda^3+1)=0$$

Находим корни этого уравнения Это- различные кубические корни из −1, одно из которых вещественно $\lambda_1 = -1$ и ещё два комплексно сопряженных корня по модулю равные единице $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Spec } \phi = \{ -1^{[1]}, \quad (\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2})^{[1]}, \quad (\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})^{[1]} \}.$$

Канонический вид матрицы нашего линейного оператора (то есть матрицы оператора в каноническом базисе), как это следует из § 8, будет таков:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сам же канонический базис ищется следующим образом. Первый его вектор – собственный вектор нашего оператора с собственным значением −1. Матрица однородной системы для нахождения собственного подпространства V_{-1} имеет вид $A - \lambda E = A + E$.

Подставим -1 вместо λ в матрицу $\begin{pmatrix} -\frac{8}{9} - \lambda & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} - \lambda & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} - \lambda \end{pmatrix}$ и получим матрицу однородной системы $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{13}{9} \end{pmatrix}$. Все решения этой системы, кроме нулевого, суть собственные векторы. В данном случае мы можем взять, конечно, матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 13 & -8 \\ 4 & 7 & 13 \end{pmatrix}$. Приведём её к главному ступенчатому виду:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из вида этой матрицы ясно, что подпространство решений одномерно и базисом в нём будет вектор $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Все остальные собственные векторы будут ему коллинеарны.

Для нахождения других векторов канонического базиса вспомним, что остальные два вектора являются базисом двумерного подпространства $L^{\perp}$, где $L = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Геометрически это - плоскость, проходящая через начало координат и перпендикулярная вектору $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Из аналитической геометрии мы знаем, что уравнение такой плоскости $5x - y - z = 0$. Это и есть подпространство $L^{\perp}$. Теперь надо найти в этой плоскости два ненулевых ортогональных вектора. Первый вектор просто подбираем, например, вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ лежит в нашей плоскости (точнее, компланарен ей). В качестве второго вектора можно взять векторное произведение двух уже найденных векторов, то есть вектор $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Он будет лежать в указанной плоскости и будет ортогонален вектору $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Остаётся нормировать найденные три вектора, и это будет канонический базис нашего оператора:

$\mathbf{e_1} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_3} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Эта тройка векторов будет иметь положительную ориентацию (это следует из определения векторного произведения векторов), поэтому поворот в $L^{\perp} = \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ будет осуществляться против часовой стрелки, что соответствует каноническому виду матрицы рассматриваемого оператора.

Что же касается матрицы перехода от стандартного базиса к найденному каноническому, то надо просто записать три наших нормированных вектора в столбцы матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{3\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{3\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Матрица *C* ортогональна, как матрица перехода из одного ортонормального базиса в другой ортонормальный. (Можно проверить это непосредственным вычислением попарных скалярных произведений строк и столбцов) .

С геометрической точки зрения оператор ф, как это ясно из § 8 осуществляет поворот вокруг оси, проходящей через начало координат в направлении вектора $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, на угол $\frac{\pi}{3}$ с последующей симметрией относительно плоскости , описываемой уравнением $5x - y - z = 0$.

§ 10. Каноническое разложение невырожденного линейного оператора.

Рассмотрим в евклидовом пространстве E самосопряжённый оператор φ.

Определение 5. Оператор φ называется положительным , если $(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) > 0$ для любого $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и неотрицательным, если $(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \geq 0$.

У любого самосопряженного оператора существует канонический ортонормированный базис $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \ldots \mathbf{e_n}$, в котором матрица оператора A_φ - диагональная , $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Если оператор φ положительный , то все $\lambda_i > 0$, если - неотрицательный, то $\lambda_i \geq 0$. Действительно, если $\mathbf{x} = \sum_1^n x_i \boldsymbol{e_i}$ то $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_1^n \lambda_i x_i \boldsymbol{e_i}$ и $(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$.

Мы воспользовались формулой вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе. Если оператор φ положительный , то

(ϕ(**x**), **x**) должно быть больше 0 для любого **x**≠ **0** .Это возможно тогда и только тогда , когда все $\lambda_i > 0$. (аналогично для случая неотрицательного оператора).Отметим, что неотрицательный невырожденный оператор является положительным.

Таким образом, для неотрицательного оператора φ существует оператор ψ такой, что $\psi^2 = \varphi$. Это – оператор умножения на матрицу

$A_\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ в каноническом базисе **e_1,e_2…e_n**, причем A_ψ – матрица оператора ψ в этом базисе .

Теорема 19**.** Любой обратимый оператор в евклидовом пространстве над полем R есть произведение изометрического оператора и положительного самосопряженного.

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис **f_1,f_2,…,f_n** и матрицу A_f обратимого оператора f в этом базисе. Из обратимости оператора следует невырожденность его матрицы A_f . Так как при фиксированном базисе соответствие $f \to A_f$ является биекцией , причем мультипликативной, то есть $f_1 * f_2 \to Af_2 * Af_1$,то для доказательства теоремы достаточно представить матрицу A_f в виде произведения двух матриц : $A_f = S_+ * O$, где S_+- матрица положительного самосопряжённого оператора, а O – ортогональная матрица изометрического оператора. Рассмотрим матрицу оператора A_f и вычислим произведение $A_f * A_f^T$. Эта матрица соответствует оператору $f^* \circ f$, так как матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе вещественного евклидова пространства находится транспонированием матрицы исходного оператора .Оператор $f^* \circ f$ – самосопряженный, так как его матрица- симметрическая. Действительно из свойств транспонирования для любой матрицы A вытекает, что $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$. Более того оператор $f^* \circ f$ неотрицательный самосопряженный оператор. Действительно $((f^* \circ f)(\mathrm{x}), \mathrm{x}) = \left(f\left(f^*(\mathrm{x})\right), \mathrm{x}\right) = (f^*(\mathrm{x}), f^*(\mathrm{x})) \geq 0$ для любого **x.**

Как было показано выше из такого оператора можно ‘’ извлечь квадратный корень”, то есть найти такой неотрицательный оператор ψ , для которого

$\psi \circ \psi = f^* \circ f$. В силу обратимости исходного оператора f , его матрица A_f не врожденна, а оператор ψ будет самосопряженным положительным. Обозначим его матрицу в рассматриваемом базисе через S_+ (матрица

симметрическая). Для матриц рассматриваемых операторов получаем $A_f = A_f * A_f^T * (A_f^T)^{-1} = S_+ * S_+ * (A_f^T)^{-1}$.

Обозначим произведение матриц $S_+ * (A_f^T)^{-1}$ через O и проверим, что матрица O ортогональная, то есть $O^T = O^{-1}$.

В вычислениях, приведенных ниже мы будем использовать свойства операций транспонирования матрицы и перехода к обратной матрице:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$O^T = (S_+ * (A_f^T)^{-1})^T = ((A_f^T)^{-1})^T * S_+^T$ (свойство 2)$= ((A_f^{-1})^T)^T * S_+^T$ (свойство 4)$= A_f^{-1} * S_+^T$ (свойство 1)$= A_f^{-1} * S_+$ (S_+-симметрическая матрица).Найдем произведение $O * O^T = (S_+ * (A_f^T)^{-1}) * (A_f^{-1} * S_+^T) = S_+ * ((A_f^T)^{-1}) * (A_f^{-1})) * S_+$

(ассоциативность умножения матриц)$= S_+ * (A_f * A_f^T)^{-1} * S_+$(свойство 3)$=$

$= S_+(S_+S_+)^{-1}S_+ = E$, так как $((S_+S_+)^{-1} = S_+^{-1}S_+^{-1}$ – свойство 3). Следовательно, $O^T = O^{-1}$ и оператор ф умножения на матрицу $S_+ * (A_f^T)^{-1}$- изометрический . В результате получаем $A_f = S_+ * O$ и, следовательно, оператор f - произведение изометрического оператора ф и положительного самосопряженного оператора ψ .

Заметим, что аналогичным образом можно представить невырожденный оператор f, как произведение положительного самосопряженного и изометрического операторов (при этом операторы будут другими).

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$– матрица оператора f в стандартном двумерном евклидовом пространстве. detA=4, оператор f – обратимый и может быть представлен в виде произведения изометрического оператора φ и положительного самосопряженного оператора ψ . Применим алгоритм , описанный в доказательстве теоремы 19.

$S_+^2 = AA^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Оператор умножения на эту матрицу самосопряженный. Найдем канонический базис и канонический вид этого самосопряжённого оператора. Характеристический многочлен

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda - 2)$.Спектр состоит из положительных вещественных чисел, следовательно оператор положительный и может быть

записан, как ψ^2, где $\mathrm{Spec}\,\psi^2 = \{8^{[1]}, 2^{[1]}\}$. Собственные одномерные подпространства $V_8 = \left\{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ и $V_2 = \left\{\frac{\beta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Геометрически- это прямые, являющиеся биссектрисами соответствующих координатных углов. Перейдем в новый ортонормальный базис

$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ – матрица перехода из базиса **i,j** в базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$. В новом базисе матрица оператора ψ^2 – диагональная $S_+'^{\,2} = \begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ также, как и матрица оператора ψ $S_+' = \begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Найдем матрицу оператора ψ в исходном базисе. Воспользуемся формулами преобразования координат. Матрица перехода P- ортогональная, поэтому $P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. P^{-1}- матрица перехода из канонического базиса в стандартный.

$$S_+ = PS_+'P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$O = S_+(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

O – матрица поворота на угол $\frac{\pi}{4}$.

Окончательно получаем $A = S_+ * O = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

Оператор f сначала осуществляет поворот на угол 45°, а затем неравномерно растягивает плоскость вдоль биссектрис координатных углов в $2\sqrt{2}$ и в $\sqrt{2}$ раз соответственно.

§ 11. Упражнения.

1. Доказать, что фф * - самосопряженный оператор, спектр которого лежит на полуоси $x \geq 0$.

2. Доказать, что если $|\mathbf{x}|=|\varphi(\mathbf{x})|$ для любого вектора **x**,то ф- изометрический оператор.

3.Пусть ф и f – самосопряженные операторы, причем фf=fф. Доказать, что фf-самосопряженный оператор. Верно ли обратное утверждение?

4.Доказать, что Kerф* является ортогональным дополнением к Im ф.

5.Доказать, что Imф* является ортогональным дополнением к Ker ф.

6. Евклидово пространство E – прямая сумма линейных подпространств L_1 и L_2 .ф – оператор проектирования на L_1 вдоль L_2 . Найти ф* .

7. Евклидово пространство E – прямая сумма линейных подпространств L_1 и L_2 ф – оператор проектирования на L_1 вдоль L_2. Доказать, что ф =ф* тогда и только тогда, когда линейные подпространства ортогональны.

8. Доказать, что если ф – самосопряженный оператор , спектр которого лежит на полуоси $x\geq 0$, то существует самосопряженный оператор f , , спектр которого также лежит на полуоси $x\geq 0$, и такой, что f^2 =ф.

9. Линейный оператор ф в вещественном евклидовом пространстве называется кососимметрическим, если ф=-ф*. Доказать, что любой линейный оператор в вещественном евклидовом пространстве является суммой симметрического (самосопряженного) и кососимметрического операторов. Обобщить это утверждение на комплексный случай.

10. Доказать, что если векторы **x** и **y** в евклидовом пространстве имеют одинаковую длину, то существует изометрический оператор, переводящий **x** в **y.**

11. Линейный оператор в евклидовом пространстве самосопряженный и изометрический одновременно. Каков его геометрический смысл?

Глава 9. Квадратичные формы и поверхности второго порядка.

В этой главе излагается сокращенная теория квадратичных форм необходимая для классификации поверхностей второго порядка в R^3.

§1. Линейные формы.

Пусть $\mathbb{V}$ – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Определение 1. Линейной формой f в пространстве $\mathbb{V}$ называется линейное отображение $\mathbb{V}$ в $\mathbb{R}$, то есть отображение, удовлетворяющее условию $f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$

Примеры.

1. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{x}) = x_1$ – линейная форма

2. $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n[x]$ – линейное пространство многочленов, степени не выше n

   $f\big(p(x)\big) = \int_0^1 p(x)dx$ – линейная форма

3. $\mathbb{V} = M_n(\mathbb{R})$ – множество квадратных матриц с вещественными элементами $f(A) = tr(A)$ – линейная форма.

Зафиксируем базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ в пространстве $\mathbb{V}$, тогда любой $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}$ можно записать в виде $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e_i}$, а значение линейной формы на векторе $\boldsymbol{x}$ в виде $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\boldsymbol{e_i})$. Числа $f(\boldsymbol{e_i})$ $i = 1,2, \dots, n$ – значения формы f на базисных векторах.

Определение 2. Матрицей линейной формы в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ называется матрица $A_f = \big(f(\boldsymbol{e_1}), \dots, f(\boldsymbol{e_n})\big)$

Матрица A_f – матрица, в которой одна строка и n столбцов. Если мы знаем эту матрицу, то значение формы f на векторе x можно вычислить по формуле

$$f(\boldsymbol{x}) = \big(f(\boldsymbol{e_1}), \dots, f(\boldsymbol{e_n})\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_f * \boldsymbol{x} \qquad (1)$$

Матрица A_f зависит от выбора базиса и меняется при переходе в новый базис $\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}, \dots, \boldsymbol{e_n'}$. Найдем связь между матрицами A_f и A_f'. Пусть P – матрица перехода из базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ в базис $\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}, \dots, \boldsymbol{e_n'}$

$$f(x) = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_f' \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в рассматриваемых базисах связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Подставляя это соотношение в равенство (2), получаем $A_f P = A_f'$.

§2 Билинейные формы.

Пусть V – линейное пространство над полем R

Определение 3. Функция двух векторных переменных $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ называется билинейной формой, если она линейна по каждому переменному при фиксированном втором.

Примеры.

1. Если $f_1(\boldsymbol{x})$ и $f_2(\boldsymbol{x})$ – линейные формы в пространстве $\mathbb{V}$, то функция $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_1(\boldsymbol{x}) * f_2(\boldsymbol{y})$ – билинейная форма.
2. Скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве – билинейная форма.

Определение 4. Матрицей билинейной формы в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ называется матрица A_f, элементы которой $a_i^j = f(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j})$

Примеры.

1. Если $f_1(\boldsymbol{x})$ и $f_2(\boldsymbol{x})$ – линейные формы в пространстве $\mathbb{V}$, а $A_{f_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $A_{f_2} = (\beta_1, \dots, \beta_n) -$ матрицы этих линейных форм в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ то матрица билинейной формы $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_1(\boldsymbol{x}) * f_2(\boldsymbol{y})$ в этом базисе $A_f = (\alpha_i \beta_j)$
2. Если $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве E , $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ базис этого пространства, $G = G(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ – матрица Грама системы базисных векторов, то матрица A_f =G.

Зная матрицу билинейной формы f в данном базисе $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}$, можно вычислить значение f на любой паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Действительно, если

$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^n y_j \boldsymbol{e_j}$, то $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e_i}, \sum_{j=1}^n y_j \boldsymbol{e_j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f\left(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\right)$.

Пусть $A_f = \left(a_i^j\right) -$ матрица билинейной формы , $a_i^j = f\left(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\right)$, тогда $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j x_i y_j$.

В матричном виде получаем:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1, \dots, x_n) A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \,. \qquad (3)$$

Выведем формулу, связывающую матрицы билинейной формы f в различных базисах. Пусть P – матрица перехода из базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ в базис $\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \dots, \boldsymbol{e'_n}$, тогда

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \dots, x_n) A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1, \dots, x'_n) A'_f \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Воспользуемся формулой преобразования координат вектора при переходе к новому базису $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Транспонируем это равенство $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) P^{\mathrm{T}}$. Мы воспользовались свойством $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$. Подставим эти соотношения в равенство (4), и получим $(x'_1, \dots, x'_n) P^{\mathrm{T}} A_f P \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = (x'_1, \dots, x'_n) A'_f \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$. Равенство справедливо для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, откуда следует, что $\mathrm{P^T A_f P = A'_f}$.

§3 Квадратичные формы.

Пусть $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – билинейная форма в линейном пространстве $\mathbb{V}$.

Определение 5. Квадратичной формой в линейном пространстве $\mathbb{V}$ называется функция $F(\boldsymbol{x})$, полученная следующим образом $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ из некоторой билинейной формы $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, заданной в этом пространстве .

Пример. Рассмотрим стандартный базис $\bar{\boldsymbol{\imath}}, \bar{\boldsymbol{\jmath}}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Пусть билинейная форма $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ имеет в этом базисе матрицу $A_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, по которой она однозначно определяется $\alpha = f(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$; $\beta = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\gamma = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})$; $\delta = f(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j})$. По формуле (3) получаем $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, x_2) A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2$. Соответствующая квадратичная форма имеет вид : $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \alpha x_1^2 + (\beta + \gamma) x_1 x_2 + \delta x_2^2$. (Мы привели подобные члены). Таким образом, если мы возьмем две различные билинейные формы f_1 и f_2 с различными матрицами $A_{f_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ и A_{f_2}, $= \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$,но такими, что $\alpha_1 = \alpha_2, \delta_1 = \delta_2$ и $\beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2$, то квадратичные формы $F_1(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ и $F_2(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ получатся

одинаковыми. Следовательно, для каждой квадратичной формы можно найти бесконечно много билинейных форм, из которых она может быть получена. Среди этих форм f будет и симметрическая, то есть форма, удовлетворяющая условию $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$. Матрица такой формы также будет симметрической, то есть $A_f^{\mathrm{T}} = A_f$.

Теорема 1. Для каждой квадратичной формы существует единственная симметрическая билинейная форма, из которой она может быть получена.

Доказательство. Пусть $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, где $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – произвольная билинейная форма. Рассмотрим новую функцию $\widetilde{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\big)$. Эта функция тоже билинейная форма, для которой, однако $\widetilde{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \widetilde{f}\,(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, то есть $\widetilde{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – симметрическая билинейная форма. Построим для нее квадратичную форму $\widetilde{F}\,(\boldsymbol{x}) = \widetilde{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$. Но $\widetilde{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\big) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$. Мы доказали, что любая квадратичная форма может быть получена из симметрической билинейной формы.

Покажем, что симметрическая билинейная форма однозначно восстанавливается по квадратичной форме. Рассмотрим $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, где $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – симметрическая билинейная форма. $F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}) + 2f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + F(\boldsymbol{y})$. Отсюда получаем $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})\big)$

Теперь можно дать важное определение.

Определение 6. Матрицей квадратичной формы в данном базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ называется матрица соответствующей симметрической билинейной формы в этом базисе.

Из этого определения следует, что матрица квадратичной формы симметрическая в любом базисе.

Примеры.

1.Пусть $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ квадратичная форма в пространстве R^2, полученная из некоторой билинейной формы $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Пусть матрица этой формы A_f в данном базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, тогда $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2$, а $F(\boldsymbol{x}) = \alpha x_1^2 + (\beta+\gamma) x_1 x_2 + \delta x_2^2$

Матрицей квадратичной формы $F(\boldsymbol{x})$ будет матрица $A_F = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \frac{\beta+\gamma}{2} & \delta \end{pmatrix}$.

2. Пусть $F(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_2^2$ – квадратичная форма в пространстве R^3 тогда матрица этой квадратичной формы в стандартном базисе $A_F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

§4. Канонический вид квадратичной формы.

Пусть $F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j}^{n} a_i^j x_i x_j$ квадратичная форма в стандартном евклидовом пространстве E^n. Такая координатная запись квадратичной формы F предполагает, что в пространстве зафиксирован базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ и $x_1, \dots, x_n$ – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе. Будем считать, что базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ стандартный. Рассмотрим матрицу квадратичной формы A_F в этом базисе. Это - симметрическая матрица. Определим оператор φ в E^n, как оператор умножения на матрицу A_F. Так как рассматриваемый базис стандартный (это важно!), то матрица оператора в этом базисе $A_\varphi = A_F$. Перейдем в другой ортонормированный базис. Матрица квадратичной формы меняется так же, как и матрица билинейной формы, поэтому $A'_F = \mathrm{O^T A}_F \mathrm{O}$. Матрица оператора ф в новом базисе $A'_\varphi = O^{-1} A_\varphi O$, где O – ортогональная матрица перехода в новый базис. Но $O^{-1} = O^{\mathrm{T}}$, следовательно, $A'_\varphi = A'_F$. Это равенство означает, что оператор φ корректно и однозначно определяется по квадратичной форме F.

Матрица A_φ оператора φ в ортонормированном базисе – симметрическая и, следовательно, оператор φ – самосопряженный и у него существует канонический ортонормированный базис $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \dots, \mathbf{e'_n}$, в котором его матрица A'_φ – диагональная.

$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, где λ_i – собственные значения оператора φ.

Но $A'_\varphi = A'_F$, следовательно, у квадратичной формы тоже существует канонический ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональная. Пусть $x'_1, \dots, x'_n$ – координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, тогда $F(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$. Такой вид квадратичной формы называется каноническим.

У квадратичной формы (так же, как и у самосопряженного оператора может быть много различных канонических ортонормированных базисов, но набор коэффициентов λ_i определен однозначно (с точностью до порядка на

диагонали), так как λ_i – собственные значения оператора φ. Однако, если мы не будем ограничиваться только ортонормированными базисами, то можно будет найти и другие канонические базисы в R^n , в которых матрица A_F'' будет диагональной и форма запишется в виде $F(\mathbf{x}) = \mu_1 x_1''^2 + \cdots + \mu_n x_n''^2$, причем числа μ_i могут отличаться от λ_i.

Пример. Рассмотрим канонический ортонормированный базис $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ квадратичной фомы $F(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Среди коэффициентов λ_i могут быть положительные, отрицательные и нулевые. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0$, $\lambda_{p+q+1}, \dots, \lambda_n = 0$ (этого всегда можно добиться перестановкой базисных векторов).

Рассмотрим новый базис $\mathbf{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\mathbf{e_p}$, $\mathbf{e_{p+1}'} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}\mathbf{e_{p+1}}, \dots, \mathbf{e_{p+q}'} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}}\mathbf{e_{p+q}}$, $\mathbf{e_{p+q+1}'} = \mathbf{e_{p+q+1}}, \dots, \mathbf{e_n'} = \mathbf{e_n}$.

Матрица перехода в новый базис $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Матрица P не ортогональна, так как мы перешли в ортогональный, но не нормированный базис. Найдем вид квадратичной формы в этом базисе

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – формула преобразования координат, следовательно

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}x_1', \dots, \; x_p = \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}x_p', \;\; x_{p+1}' = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}x_{p+1}, \dots, \; x_n' = x_n$

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = x_1'^2 + \cdots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \cdots - x_{p+q}'^2$$

Такой вид квадратичной формы называется нормальным.

Теорема 2.(Закон инерции). Число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора базиса.

Определение 7. Число положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется положительным индексом инерции $i_+(F)$, число отрицательных коэффициентов – отрицательным индексом инерции $i_-(F)$.

Заметим, что число $i_+(F) + i_-(F) = rkA_F$ называется рангом квадратичной формы rkF.

С помощью индексов инерции можно классифицировать квадратичные формы в линейном пространстве размерности n.

В описанном выше нормальном виде квадратичной формы $i_+(F) = p$, $i_-(F) = q$, $rkF = p + q$

Рассмотрим подробно случай $n = 3$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i_+	3	2	1	0	2	1	0	1	0
i_-	0	1	2	3	0	1	2	0	1
$rk\ F$	3	3	3	3	2	2	2	1	1

Выпишем нормальный вид квадратичной формы для этих случаев.

1. $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2. $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
3. $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$
4. $F(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$
5. $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$
6. $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$
7. $F(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$
8. $F(\mathbf{x}) = x_1^2$
9. $F(\mathbf{x}) = -x_1^2$

Таким образом, имеется девять различных типов квадратичных форм.

В 1 случае $F(\mathbf{x}) > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Такие квадратичные формы называются положительно определенными. В случае 4 $F(\mathbf{x}) < 0,\ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Такие формы называются отрицательно определенными.

Пример. Если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – скалярное произведение, то $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительно определенная квадратичная форма.

§5 . Поверхности $2^{\text{го}}$ порядка.

Рассмотрим пространство R^3 – множество точек трехмерного пространства, V^3 – линейное пространство векторов, и декартову систему

координат. Система координат – это точка $O \in$ R^3 и ортонормированный базис **i,j,k** пространства V^3. Координаты точки M(x,y,z) – координаты вектора OM в базисе **i,j,k** . После введения системы координат можно отождествить R^3 и V^3. $\mathbf{v} = OM = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow M(x, y, z)$.

Поверхностью $2^{\text{го}}$ порядка называется геометрическое множество точек M(x,y,z), координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x, y, z) = 0$, где Φ – многочлен $2^{\text{ой}}$ степени. $\Phi(x, y, z) = a_1^1 x^2 + a_1^2 xy + a_1^3 xz + a_2^2 y^2 + a_2^3 yz + a_3^3 z^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c$.

$\Phi(x, y, z) = F(x, y, z) + f(x, y, z) + c = F(v) + f(v) + c$, где $F(v)$ – квадратичная форма, $f(v)$ – линейная форма, c – константа.

$A_F = \begin{pmatrix} a_1^1 & \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1^3}{2} \\ \frac{a_1^2}{2} & a_2^2 & \frac{a_2^3}{2} \\ \frac{a_1^3}{2} & \frac{a_2^3}{2} & a_3^3 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$A_f = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)$ – матрица линейной формы в этом же базисе.

У квадратичной формы F существует канонический ортонормированный базис $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ в пространстве V^3. Это базис из собственных векторов оператора φ – оператора умножения на матрицу A_F.

Перейдем в этот базис и рассмотрим новую декартову систему координат. $(0, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$**.** В этой системе уравнение поверхности $\Phi(x, y, z) = \Phi'(x_1, y_1, z_1) = 0$, где $x_1, y_1, z_1 -$ координаты вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ и , следовательно, координаты точки M в новой системе координат. Связь между координатами вектора в различных базисах описывается матрицей перехода P, которая в нашем случае ортогональна. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

$\Phi'(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + b_1' x_1 + b_2' y_1 + b_3' z_1 + c = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения оператора φ, а b_1', b_2', b_3' - коэффициенты линейной формы f в базисе $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$. причем, $(b_1' \quad b_2' \quad b_3') = b_1 \quad b_2 \quad b_3)P$.

Классифицируем поверхности $2^{\text{го}}$ порядка, используя классификацию квадратичных форм по индексам инерции.

Тип I: $rk\ F = 3$ (все $\lambda_i \neq 0$)

а) $i_+(F) = 3 \;\; i_-(F) = 0$

б) $i_+(F) = 0 \;\; i_-(F) = 3$

С точки зрения уравнения $\Phi'(x_1, y_1, z_1) = 0$ случаи а) и б) неразличимы. Рассмотрим случай а). Выделяем полные квадраты по переменным x_1, y_1, z_1 и получаем уравнение $\lambda_1(x_1 - \alpha)^2 + \lambda_2(y_1 - \beta)^2 + \lambda_3(z_1 - \gamma)^2 = c'$

Константа изменилась в процессе выделения полных квадратов. Выбираем новую систему координат $O_1, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$, где O_1 – точка с координатами $O_1(\alpha, \beta, \gamma)$ в новой системе координат, а $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ – канонический базис квадратичной формы.

Произошел параллельный перенос системы координат. В новой системе координаты $x_2 = x_1 - \alpha, \;\; y_2 = y_1 - \beta, \;\; z_2 = z_1 - \gamma$.

Уравнение поверхности принимает вид $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = c'$

Если $c' > 0$, то получаем эллипсоид

Если $c' < 0$, то мнимый эллипсоид

Если $c' = 0$, то мнимый конус

в) $i_+(F) = 2 \;\; i_-(F) = 1$

г) $i_+(F) = 1 \;\; i_-(F) = 2$

Эти случаи также неразличимы с точки зрения уравнения $\Phi'(x_1, y_1, z_1) = 0$. Рассмотрим случай в) и проделаем те же преобразования, что и в случае а).

Получаем $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = c'$

Если $c' > 0$, то поверхность – однополостный гиперболоид

Если $c' < 0$, то двуполостный гиперболоид

Если $c' = 0$, то вещественный конус

Тип II: $rk\ F = 2\ .\ \lambda_3 = 0$

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1' x_1 + b_2' y_1 + b_3' z_1 + c = 0$$

а) $b_3' = 0, \;\; z_1$ – отсутствует

Поверхность цилиндрическая с образующими параллельными оси Oz_1 и направляющей – кривой второго порядка в плоскости Ox_1y_1, задаваемой уравнением $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1' x_1 + b_2' y_1 + c = 0$

б) $b_3' \neq 0$, все три переменные присутствуют в уравнении.

Выделяем полные квадраты по переменным x_1 и y_1 и получаем

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1(x_1 - \alpha)^2 + \lambda_2(y_1 - \beta)^2 + b_3' z_1 + c' = 0$$

$$\lambda_1(x_1 - \alpha)^2 + \lambda_2(y_1 - \beta)^2 = -b_3'\left(z_1 + \frac{c'}{b_3'}\right)$$

Перенесем начало отсчета в точку $O_1\left(\alpha, \beta, -\frac{c'}{b_3'}\right)$ и сохраним базис $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ – канонический для квадратичной формы $F(\mathbf{v})$. В новой системе координат $x_2 = x_1 - \alpha,\ y_2 = y_1 - \beta,\ z_2 = z_1 + \frac{c'}{b_3'}$

Посмотрим на индексы инерции формы $F(\mathbf{v})$. Случаи $i_+(F) = 2\ \ i_-(F) = 0$ и $i_+(F) = 0\ \ i_-(F) = 2$ неразличимы с точки зрения уравнения и определяют эллиптический параболоид

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = -b_3' z_2$$

В случае $i_+(F) = i_-(F) = 1$ уравнение задает гиперболический параболоид.

Тип III: $rk\ F = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + b_1' x_1 + b_2' y_1 + b_3' z_1 + c = 0$$

Выделяем полный квадрат по переменной x_1

$$\lambda_1(\mathrm{x}_1 - \alpha)^2 + b_2' y_1 + b_3' z_1 + c_1 = 0$$

Рассмотрим плоскость Oy_1z_1. Она порождается векторами $\mathbf{e_2}$ и $\mathbf{e_3}$ и ортогональна вектору $\mathbf{e_1}$. Построим новый ортонормированный базис в этой плоскости $\mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'}$. Пусть $\mathbf{b} = b_2'\mathbf{e_2} + b_3'\mathbf{e_3}$ – вектор в этой плоскости, тогда $\mathbf{e_2'} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ - вектор единичной длины В качестве $\mathbf{e_3'}$ возьмем вектор в рассматриваемой плоскости ортогональный $\mathbf{e_2'}$.

Базис $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'}$ – новый канонический базис квадратичной формы $F(\mathbf{v})$. (Она принимает нулевые значения на векторах плоскости Oy_1z_1). Перейдем в новую декартову систему координат $O_1, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'}$, где $O_1(\alpha;0;0)$.Теперь x_2, y_2, z_2 – координаты точки в новой системе координат, причем $x_2 = \mathrm{x}_1 - \alpha$ Уравнение поверхности в новых координатах имеет вид:

$$\Phi''(x_2, \mathrm{y}_2, z_2) = \lambda_1(x_2)^2 + |b|\mathrm{y}_2 + c_1 = 0$$

Действительно $b_2' y_1 + b_3' z_1$ – скалярное произведение вектора $\mathbf{b}$ и проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость Oy_1z_1 вычисленное в базисе $\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$. Вычислим это же скалярное произведение в новом ортонормированном базисе $\mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'}$. Вектор $\mathbf{b}$ в этом базисе можно записать в виде $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\mathbf{e_2'}$, т.е. его координаты $|b|$ и 0.

Уравнение задает цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси $O_1 z_2$ и направляющей – кривой второго порядка в плоскости $Ox_2 y_2$.

§6. Пример.

Рассмотрим уравнение $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 16x - 16y + 8z + 36 = 0$

Это уравнение задает некоторую поверхность второго порядка. Выделим в нашем многочлены члены одной степени: $\Phi(x, y, z) = F(x, y, z) + f(x, y, z) + c$, где $F(x) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$ – квадратичная форма в пространстве V^3, $f = 16x - 16y + 8z$ – линейная форма в пространстве V^3, а $c - \text{константа}$. Матрица квадратичной формы $A_F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ – симметрическая и задает самосопряженный оператор φ. Найдем его спектр и собственный канонический базис

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

Корень $\lambda = 1$ находим подбором, многочлен $\lambda^2 - 2\lambda - 8$ с помощью теоремы Безу.

$$Spec\ \varphi = \{1^{[1]}, -2^{[1]}, 4^{[1]}\}$$

Собственные подпространства будут одномерными и находятся решением соответствующих однородных систем.

$$L_1 = < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} >, \qquad L_{-2} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} >, \qquad L_4 = < \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Эти подпространства попарно ортогональны, а порождающие их векторы образуют ортогональный базис в пространстве V^3. Нормируем эти векторы и получим канонический базис оператора φ и квадратичной формы F.

$$\mathrm{e}_{\mathbf{1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}_{\mathbf{2}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}_{\mathbf{3}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма в этом базисе записывается в виде $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2y_1^2 + 4z_1^2$, где x_1, y_1, z_1 координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе. Заметим, что линейная форма f тоже имеет другой вид в новом базисе (её матрица в новом базисе другая).

Рассмотрим новую декартову систему координат с тем же началом отсчета, точкой O, но с новыми осями Ox_1, Oy_1, Oz_1, идущими в направлении новых базисных векторов. Чтобы написать уравнение нашей поверхности в новой системе координат нужно воспользоваться формулой преобразования координат $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, которая в нашем случае принимает вид:

$x = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1$,$y = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}z_1$, $z = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1$

Подставим эти выражения в исходное уравнение. Квадратичную форму преобразовывать не нужно, так как мы знаем её вид в новом базисе $F(\mathbf{x}) = \mathrm{x}_1^2 - 2y_1^2 + 4z_1^2$, а линейную форму f можно вычислить непосредственно: $f = 16\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1\right) - 16\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}z_1\right) + 8\left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1\right) = 24z_1$

Тот же самый вид линейной формы можно получить, вычислив её матрицу в новом базисе, используя формулу $A_f' = A_f P$.

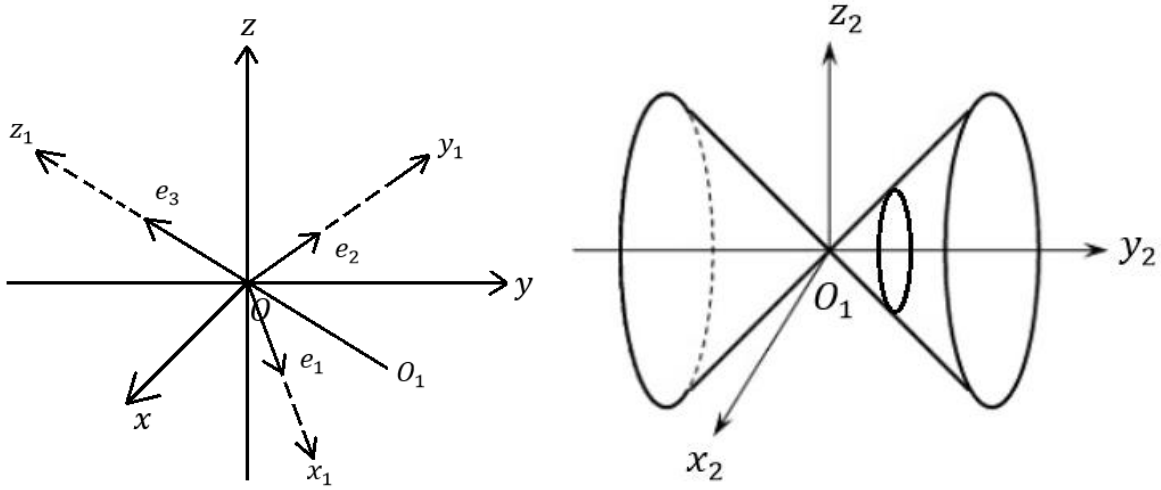
$A_f = (16 \quad -16 \quad 8)$. Следовательно, $A_f' = (16 \quad -16 \quad 8) * O =$

$$(16 \quad -16 \quad 8)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 24)$$

Итак, уравнение поверхности в новой системе координат $x_1^2 - 2y_1^2 + 4z_1^2 + 24z_1 + 36 = 0$. Выделяем полный квадрат по переменному z_1: $x_1^2 - 2y_1^2 + 4(z_1^2 + 6z_1 + 9 - 9) + 36 = 0$. $x_1^2 - 2y_1^2 + 4(z_1 + 3)^2 = 0$

Рассмотрим точку $O_1(0, 0, -3)$ и перенесем в неё начало рассматриваемой системы координат. Новые оси выходят из точки O_1 и идут в направлении базиса $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$. Это оси OX_2, OY_2, OZ_2. Новые координаты $x_2 = x_1,\ y_2 = y_1,\ z_2 = z_1 + 3$

В новой системе координат получили каноническое уравнение поверхности $\mathrm{x}_2^2 - 2y_2^2 + 4z_2^2 = 0$. Это уравнение вещественного конуса.



§ 7. Упражнения.

1.f(x) –линейная форма на пространстве V, dim V = n. Ker f= $\{x; f(x) = 0\}$ - ядро формы .Доказать, что если Ker f_1 =Ker f_2 , то f_1 =λ f_2 .

2.Доказать, что Ker f – линейное подпространство в V, и найти его размерность.

3. Доказать, что для любой ненулевой линейной формы в V существует базис, в котором матрица формы имеет вид A_f =(100....0).

4.Доказать, что множество линейных форм на V образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число, и найти его размерность.

5.Пусть f_1 и f_2 линейные формы на V , причем $f_1(x)$ $f_2(x)$=0. Доказать,что одна из форм нулевая.

6. V=$P_n[x]$- пространство многочленов степени не выше n. f(p(x))=p(0).

а) проверить, что f- линейная форма.

в) найти ее матрицу в базисе 1,x,…,x^n .

7. V=$P_n[x]$- пространство многочленов степени не выше n. f(p(x))=$\int_0^1 p(x)dx$

а) проверить, что f- линейная форма.

в) найти ее матрицу в базисе 1,x,…,x^n .

8.V=M_2 –пространство матриц второго порядка. f(A)=TrA- след матрицы A.

а) проверить, что f- линейная форма.

в) найти ее матрицу в базисе E_i^j i,j=1,2.

9 .E-евклидово пространство над полем действительных чисел, ф-линейный оператор с матрицей A_ϕ в стандартном базисе,f(x,y)=(x,ф(y)).

а) проверить, то f-билинейная форма.

в) будет ли эта форма симметрической?

с) найти ее матрицу в стандартном базисе.

10.E-евклидово пространство. ф-линейный оператор с матрицей A_ϕ, f(x,y)-билинейная форма с матрицей A_f в стандартном базисе, g(x,y)=f(ϕ(x),(y)).

а) проверить, то g-билинейная форма.

в) будет ли эта форма симметрической?

с) найти ее матрицу в стандартном базисе.

11. Найти симметрическую билинейную форму, соответствующую квадратичной форме F(x)=f(x,x), где $f(x,y)=2x_1y_1 -3x_1y_2-4x_1y_3+x_2y_1 -5x_2y_2+x_3y_3$.

12.Доказать, что симметрические билинейные формы образуют линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число. Найти размерность этого пространства.

13.При каких значениях λ квадратичная форма $F(x)=5x_1^2 +x_2^2 +\lambda x_3^2 +4x_1x_2 -2x_1x_2 -2x_1x_3 -2x_2x_3$ будет положительно определенной?

14. При каких значениях λ квадратичная форма $F(x)=-x_1^2 +\lambda x_2^2 -x_3^2 +4x_1x_2 +8x_2x_3$ будет отрицательно определенной?

15. $V=M_2$ –пространство матриц второго порядка, f (A,B) = Tr(AB). Проверить, что f билинейная форма. Пусть F(A)-соответствующая ей квадратичная форма. Найти ее индексы инерции.

Литература.

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.; МЦНМО, 2017.
2. Гелшьфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.; МЦНМО, 1998.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра. М.; МЦНМО, 2009.
4. Кострикин А.И. Сборнбик задач по алгебре. М.; МЦНМО, 2009.
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.; Бином. Лаборатория знаний, 2005.